Б. И. АЛЕКСАНДРОВ
В. М. МАКСИМОВ
М. В. ЛУРЬЕ
А. В. КОЛЕСНИЧЕНКО

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Б. И. АЛЕКСАНДРОВ
В. М. МАКСИМОВ
М. В. ЛУРЬЕ
А. В. КОЛЕСНИЧЕНКО

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1972

УДК 510(023)(077.98)

В пособии собрано более тысячи самых разнообразных задач, отражающих уровень требований, предъявляемых к поступающим в различные вузы страны. Большинство задач приведено с подробными решениями. Каждый параграф сопровождается предварительными замечаниями, где приведены справочные материалы и методические указания. Многие задачи являются задачами повышенной трудности и отражают уровень требований, предъявляемых при поступлении в физико-математические вузы. Особое внимание следует обратить на IV часть пособия. Здесь в каждом параграфе собраны и систематизированы задачи по алгебре, тригонометрии и геометрии с единой методикой решения. Настоящее пособие предназначено для лиц, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения. Оно может быть использовано также преподавателями средних школ, подготовительных курсов и отделений вузов.

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

2-2-2
178-72

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

Часть I. **АЛГЕБРА**

§ 1. Действительные числа. Преобразование алгебраических выражений 9
§ 2. Комплексные числа 17
§ 3. Исследование квадратного трехчлена 26
§ 4. Многочлены. Теорема Безу 36
§ 5. Системы рациональных алгебраических уравнений . . . 40
§ 6. Иррациональные уравнения и неравенства 44
§ 7. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства 49
§ 8. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Метод математической индукции 57
А. Прогрессии 57
Б. Метод математической индукции 61
§ 9. Текстовые алгебраические задачи 65

Часть II. **ТРИГОНОМЕТРИЯ**

§ 1. Предварительные замечания 83
§ 2. Тригонометрические уравнения 92
§ 3. Тригонометрические неравенства 97
§ 4. Системы тригонометрических уравнений 98
§ 5. Обратные тригонометрические функции 101
§ 6. Смешанные задачи 105

Часть III. **ГЕОМЕТРИЯ**

§ 1. Планиметрия 113
§ 2. Стереометрия 128

Часть IV. **СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ**

§ 1. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений 149
§ 2. Соединения и бином Ньютона 166
§ 3. Логические и нестандартные задачи. Необходимость и достаточность 170

Часть V. **РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ**

§ 1. Алгебра (задачи 1—579) 191
§ 2. Тригонометрия (задачи 580—830). 353
§ 3. Геометрия (задачи 831—953). 462
§ 4. Специальные классы задач (задачи 954—1093). 539
Литература 608

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие по математике предназначено для лиц, готовящихся к поступлению в вузы. Анализ вступительных экзаменов по математике в Московском государственном университете и методическая работа, проводимая авторами пособия в течение многих лет на подготовительных курсах МГУ, показывают, что для глубокого знания всех разделов школьного курса элементарной математики необходима большая практика по решению задач, охватывающих все разделы программы средней школы. Один из основных недостатков в знаниях абитуриентов часто заключается в формальном усвоении программного материала, в неумении применить теоретические знания при решении более сложных с технической или логической стороны задач. Этот недостаток в значительной степени связан с тем, что при изучении математики в средней школе, где преподаватель связан сжатыми сроками расписания, не остается времени для основательной практики в решении задач подобного рода. В еще более трудном положении, по сравнению со школьниками, оказывается работающая молодежь и лица, имеющие перерыв в обучении.

В настоящем пособии собрано большое количество (более 1000) самых разнообразных задач, отражающих уровень требований, предъявляемых к поступающему в вуз. Поскольку данным пособием будут пользоваться лица, уже имеющие среднее образование и, следовательно, знакомые с программой средней школы по математике, авторы расположили материал в порядке, наиболее удобном для повторения.

Авторы глубоко убеждены, что для прочного освоения того или иного раздела программы мало решить по нескольку задач различного типа. Совершенно необходимо, решив большое количество однотипных задач, обрести уверенность в выполнении „стандартных" преобразований и операций, научиться „технике" решения задач.

Поэтому наряду с большим разнообразием задач в пособии содержится много задач каждого конкретного типа. Большая их часть взята из вариантов письменных экзаменов по математике, проводившихся на различных факультетах МГУ за последние годы.

Вместе с тем в пособие включено много задач, предлагавшихся в других университетах и ведущих институтах страны, которые, на наш взгляд, естественным образом связаны с приведенными задачами. Некоторые из них составлены специально для данного руководства.

Большинство задач приведено с подробными решениями. К остальным даны указания и ответы. Перед каждым параграфом, отражающим отдельный раздел программы, приведены предварительные замечания, которые содержат все сведения, необходимые для решения задач данного раздела.

В пределах каждого параграфа задачи систематизированы и расположены в порядке возрастания трудности.

Однако ни предварительные замечания, ни само пособие, конечно, не могут заменить учебника по курсу элементарной математики. Поэтому перед изучением какого-либо параграфа этой книги следует предварительно повторить содержание соответствующих разделов школьных учебников.

Пособие состоит из пяти частей и приложения. В первых трех частях помещены соответственно задачи по алгебре, тригонометрии и геометрии. Наряду с традиционным материалом в указанные разделы включены также темы, недостаточно полно рассматриваемые в школе (геометрия комплексных чисел, задачи с параметрами, обратные тригонометрические функции, метод математической индукции и т. п.).

Перед параграфом, содержащим задачи по стереометрии, приведены „вспомогательные задачи", решение которых призвано выработать у учащегося определенные стандартные приемы, необходимые для решения более сложных задач.

Лицам, готовящимся к поступлению на механико-математические и физические факультеты университетов, а также в институты и на отделения с повышенными требованиями по математике, следует обратить особое внимание на задачи, помещенные в IV части пособия. Здесь собраны задачи по алгебре, геометрии и тригонометрии, объединенные единой методикой решения — нахождением наибольших и наименьших значений функций, большое количество „нестандартных" задач, а также задач, имеющих определенную логическую трудность. Кроме того, здесь помещены задачи по теме „Соединения и бином Ньютона".

В V части помещены указания, ответы или решения задач, содержащихся в I — IV частях. К чтению соответствующих страниц этого последнего раздела целесообразно приступить после попыток самостоятельного решения задачи. В ряде случаев решения отдельных задач снабжены методическими замечаниями, носящими общий характер, ознакомление с которыми может оказаться полезным.

Для удобства читателей в руководстве принята единая нумерация задач, составляющих части I — IV, и соответствующая ей нумерация в части V.

При написании пособия были использованы варианты экзаменационных задач по математике различных лет, пособия Моденова П. С., Новоселова С. И., „Пособие по математике для поступающих в вузы" Дорофеева Г. В., Потапова М. К., Розова Н. Х., а также пособия, изданные в последние годы для подготовительных курсов МГУ [1—4, 6—10] и заочной математической школы при МГУ [12, 13].

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность В. К. Маркову, прочитавшему эту книгу в рукописи и написавшему для нее раздел, посвященный „нестандартным" задачам. Авторы благодарят также Н. Н. Колесникова, взявшего на себя труд по рецензированию пособия.

Часть I

АЛГЕБРА

§ 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Предварительные замечания. 1°. Действительные числа.

I. *Сложение и умножение действительных чисел.*

Если x и y — действительные числа, то

$$x+y=y+x,\ xy=yx \text{ (коммутативность);}$$
$$x(yz)=(xy)z=xyz \text{ (ассоциативность);}$$
$$x(y+z)=xy+xz \text{ (дистрибутивность);}$$
$$\text{из } x+z=y+z \text{ следует } x=y;$$
$$\text{из } zx=zy\ (z\neq 0) \text{ следует } x=y \text{ (сокращение);}$$
$$x\cdot 1=x \text{ (умножение на единицу).}$$

Действительное число 0 (нуль) обладает следующими свойствами:

$$x+0=x,\quad x\cdot 0=0$$

для каждого действительного числа x.

Единственное противоположное число $-x$ и единственное обратное число $x^{-1}=\frac{1}{x}$ определяются соответственно

$$x+(-x)=x-x=0,\quad x\cdot x^{-1}=1\ (x\neq 0).$$

Делить на нуль нельзя.

Действительное число x больше действительного числа y ($x > y$, $y < x$), если $x = y + \alpha$, где α — некоторое положительное число (упорядоченность).

2. *Отношение равенства.* Из $x = y$ следует а) $y = x$ (симметрия отношения равенства), б) $x + z = y + z$ и в) $xz = yz$ (вообще $f(x) = f(y)$, если $f(x)$ обозначает некоторую операцию, приводящую к единственному результату). Из $x = y$ и $y = z$ следует $x = z$ (транзитивность отношения равенства).

Из $xy \neq 0$ следует $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

3. *Неравенства.* Из $x > y$ следует а) $y < x$, б) $x + z > y + z$, в) $xz > yz$ ($z > 0$), г) $-x < -y$, д) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ($xy > 0$). Сумма и произведение положительных чисел положительны.

4. *Геометрическое изображение.* Если на прямой выбрать начало отсчета (точку 0), единицу масштаба (отрезок $e = 1$) и направление, которое будет считаться положительным (такая прямая называется числовой осью), то действительные числа можно изображать соответствующими точками этой прямой. Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется координатой точки по этой оси.

Употребляют обозначения: $M\left(-\frac{3}{2}\right)$, $N(x)$ и т. д. Первое из них обозначает, что точка M изображает число $-\frac{3}{2}$ $\left(\text{имеет координату } -\frac{3}{2}\right)$, второе,— что N изображает число x (имеет координату x).

Таким образом устанавливается соответствие между действительными числами и точками числовой оси. (При этом оказывается, что каждой точке числовой оси соответствует одно определенное число и каждому числу — одна определенная точка прямой; двум разным точкам соответствуют два разных числа. Такое соответствие в математике называется взаимнооднозначным.)

5. *Интервалы.* Пусть x — действительная переменная. Множество всех значений x (точек), удовлетворяющих условиям:

а) $a < x < b$ называется ограниченным открытым интервалом и обозначается (a, b);

б) $a < x$ (или $x < a$) — неограниченным открытым интервалом и обозначается $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, a)$);

в) $a \leqslant x \leqslant b$ — ограниченным замкнутым интервалом и обозначается $[a, b]$.

Замкнутый интервал $[a, b]$ называется также или отрезком, или сегментом, или замкнутым промежутком. Множества точек x, удовлетворяющих условиям $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x$, $x \leqslant a$, называют полуоткрытыми интервалами и обозначают соответственно

$$[a, b);\ (a, b];\ [a, +\infty);\ (-\infty, a].$$

В дальнейшем для краткости мы будем пользоваться лишь термином „отрезок“ для обозначения ограниченного замкнутого интервала. Все остальные вышеуказанные множества действительных значений x будем называть просто „интервалами“.

2°. Абсолютная величина действительного числа.

1. Определение. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x называется:

1) само это число, если $x > 0$;

2) противоположное ему число $-x$, если $x < 0$;

3) нуль, если $x = 0$.

Модуль числа x обозначается прямыми скобками ($|x|$ — модуль x) и приведенное определение записывается в виде

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следует, что при любых значениях x имеем $|x| \geqslant 0$. В частности,

$$|x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{если } x_1 - x_2 \geqslant 0, \text{ т. е. } x_1 \geqslant x_2, \\ x_2 - x_1, & \text{если } x_1 - x_2 < 0, \text{ т. е. } x_1 < x_2; \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x)$ — любое действительное выражение (функция) от x.

Из последних соотношений видно, что форма записи абсолютной величины меняется при переходе через характерную точку, в которой выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль.

Для любого x, положительного или отрицательного, $|x|$ означает расстояние от начала отсчета до точки $A(x)$, изображающей число x на числовой оси.

Геометрически модуль разности $|x_1 - x_2|$ *двух чисел* x_1 *и* x_2 *есть расстояние между точками* $A(x_1)$ *и* $B(x_2)$ *на числовой оси, обозначаемое* $r(x_1, x_2)$: $|x_1 - x_2| = r(x_1, x_2) = AB$.

2. Основные свойства модуля:

1) $|x| = |-x|$,

2) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$,

4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

5) $|x-y| \geqslant |x| - |y|$.

3. Правило решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля. Для того чтобы решить уравнение или неравенство, в которое неизвестное входит под знаком модуля, удобно поступить следующим образом:

1) числовая ось разбивается на интервалы характерными точками (то есть нулями всех подмодульных выражений);

2) после этого уравнение или неравенство в каждом из полученных интервалов записывается без знаков модуля и решается;

3) из найденных решений выбираются лишь те, которые лежат в рассматриваемом интервале.

3°. Арифметический корень. Арифметический корень определяется только для неотрицательных (больших или равных нулю) чисел [1].

Арифметическим корнем n-й степени $\sqrt[n]{x}$ из числа $x \geqslant 0$ называется *неотрицательное* число $y \geqslant 0$, такое, что

$$y^n = x.$$

---

[1] В области действительных чисел корни четной степени из отрицательных чисел неопределены. Корень нечетной степени $2n+1$ из отрицательного числа $a < 0$, т. е. $\sqrt[2n+1]{a}$, понимается как действительное решение уравнения

$$y^{2n+1} = a, \quad y = -\sqrt[2n+1]{|a|}.$$

Можно показать, что такое решение единственно.

В частности, из данного определения следует

$$\sqrt{[f(x)]^2} = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Неаккуратное использование этого определения (иногда ошибочно считают, что $\sqrt{x^2} = x$ или $\sqrt{x^2} = \pm x$) часто приводит к неправильным или даже абсурдным выводам.

Для преобразования иррациональных выражений, при вынесении множителя из-под знака радикала или введения множителя под знак корня, нужно помнить, что

а) $\sqrt{x^2} = |x|$;

б) $x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2 y}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{x^2 y}, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

в) $\sqrt{x^2 y} = \begin{cases} x\sqrt{y}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x\sqrt{y}, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

г) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{|y|}$ или $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{x^2}{xy}} = \frac{|x|}{\sqrt{xy}}$.

Например: $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^4} = x^2$; $\sqrt[8]{x^8} = |x|$; $\sqrt[5]{x^5} = x$.

* * *

1. Доказать неравенства:

а) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$;

b) $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$;

c) $\frac{|a+b+c|}{|a+b+c|+2} \leqslant \frac{|a|}{|a|+2} + \frac{|b|}{|b|+2} + \frac{|c|}{|c|+2}$

(здесь a, b, c — любые действительные числа).

Решить уравнения:

2. а) $|x+1| = 3$; b) $|2x-4| = 1$.

3. а) $|x+1| + |x+2| = 2$; b) $|x| + |x+2| = 2$;

c) $|x-1| - |x-2| = 1$.

4. а) $|x-2| + |4-x| = 3$; b) $\left|\frac{-5}{x+2}\right| = \left|\frac{10}{x-1}\right|$;

c) $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$.

5. а) $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$;

b) $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$;

c) $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$.

6. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$.

7. $||3-2x|-1|=2|x|$.

Решить неравенства:

8. a) $|x-1|\leqslant 2$; b) $|4-5x|>\frac{1}{5}$;

c) $1\leqslant|3x-2|\leqslant 2$.

9. a) $\left|2x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{3}{2}$; b) $|x-2|<\frac{x}{2}$;

c) $|x-1|>\frac{x+1}{2}$.

10. $||x|-3|>1$.

11. a) $|3-|x-2||\leqslant 1$; b) $|3-|x-2||\leqslant|x-7|$.

12. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

13. $|3-x|+|2x+4|-|x+1|>2x+4$.

Решить уравнения:

14. $|2x-x^2-3|=1$. **15.** $(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}$.

16. $|x^2-3x+3|=2$. **17.** $|x^2-1|+x+1=0$.

18. $|x|+x^3=0$. **19.** $|x-x^2-1|=|2x-3+x^2|$.

20. $|x^2+2x|-|2-x|=|x^2-x|$.

Решить неравенства:

21. $|x^2-3|+2x+1\geqslant 0$.

22. $|3+5x-2x^2|<\frac{1-x}{2}$.

23. $x^2-|3x+2|+x\geqslant 0$.

24. $|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0$.

25. $x^2+2|x+3|-10\leqslant 0$.

26. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

27. $(1+x)^2\leqslant|1-x^2|$.

28. $|x^2+4x+3|>x+3$.

29. $|x^2-6x+8|\leqslant 4-x$.

30. $|x^2+x-2|>\left|1+\frac{x}{5}\right|$.

31. $|x-1-x^2|\leqslant|x^2-3x+4|$.

32. $|x^3-1|\leqslant x^2+x+1$.

Решить системы уравнений:

33. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5, \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

35. $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} |x^2-2x|+y=1, \\ x^2+|y|=1. \end{cases}$

Для каждого действительного числа a решить уравнения:

37. $x|x+1|-a=0$. **38.** $|x-a|+|x+a+1|=3$.

39. $|x+a|-|2x-a+2|=a$.

40. $\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|=-x^2-4x+a$.

При каких a это уравнение имеет единственное решение? Выяснить, какие множества точек $M(x, y)$ на координатной плоскости определяются соотношениями:

41. a) $x=|y|$; b) $y=|x|$; c) $|x|=|y|$.

42. a) $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$; b) $|x|=x=|y|+y$; c) $|y|=|x-1|$.

43. a) $|x|+|y|=1$; b) $|x|-|y|=1$; c) $|x+y|+|x-y|=4$.

44. a) $\begin{cases} |x-1|\leqslant 1, \\ |y+1|\leqslant 1; \end{cases}$ b) $\left|\frac{x}{y}\right|\leqslant 1$; c) $|y|\leqslant x^2$.

45. a) $||y|-|x||=1$; b) $|y-|x||=x+1$; c) $||y|+|x||=1$.

46. Найти наименьшее значение функций:

a) $y=|x-3|+|x|+|x+3|+|x+5|$;

b) $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$,

где $a<b<c<d$—фиксированные действительные числа.

47. Найти все действительные значения a, при которых минимум функции

$$f(x)=2|x-1|+|x+3|-2|x-a^2-a|$$

больше единицы.

48. а) Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x)=3|x-a|+|x^2+x-2|$$

меньше двух.

б) Найти все действительные a, при которых минимум функции

$$f(x)=ax+|x^2-4x+3|$$

больше единицы.

49. Упростить выражение

$$W=||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z.$$

50. Преобразовать и построить график функции

$$y=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}.$$

Упростить выражения:

51. $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

52. $y=2\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\left[\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\right.$

$\left.+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]^{-2}$,

где $x\geqslant 1$.

53. $y=\frac{1}{m\sqrt{a}}\left(\frac{\frac{mc^{mx}}{2\sqrt{a+bc^{mx}}}}{\sqrt{a+bc^{mx}-\sqrt{a}}}-\frac{\frac{mc^{mx}}{2\sqrt{a+bc^{mx}}}}{\sqrt{a+bc^{mx}-\sqrt{a}}}\right)$,

где $a>0$, $a+bc^{mx}>0$, $c>0$.

54. $y=\frac{2}{b}\left\{\frac{\sqrt{a+bx}}{x}+(\lg x-2)\frac{b}{2\sqrt{a+bc}}+\right.$

$\left.+\sqrt{a}\left[\frac{\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}-\frac{\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right]\right\}$, где $a>0$, $a+$

$+bx>0$.

55. $y=(a^{2x}+2a^x)(a^{2x}+4a^x-1)-\frac{a^{-2x}}{\sqrt{5}}[2a^{2x}-a^x(2a^x-1)]\times$

$\times\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}\,a^x}{2a^x-1}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}+2a^x[1+(a^x+2)(a^{2x}+4a^x-1)^{-\frac{1}{2}}]\times$

$\times\left[a^x+2+(a^{2x}+4a^x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$.

При каких значения x это выражение равно 2?

Вычислить значения следующих выражений:

56. $A=\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ при $y=\dfrac{2a}{b+\dfrac{1}{b}}$.

57. $\beta=\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, где $a>0$, $b>0$.

58. $S=\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$ при $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$.

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1°. **Предварительные замечания.** Комплексные числа составляют новый класс математических объектов, определяемый описанными ниже свойствами.

Определение 1. *Комплексными числами называются числа вида* $z=x+iy$ (x и y — действительные числа, i — новое число, называемое мнимой единицей), удовлетворяющие условиям:

1) два числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются *равными*, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$ (понятия „больше“ и „меньше“ не определены);

2) *сумма и произведение* двух комплексных чисел определяются соответственно равенствами

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_2)$$

(в частности, при $x_1=x_2=0$ и $y_1=y_2=1$ находим $i^2=-1$);

3) операции *вычитания и деления* определяются как действия, обратные сложению и умножению. Отсюда, как следствие, получаются следующие правила для вычитания и деления:

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\quad(z\neq 0).$$

Определение 2. 1) *Действительные числа* идентичны классу комплексных чисел вида $z=x+i0$.

2) Число вида $0+i0$ называют нулем (его свойства совпадают со свойствами нуля в множестве действительных чисел). Из $z=x+iy=0$ следует: $x=y=0$.

3) Комплексное число вида $0+iy$ $(y \neq 0)$ называют чисто мнимым и записывают как iy.

Сложение и умножение комплексных чисел обладает свойствами коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности.

Вспомогательные определения. 1) Действительные числа $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ соответственно называются действительной и мнимой частями числа z (Re — начальные буквы латинского realis — действительный, Im — начальные буквы imaginarius — мнимый).

2) Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называются сопряженными комплексными числами. Отметим, что

a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0);$$

b) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0$,

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Множество всех комплексных чисел содержит корни всех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и включает в себя действительные числа.

2°. Геометрическая интерпретация. 1) Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой (Z) на плоскости с координатами (x, y), или соответствующим радиусом-вектором $\overrightarrow{OZ}$ (рис. 1). Оси Ox и Oy (в прямоугольной декартовой системе координат) называются соответственно действительной и мнимой осью. Абсцисса и ордината каждой точки (Z) изображают соответственно действительную часть x и мнимую часть y числа z. При этом соответствие между множеством всех комплексных чисел и точками плоскостей является взаимно однозначным.

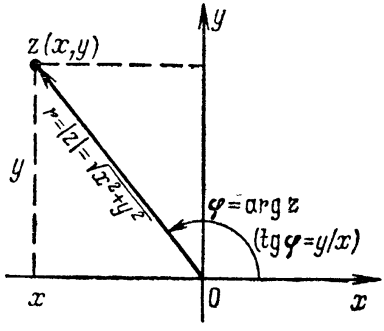


Рис. 1

2) Соответствующие полярные координаты точки (r, φ) (рис. 1)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0,$$

$$\varphi = \operatorname{Arg} z \ (z \neq 0), \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа z [1].

Отметим, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последнее выражение называют *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Модуль комплексного числа $r = |z|$ определяется однозначно; аргумент (угол φ) определен лишь с точностью до слагаемого $2\pi k$ (k — любое целое число).

Одно и только одно значение аргумента удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и называется главным значением. Главное значение аргумента обозначают через $\arg z$. Тогда

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k.$$

Геометрический смысл модуля и *аргумента* z (см. рис. 1): $r = |z|$ есть расстояние от начала координат до точки (Z); $\varphi = \arg z$ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до радиуса-вектора $\overrightarrow{OZ}$.

3) Сумме (разности) комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует сумма (разность) соответствующих радиусов-векторов, изображающих z_1 и z_2. Сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2 изображаются (см. рис. 2) соответственно векторами, равными направленным диагоналям параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OZ}_1$ и $\overrightarrow{OZ}_2$.

В частности, модуль разности $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками (Z_1) и (Z_2), изображающими комплексные числа z_1 и z_2: $|z_1 - z_2| = r(Z_1, Z_2)$.

Отметим, что точки, изображающие комплексные числа $z = x + iy$, для которых $|z - z_0| = r$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$ — заданное число, лежат на окружности с центром $C(x_0, y_0)$ и радиусом r.

---

[1] Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, а модуль $|z| = 0$.

Свойства модуля суммы и разности:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2|| \qquad (*)$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$). Геометрическая интерпретация этих неравенств ясна из рис. 2. Они выражают известные соотношения между сторонами треугольника: в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности (знак равенства имеет место, когда треугольник вырождается в прямую).

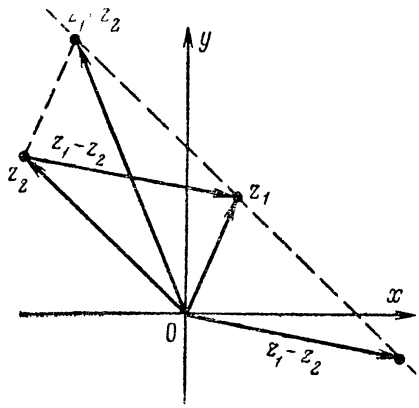


Рис. 2.

3°. Представление произведения и частного, степени и корни в тригонометрической форме.

1. Если даны комплексные числа $z_1=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\quad(z_2\neq0),$$

$$z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(n — целое число) (формула Муавра).

2. Если n — натуральное число и z_0 — комплексное число, то корень n-ной степени из z_0 $\left(\sqrt[n]{z_0}\right)$ есть решение уравнения $z^n=z_0$. При $z_0\neq0$ существует ровно n различных корней n-ной степени из z_0. Они определяются формулами

$$\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Здесь $\sqrt[n]{|z_0|}$ — арифметический корень из положительного числа $|z_0|$, $\varphi=\arg z_0$ и $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Отметим, что

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{\pi(2k+1)}{n}+i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\ k=0,\ 1,\ \ldots\ n-1).$$

Например: $\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1,\\ \cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\\ \cos\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Геометрический смысл $\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0)$: „n“ различных значений $\sqrt[n]{z}$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r=\sqrt[n]{|z|}$ (рис. 3, $n=7$).

* * *

59. Пусть $|z|=2$, где расположены точки, изображающие комплексные числа: a) $-3z$; b) $1-z$; c) $-1+2z$; d) $4z+3$.

Используя геометрический смысл модуля и аргумента комплексного числа, решите задачи 60—67.

Указать, где расположены на плоскости точки, изображающие комплексные числа z, для которых:

60. $|z|<1$. **61.** $|z|\geqslant 3$.

62. $1\leqslant|z|<2$.

63. $|z|<\left|\frac{z}{3}\right|+2$.

64. a) $\arg z=\frac{\pi}{3}$,

b) $\arg z=-\frac{3}{4}\pi$.

65. $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$.

66. $\frac{\pi}{4}<\arg z\leqslant\frac{3}{2}\pi$. **67.** $\begin{cases}\arg z=\pi,\\ |z|<1.\end{cases}$

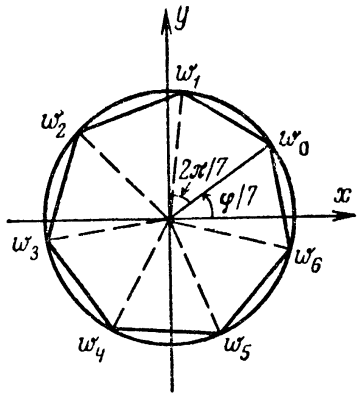


Рис. 3

В задачах 68—84 используйте геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел.

Найти геометрическое место точек плоскости, для которых:

68. $|z-1|=2$. **69.** $|z+2|=1$.

70. $|i-z|<1$. **71.** $|z+1-i|\leqslant 1$.

72. $1<\left|z+\frac{i}{3}\right|<\frac{5}{2}$. **73.** $2\leqslant|z+4i|\leqslant 3$.

74. $|2i-3z|<\frac{1}{2}$.

75. $|2z-3|>2$.

76. $|z+3-2i|=1$.

77. $|z-1+2i|=\sqrt{7}$.

78. $|i-1-2z|>9$.

79. $2<|z-2i+3|<3$.

80. $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1$.

81. $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\leqslant 1$.

82. $|z-1|=|z+1|=|z+i|$.

83. $|z|-2=|z-i|-|z+5i|=0$.

84. $|z-i\sqrt{2}|-|z+4|=|z|-1=0$.

85. Найти комплексное число z, удовлетворяющее одновременно двум равенствам:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3} \text{ и } \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

86. При каком условии модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых, т. е.

$$|z_1+z_2|=|z_1|-|z_2| \ ?$$

Представить в тригонометрической форме следующие числа:

87. $z=-3+3i$.

88. $z=-3-4i$.

89. $z=-1-i\sqrt{3}$.

90. $z=3+2i$.

91. $z=-3-2i$.

92. $z=2+\sqrt{3}-i$.

93. $z=-\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$.

94. $z=\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ$.

95. $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

96. $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(0\leqslant\alpha<2\pi)$.

97. $z=1+i\operatorname{tg}\alpha$, где $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$.

98. $z=\operatorname{tg}\alpha-i$, $0\leqslant\alpha<\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

Представив предварительно комплексные числа в тригонометрической форме, произвести указанные действия

99. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

100. $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

101. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{3}$.

102. $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

103. $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

104. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

105. Найти $z^{1970}+\frac{1}{z^{1970}}$, если известно, что $z+\frac{1}{z}=1$ (z — комплексное число).

106. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место равенство

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z|^2.$$

Дайте геометрическую интерпретацию этого результата.

Изобразить на плоскости множество комплексных чисел $z=x+iy$, для которых

107. $\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\geqslant 0$. **108.** $\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z|$.

109. $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}|z-1|>0,\\ \arg z=\frac{\pi}{6}.\end{cases}$ **110.** $\begin{cases}0<\arg z<\frac{\pi}{4},\\ |z-6i|=\sqrt{3}.\end{cases}$

111. $\arg(z-1)-\arg(z+1)=\frac{\pi}{2}$.

112. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1$.

113. $\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{|z|+2}<2$.

114. $\left|\frac{z-3+2i}{1-3z-2iz}\right|>1$.

115. Найти положение третьей вершины правильного треугольника, если известно, что две его вершины находятся в точках $y_1=1$, $z_2=2+i$.

116. Три последовательных вершины параллелограмма находятся в точках z_1, z_2, z_3. Найти число, определяющее положение четвертой вершины.

117. Точки, изображающие комплексные числа z_1, z_2, z_3, z_4, суть вершины выпуклого четырехугольника. Найти геомерическое место точек $z=\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\alpha_3z_3+\alpha_4z_4$, где α_1 α_2, α_3, α_4 — действительные положительные числа и $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1$.

118. Доказать, что корни уравнений $z^3-1=0$ и $z^3+1=0$ образуют правильные треугольники. Нарисуйте их.

119. Показать, что комплексное число $w=\frac{1-z}{1+z}$ лежит на мнимой оси и найти его координаты, если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ ($\varphi\neq\pi$).

120. Найти геометрическое место точек плоскости, изображающих комплексные числа z, для которых число $\frac{z-i}{z-1}$: a) действительное; b) чисто мнимое.

121. Известно, что $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$. Найти главное значение аргумента комплексных чисел:

a) $w_1=z^2+z$; b) $w_2=z^2-z$; c) $w_3=z^2+\bar{z}$.

122. Найти целые решения уравнений:

a) $(1-i)^x=2^x$; b) $(1+i)^x=(1-i)^x$.

Решить в комплексных числах следующие уравнения:

123. $\bar{z}=z$. **124.** $\bar{z}=-z$. **125.** $\bar{z}=2-z$.

126. $\bar{z}=-4z$. **127.** $z^2+\bar{z}=0$.

128. $z^2+|z|=0$. **129.** $z^2+|z|^2=0$.

130. $z|z|+2z+i=0$. **131.** $\bar{z}=z^{n-1}$ (n — заданное натуральное число).

132. $z^2=|z^2-5z+2|+3$.

133. $1+z^2+|z+3|=0$.

134. $z^2+z|z|+|z^2|=0$.

Для каждого действительного числа $a\geqslant 0$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

135. $|z|^2+2iz+2a(1+i)=0$.

136. $2|z|-4az+1+ia=0$.

137. Для каждого действительного числа $a\geqslant 1$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$z|z|+az+i=0.$$

138. Для каждого действительного числа a найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$z|z|+az+i=0.$$

Решить в комплексных числах следующие системы уравнений:

139. $\begin{cases} z^3+\bar{w}^7=0, \\ z^5\cdot w^{11}=1. \end{cases}$ **140.** $\begin{cases} z^3+w^5=0, \\ z^2\bar{w}^4=1. \end{cases}$

141. $\begin{cases} z^{13}\cdot w^{19}=1, \\ z^5\cdot w^7=1, \\ z^2+w^2=-2. \end{cases}$

142. Определить, чему равно наибольшее значение площади треугольника, имеющего вершинами точки z_1, z_2, z, если известно, что

$$|z-z_1|=2|z-z_2|, \quad z_1=1, \quad z_2=2.$$

143. Найти наибольшее значение выражения

$$w=\left|z+\frac{1}{z}\right|\left|z-\frac{1}{z}\right|,$$

где $z=x+iy$, если $\arg\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$ и $\arg z\neq 0$.

144. Определить $\arg z$ для всех z, удовлетворяющих условию

$$|z-z_1|=|z-z_2|,$$

где $|z_1|=|z_2|$, z_1, z_2 — заданные комплексные числа, а z — переменное комплексное число.

145. Определить, при каком комплексном z вида $z=x+3xi$ выражение $w=\|z-1-2i|-|z-2-i\|$ будет иметь наибольшее значение.

146. При каких действительных a хотя бы одно комплексное число $z=x+iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z+\sqrt{2}|=a^2-3a+2,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z+i\sqrt{2}|<a^2?$$

147. При каких действительных a любое комплексное число $z=x+iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z-ia|=a+4,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z-2|<1?$$

148. При каких действительных a хотя бы одно комплексное число $z=x+iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z-i\sqrt{2}|=(a+1)^2,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z-\sqrt{2}|>a^2-4a?$$

149. При каких действительных a любое комплексное число $z=x+iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z-ia|=2a,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z-1|>\frac{1}{2}?$$

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

1. Предварительные замечания. 1. *Квадратным трехчленом* называется выражение

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0),$$

графиком соответствующей функции является парабола (Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, часть II). При $a<0$ эта парабола направлена ветвями вниз, при $a>0$ — ветвями вверх.

В зависимости от величины дискриминанта D

$$D=b^2-4ac$$

существуют различные случаи расположения параболы по отношению к оси абсцисс Ox: при $D>0$ существуют две различные точки пересечения параболы с осью Ox (два различных действительных корня трехчлена), при $D=0$ эти точки совпадают (случай кратного корня), при $D<0$ точек пересечения с осью Ox нет (действительных корней нет). В последнем случае, если $a>0$, график параболы целиком лежит выше оси Ox, и если $a<0$ — целиком ниже оси Ox.

Из представления трехчлена по формуле

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

следует, что график квадратного трехчлена получается из графика функции $y=ax^2$ за счет двух параллельных переносов: на величину $-\frac{b}{2a}$ в направлении оси Ox и на величину $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ в направлении оси Oy. Поэтому координаты вершины параболы равны

$$x_b=-\frac{b}{2a}; \quad y_b=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

2. Теорема Виета. *Между корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c и коэффициентами существуют соотношения*

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

С помощью этих соотношений решаются многие задачи и, в частности, исследуются знаки корней (или формулируются условия, определяющие знаки корней) квадратного трехчлена.

Теорема I. *Для того чтобы корни квадратного трехчлена были действительны и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$D=b^2-4ac\geqslant 0, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}>0,$$

при этом оба корня будут положительны, если дополнительно выполняется условие

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0,$$

и оба корня будут отрицательны, если

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0.$$

Теорема II. *Для того чтобы корни квадратного трехчлена были действительны и имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$D=b^2-4ac>0, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}<0,$$

при этом положительный корень имеет большую абсолютную величину, если

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0,$$

если же

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0,$$

то отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

3. Дополнительный материал. При решении многих задач требуется знание трех основных теорем о расположении корней квад-

ратного трехчлена на числовой оси. (П. С. Моденов и С. И. Новоселов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд-во МГУ, 1966, стр. 190.)

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ имеет действительные корни x_1 и x_2, а M — какое-нибудь действительное число. Тогда

Теорема I. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число M (т. е. лежали на числовой оси левее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение следующих условий* (рис. 4,*а* и 4, *б*):

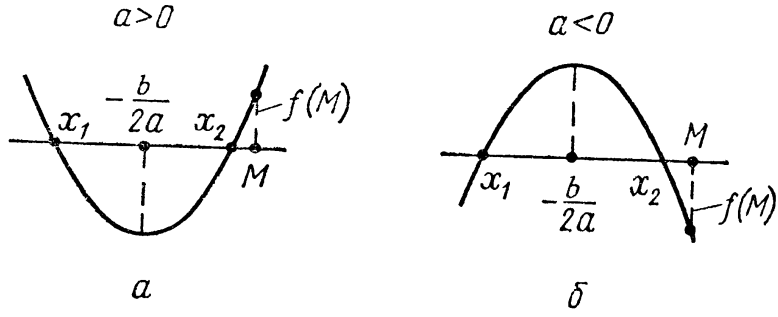


Рис. 4

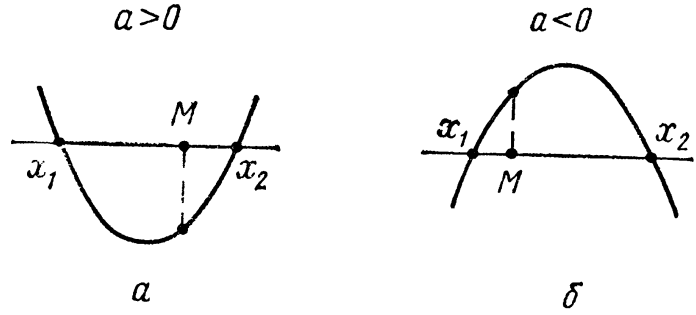


Рис. 5

$$\begin{cases} \text{при } a>0 \\ D\geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a<0 \\ D\geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)<0. \end{cases}$$

Теорема II. *Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число M, а другой больше, чем число M (т. е. точка M лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 5, *а*, *б*):

$$\begin{cases} \text{при } a>0 \\ f(M)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a<0 \\ f(M)>0. \end{cases}$$

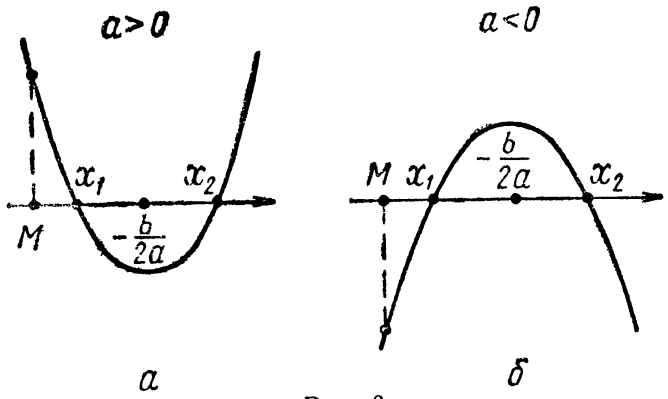


Рис. 6

Теорема III. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M (т. е. лежали на числовой оси правее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 6, *а*, 6, *б*):

$$\begin{cases} \text{при } a > 0 \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a < 0 \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

Во всех вышеприведенных соотношениях $f(M)$ представляет собой выражение $(aM^2 + bM + c)$.

Кроме того, приведем четыре наиболее часто встречающихся следствия из этих утверждений.

Следствие I. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M, но меньше, чем число N (M < N), т. е. лежали в интервале между M и N, необходимо и достаточно* (рис. 7, *а* и 7, *б*)

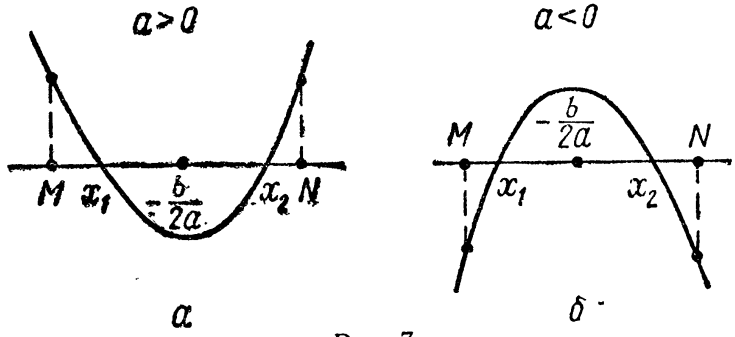


Рис. 7

$$\begin{cases} \text{при } a > 0 \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a < 0 \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

Следствие II. *Для того чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале* MN $(M < N)$, *необходимо и достаточно* (рис. 8, *а* и 8, *б*)

$$\begin{cases} \text{при } a > 0 \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a < 0 \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

(при этом меньший корень лежит вне отрезка $[MN]$).

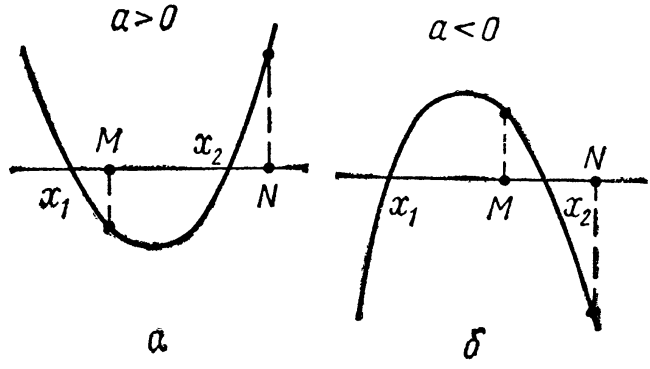


Рис. 8

Следствие III. *Для того чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале* MN $(M < N)$, *необходимо и достаточно* (рис. 9, *а* и 9, *б*):

$$\begin{cases} \text{при } a > 0 \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a < 0 \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$

(при этом больший корень лежит вне отрезка $[MN]$).

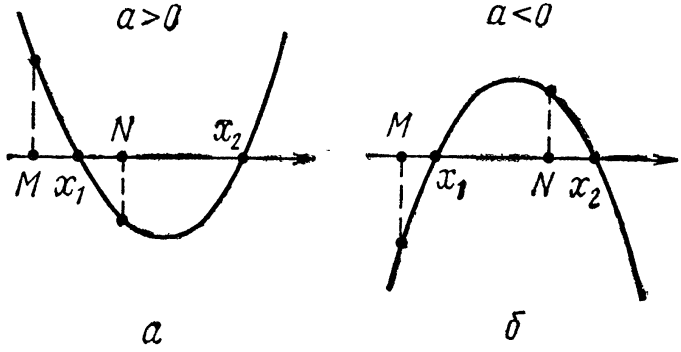


Рис. 9

Следствие IV. *Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем* M, *а другой больше, чем* N $(M < N)$,

т. е. отрезок MN целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно (рис. 10, *а* и 10, *б*)

$$\begin{cases} \text{при } a>0 \\ f(M)<0, \\ f(N)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{при } a<0 \\ f(M)>0, \\ f(N)>0. \end{cases}$$

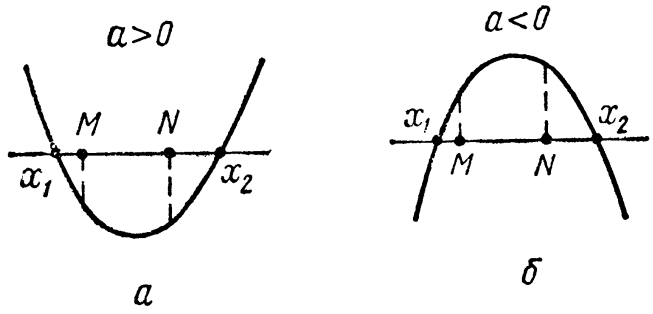


Рис. 10

Эта группа теорем и следствий очень часто применяется при решении задач с параметрами и потому имеет большое значение.

* * *

150. Решить уравнения и неравенства:

a) $x^4+x^2-1<0$, e) $|x^2-2x-8|>5$,

b) $x^4-5x^2+4<0$, f) $(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}$,

c) $x^4-7x^2+6\geqslant 0$, g) $|x^2-2x-3|<3x-3$,

d) $\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}>0$.

151. Построить графики линий, заданных уравнениями:

$y=x^2-3x$, $|x|+|y|=x^2-y^2$,

$y=-x-x^2$, $|y|=x^2-3x+2$,

$y=-3x^2+4x-1$, $|y^2-1|=|x+y|$,

$y^2-y=x+1$, $y-1=3(x+1)^2$.

152. Дано уравнение $x^2+bx+c=0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы

$$y_1=x_1^2+x_2^2; \quad y_2=x_1^3+x_2^3.$$

153. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы

$$y_1=1/x_1; \quad y_2=1/x_2.$$

154. При каких вещественных a корни уравнения

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

таковы, что сумма их квадратов равна $\frac{7}{4}$?

155. При каких вещественных a корни уравнения x_1 и x_2

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

таковы, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 1?$$

156. Для каждого вещественного значения a решить неравенство

$$ax^2 + x + 1 > 0.$$

157. Для каждого вещественного значения a решить неравенство

$$x^2 + ax + 1 > 0.$$

158. Для каждого вещественного значения a решить неравенство

$$x^2 + x + a > 0.$$

159. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$x^2 + |x| + a = 0.$$

160. Для каждого действительного числа a решить неравенство

$$ax^2 + (a+1)x + 1 > 0.$$

161. Найти все действительные значения a, при которых трехчлен

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 1$$

положителен при всех действительных x.

162. Дано квадратное уравнение

$$(m-1)x^2 - (2m-1)x + m + 5 = 0.$$

При каких m это уравнение имеет действительные корни? Исследовать знаки корней.

163. Дано квадратное уравнение

$$(m-3)x^2 - 6x + m + 5 = 0.$$

При каких m это уравнение имеет действительные корни? Исследовать знаки корней.

164. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$(a-2)\,x^2-2ax+2a-3=0$$

действительны, и определить знаки корней.

165. При каких действительных значениях m корни уравнения

$$3mx^2-(7m+1)\,x+2m+1=0$$

действительны? Исследовать знаки корней.

166. Установить, при каких значениях m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2-mx+m-1=0$$

будет наименьшей.

167. Определить все значения a, при которых уравнения

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имеют хотя бы один общий корень.

168. При каких значениях a корни квадратного трехчлена

$$(2-a)\,x^2-3ax+2a$$

действительны и оба больше $1/2$?

169. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$(2+a)\,x^2-2ax+3a=0$$

будут оба положительными.

170. Найти все те значения параметра α, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-6\alpha x+(2-2\alpha+9\alpha^2)=0$$

действительны и больше, чем 3.

171. Найти все те значения параметра c, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2+4cx+(1-2c+4c^2)=0$$

действительны и меньше, чем -1.

172. При каких действительных значениях a оба корня уравнения

$$x^2+(2a+6)x+4a+12=0$$

больше -1.

173. При каких действительных значениях a оба корня уравнения

$$(1+a)x^2-3ax+4a=0$$

больше 1.

174. При каких значениях a один из корней уравнения

$$(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$$

больше 1, а другой меньше 1?

175. Существуют ли такие a, что корни уравнения

$$x^2+2x+a=0$$

действительны и различны и оба заключены между -1 и $+1$?

176. При каких k корни уравнения

$$kx^2-(k+1)x+2=0$$

будут действительны и оба по абсолютной величине меньше 1?

177. Найти все те значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-ax+2=0$$

действительны и находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

178. Найти все те значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-2bx-1=0$$

действительны и не превосходят по модулю 2.

179. При каких действительных a корни уравнения

$$4x^2-2x+a=0$$

подчиняются условию $-1<x_1<1$ и $-1<x_2<1$?

180. При каких действительных значениях m неравенство

$$x^2+mx+m^2+6m<0$$

выполняется при всех $1<x<2$?

181. Найти все значения m, для которых неравенство

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

выполнено при всех $x > 0$.

182. При каких значениях y верно следующее утверждение: „существует хотя бы одно значение x, при котором неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}} y^2 - 3 \cdot 2x \log_{\frac{1}{2}} y^2 - x^2 > 0$$

выполняется“?

183. При каких значениях y верно следующее утверждение: „при любом x неравенство

$$x^2\left(2 - \log_2 \frac{y}{y+1}\right) + 2x\left(1 \cdot \log_2 \frac{y}{y+1}\right) - 2\left(1 + \log_2 \frac{y}{y-1}\right) > 0$$

выполняется“?

184. При каких значениях a верно следующее утверждение: „неравенство

$$(a-1)x^2 + (2a-3)x + a - 3 > 0$$

выполняется хотя бы при одном $x < 1$“?

185. При каких значениях a неравенство предыдущей задачи выполняется при всех $x < 1$?

186. Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$

действительны и оба корня больше a.

187. При каких действительных m неравенство

$$x^2 - (3m+1)x + m > 0$$

выполнено для всех $x > 1$?

188. При каких действительных m из неравенства

$$x^2 - (3m+1)x + m > 0$$

следует неравенство $x > 1$?

189. При каких действительных p уравнение

$$\sin^2 x + p \cdot \sin x = p^2 - 1$$

имеет решения?

190. При каких действительных значениях m из интервала $-1 < m < 1$ уравнение

$$4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$$

имеет решения?

191. Установить, существуют ли действительные значения a, при которых неравенство

$$4^{|\cos x|}+2(2a+1)\,2^{|\cos x|}+4a^2-3<0$$

выполняется при всех действительных x.

192. При каких действительных значениях a уравнение

$$\sin^2 x-(a^2+2a)\sin x+a^3+a^2=0$$

имеет решения?

193. Найти все значения a, при которых из неравенства

$$ax^2-x+1-a<0$$

следует неравенство

$$0<x<1.$$

194. Найти все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$ax^2+(1-a^2)\,x-a>0,$$

по модулю не превосходит двух.

195. Найти все значения a, при которых из неравенства

$$x^2-a(1+a^2)\,x+a^4<0$$

следует неравенство

$$x^2+4x+3>0.$$

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

Предварительные замечания. 1. Выражение

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

называется многочленом n-ой степени относительно переменного x. Величины a_0, a_1, ... a_n — коэффициенты многочлена.

Если $p_m(x)$ многочлен, степень которого не выше n, т. е. $m\leqslant n$, то под делением многочлена $p_n(x)$ на многочлен $p_m(x)$ подразумевается тождественное представление первого из них в виде

$$p_n(x)\equiv p_m(x)\,S_{n-m}(x)+R_k(x).$$

Здесь $S_{n-m}(x)$ — многочлен степени $(n-m)$, называемый частным, а $R_k(x)$ — многочлен степени $k<m$, называемый остатком. В частности, при делении $p_n(x)$ на линейный многочлен $(n=1)$, в остатке всегда получается постоянная, называемая, по определению, многочленом нулевой степени.

2. Число x_1 называется корнем многочлена, если оно является решением уравнения $p_n(x)=0$, т. е.

$$p_n(x_1)=a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x_1+a_n=0.$$

Вопрос о существовании корней у многочленов решается теоремой Гаусса.

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). *Всякий многочлен степени большей или равной единице имеет, по крайней мере, один действительный или комплексный корень.*

Если число x_1 является корнем многочлена $p_n(x)$, то этот многочлен делится без остатка на линейный многочлен $(x-x_1)$. С помощью этого утверждения и теоремы Гаусса можно показать, что любой многочлен представляется в виде

$$p_n(x) \equiv a_0 (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \ldots (x-x_s)^{k_s},$$
$$k_1+k_2+\ldots+k_s=n.$$

Здесь x_1, x_2 ..... x_s — корни многочлена, а числа k_1, k_2, ... k_s называются кратностями соответствующих корней.

Представление многочлена $P_n(x)$ в таком виде называется его разложением на линейные множители[1]). Разложение многочлена на линейные множители доказывает следующую теорему.

Теорема. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет ровно n (действительных или комплексных) корней. При этом каждый корень берется столько раз, сколько раз соответствующая ему скобка входит в разложение многочлена на линейные множители, т. е. число раз, равное кратности этого корня.*

Если коэффициенты многочлена действительны, то это не означает еще, что действительны корни многочлена. Поэтому, вообще говоря, нельзя любой многочлен разложить на действительные линейные множители.

Однако для многочлена с действительными коэффициентами, имеющего комплексный корень $x_1=\alpha+\beta i$, можно утверждать (см. задачу № 213), что он обладает также и комплексно-сопряженным корнем $x_2=\bar{x}_1 = \alpha-\beta i$. Перемножая в разложении многочлена скобки вида $(x-x_1)$ и $(x-\bar{x}_1)$

$$(x-x_1)\cdot(x-\bar{x}_1)=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2),$$

получим его разложение на линейные и квадратичные множители, но уже с действительными коэффициентами.

3. Обобщенная теорема Виета. *Для корней x_1, x_2, ..., x_n многочлена $P_n(x)$ имеют место формулы:*

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}a_{n-1}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

---

[1]) Подчеркнем, что некоторые из корней x_i могут быть комплексными числами.

Эти формулы являются обобщением известной теоремы Виета для корней квадратного многочлена. Для того чтобы получить их, достаточно перемножить скобки и собрать члены с одинаковыми степенями неизвестного x в тождестве

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n).$$

При этом нужно учесть, что у двух тождественно равных многочленов равны коэффициенты при одинаковых степенях переменного x.

4. Теорема Безу. Если x_0 — произвольное число, то при делении многочлена $p_n(x)$ на двучлен $(x-x_0)$ получим остаток, равный значению многочлена при $x=x_0$.

Доказательство. Так как $p_n(x) = (x-x_0)\,p_{n-1}(x) + R$, то при $x=x_0$ получаем

$$P_n(x_0) = R,$$

что и составляет утверждение теоремы.

* * *

196. Решить уравнение

$$(x+3)^4 + (x+1)^4 = 20.$$

197. Решить уравнение

$$2x^3 - 3x^2 + 4x + 9 = 0.$$

198. Решить уравнение

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 15x - 14.$$

199. Найти остаток от деления многочлена $x^{100} - x^{50} + 2x^{25} - 4$ на (x^2-1).

200. Найти остаток от деления многочлена $x^{101} + 3x^{15} - x - 1$ на (x^2+1).

201. Найти значения a и b, при которых многочлен $ax^4 + bx^3 + 1$ делится на $(x-1)^2$. Какие корни в этом случае имеет уравнение

$$ax^4 + bx^3 + 1 = 0?$$

202. При каких α и β многочлен $x^{10} + \alpha x^2 + \beta x + 1$ делится на x^2-1?

203. Найти все действительные значения a и b, при которых многочлен x^4+1 делится на $x^2 + ax + b$.

204. Определить a и b так, чтобы многочлен $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делился без остатка на $x^2 - x + b$.

205. При каких a и b многочлен $3x^5 - 4x^2 + ax + b$ имеет число 1 своим двукратным корнем?

206. При каких действительных a многочлен x^3+2x^2+a имеет кратные корни? Найти эти корни.

207. При каких действительных a многочлен x^3+ax^2+2x имеет кратные корни? Найти эти корни.

208. Остаток от деления многочлена на $(x-2)$ равен 5, а от деления на $(x-3)$ равен 7. Найти остаток от деления того же многочлена на выражение $(x-2)\cdot(x-3)$.

209. Остаток от деления многочлена на $(x-a)$ равен A, от деления на $(x-b)$ равен B, от деления на $(x-c)$ равен C. Найти остаток от деления того же многочлена на выражение $(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a\neq b\neq c)$.

210. Найти значения a и b, при которых многочлен x^3+ax+1 делится на $(x-b)$ без остатка и частное от деления больше нуля при всех x.

211. Определить все такие целые числа a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^3+ax^2+bx+12=0$$

равен $1+\sqrt{3}$.

212. В уравнении

$$x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$$

один из корней равен $\sqrt{3}+1$. Найти остальные корни уравнения, если a и b — рациональные числа.

213. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $\alpha+\beta i$, то сопряженное число $\alpha-\beta i$ также является корнем этого многочлена.

214. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

215. Доказать, что всякий рациональный корень уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

где a_1, a_2, $\ldots$, a_n — целые числа, является целым числом.

216. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ (p и q взаимно простые целые числа) представляет собой рациональный корень уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

где a_0, a_1, a_2, ... a_n — целые числа. Доказать, что число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем первого коэффициента.

217. Коэффициенты многочлена равны одному из трех чисел 1, 0, —1. (Часть коэффициентов равна 1, часть 0, часть — 1). Доказать, что всякий действительный корень такого многочлена по модулю меньше двух.

218. Доказать, что если все коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0$ целые нечетные числа, то корни уравнения не могут быть рациональными.

219. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1=x_2\cdot x_3$, $y_2=x_3\cdot x_1$, $y_3=x_1\cdot x_2$.

§ 5. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Предварительные замечания. Система равенств, содержащих неизвестные, называется системой уравнений.

Совокупность значений неизвестных, обращающих каждое уравнение системы в числовое тождество, называется решением системы.

При решении систем применяются последовательные преобразования, заменяющие данную систему некоторой новой. Если все решения одной системы являются решениями другой, то вторая система называется следствием первой. Две системы называются равносильными или эквивалентными, если каждая из них является следствием другой; отсюда следует, что равносильные системы имеют одни и те же решения. При замене данной системы новой возможны три различных случая.

1. Если новая система не является следствием исходной, то возможна потеря решений.

Такие преобразования недопустимы.

2. Если новая система является следствием исходной, но не равносильна ей, то возможно приобретение посторонних решений.

Такие преобразования допустимы, но в конце решения необходима проверка для выявления посторонних решений.

3. Если новая система равносильна исходной, то все их решения совпадают.

В этом случае проверку решений можно не делать.

Отметим, что большинство систем трудно или даже невозможно решить путем выражения одного из неизвестных через другие и исключением его из системы. Обычно удобнее исходя из особенностей конкретной системы найти способ ее решения, заключающийся в комбинации уравнений, введении новых неизвестных, использования свойств ее симметрии и т. д.

* * *

220. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{y}=\dfrac{22}{3}, \\ 9\left(\dfrac{x^2+2y^2}{y}\right)^2=6y^2-22y+9x+478. \end{cases}$$

221. Найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{15}, \\ xy+xz+yz=23. \end{cases}$$

222. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

223. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4y^2}{xy}=5, \\ 2x^2-y^2=31. \end{cases}$$

224. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=8(x-y), \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

225. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+3y=0, \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0. \end{cases}$$

226. Найти решения системы

$$\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$$

227. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4=17\,(x+y)^2, \\ xy=2\,(x+y). \end{cases}$$

228. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ x^4+y^4=\frac{1}{2}\,(x+y). \end{cases}$$

229. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+4xz-4z^2=0, \\ y^2+xy+4yz-8z^2=0, \\ xyz=8. \end{cases}$$

230. Найти действительные решения системы

$$\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4, \\ (y+z)^2-x^2=2, \\ (z+x)^2-y^2=3. \end{cases}$$

231. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y+y^3x=\frac{10}{9}\,(x+y)^2, \\ x^4y+y^4x=\frac{2}{3}\,(x+y)^2. \end{cases}$$

232. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+24=\frac{x^3}{y}, \\ xy-6=\frac{y^3}{x}. \end{cases}$$

233. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xyz+xz^2=2, \\ xy+2xz=-z, \\ x^2yz=-15. \end{cases}$$

234. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2, \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4. \end{cases}$$

235. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2yz=1, \\ y^2-2zx=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$$

236. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=a^4. \end{cases}$$

Найти действительные решения систем:

237. $\begin{cases} x^3+3=2xy, \\ 6x^2-11y^2=10. \end{cases}$ **238.** $\begin{cases} x^2+y-2=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases}$

239. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

240. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-6 \end{cases}$

241. При каких действительных значениях a система имеет единственное действительное решение

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a. \end{cases}$$

Найти действительные решения системы:

242. $\begin{cases} 2x=\dfrac{y}{1+y^2}, \\ 2y=\dfrac{x}{1+x^2}. \end{cases}$ **243.** $\begin{cases} xy(x+y)=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

244. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$ **245.** $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(x-y)=3. \end{cases}$

§ 6. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Предварительные замечания

1°. Уравнения и неравенства, в которых неизвестное входит в какие-либо рациональные функции (многочлен, отношение многочленов), стоящие под знаком радикала, называются иррациональными.

В элементарной алгебре рассматриваются лишь такие иррациональные уравнения и неравенства, в которых имеющиеся радикалы четной степени предполагают арифметическими, а радикалы нечетной степени — вещественными (положительными и отрицательными в зависимости от знака подкоренного выражения).

2°. Уравнения вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x),\quad \sqrt{f(x)}\pm\sqrt{\varphi(x)}=g(x),$$

$$\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{\varphi(x)}=g(x),\quad \sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}=\sqrt{ex+f}$$

обычно решают способом исключения радикалов. Для этого возводят обе части уравнения в некоторую степень с таким расчетом, чтобы уравнение стало рациональным. При этом способе решения, как правило, применяются следующие не эквивалентные преобразования, расширяющие область допустимых значений исходного уравнения:

1. $\sqrt{A}=\sqrt{B}\leftrightarrows A=B$,
2. $A=B\leftrightarrows A^2=B^2$,
3. $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}=C\leftrightarrows\sqrt{AB}=C$,
4. $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=C\leftrightarrows\sqrt{\dfrac{A}{B}}=C$,
5. $(\sqrt{A})^2\leftrightarrows A$.

Получающееся в результате этого способа решения рациональное уравнение, в общем случае, не будет эквивалентно данному. Поэтому в конце решения необходимо сделать проверку.

3°. При решении иррациональных уравнений можно применять способ введения вспомогательных неизвестных. Сущность способа поясним на конкретном примере.

Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$$

Введем обозначения $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt{x+1}=v$, тогда исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} v \geqslant 0, \\ u+v=3, \\ v^2-u^3=3. \end{cases}$$

Выражая v через u из 2-го уравнения и подставляя в 3-е уравнение, получим $u^2-u^3-6u+6=0$ или $(1-u)\times$ $\times(u^2+6)=0$, откуда $u=1$, $x=3$.

4°. Решение иррациональных неравенств нужно начинать с исследования области допустимых значений неизвестного (ОДЗ). Затем необходимо освободиться от иррациональности. При этом важно помнить основное правило решения любых неравенств: совершаемое преобразование должно приводить к неравенству, эквивалентному исходному. В противном случае либо появятся посторонние решения, либо часть решения будет потеряна.

В частности, при возведении обеих частей неравенства в квадрат получается эквивалентное неравенство с тем же знаком только в том случае, если обе части неравенства неотрицательны (больше или равны нулю).

5°. Иррациональное неравенство вида $\sqrt[2n]{\varphi(x)} > f(x)$ эквивалентно совокупности двух систем неравенств

1. $\begin{cases} f(x) < 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) > [f(x)]^{2n}. \end{cases}$

Иррациональное неравенство вида $\sqrt[2n]{\varphi(x)} < f(x)$ эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) < [f(x)]^{2n}. \end{cases}$$

* * *

Следующие уравнения решить способом исключения радикалов:

246. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$.

247. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$.

248. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.

249. $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{7x^2+8}+\sqrt{2x^2-3x+2}=0.$

250. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2.$

251. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}.$

252. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$

253. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{34+x}-\sqrt{7+x}.$

254. $\sqrt{4x-1}-\sqrt{x-2}=3.$

255. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}.$

Решить иррациональные уравнения, приведя их к квадратному относительно некоторых комбинаций неизвестного:

256. $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(x+27)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(x+27)}.$

257. $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33.$

258. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2.$

259. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}.$

260. $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=4.$

Следующие уравнения можно решить способом введения вспомогательного неизвестного:

261. $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5.$

262. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$

263. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

264. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$

265. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2.$

266. $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5.$

267. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$

268. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8.$

269. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}.$

270. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

271. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1.$ 272. $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3.$

273. $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$

274. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$.

Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения:

275. $x+\sqrt{1-x^2}=a$. 276. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

277. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a$.

278. $\sqrt{x^2-1}+x=a$. 279. $x^2+\sqrt{a+x}=a$.

280. $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2$. 281. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=a$.

В следующих иррациональных уравнениях удобно ввести вспомогательное неизвестное на определенном этапе решения:

282. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

283. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^3}$.

284. $\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$.

285. $\sqrt{x-2}=\frac{5x^2-10x+1}{x^2+6x+11}$.

Решить иррациональные неравенства:

286. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$. 287. $\frac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1$.

288. $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$. 289. $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$.

290. $\sqrt{x^2-3x+2}-3-x>0$.

291. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$.

292. $\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\geqslant x-1$. 293. $\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{1+2x}-1$.

294. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$. 295. $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\geqslant 1$.

296. $\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2}\geqslant x$.

297. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1$.

298. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{x+4}$.

299. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

300. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

301. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2}-x-1)\geqslant 1$.

302. $\log_a(\sqrt{25-x^2}-1)\geqslant \log_a(|x|+1)$.

303. $\sqrt{4-x^2}+x+1>0$. **304.** $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$.

305. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

306. $\sqrt{x^2+2x-15}+\sqrt{x^2-8x+15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

307. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}<\sqrt{9x^2+12x+4}$.

308. $2x-3<2\sqrt{x^2-9}$. **309.** $x+\frac{9}{8}>\sqrt{x+1}$.

310. $x+1>\sqrt{2+x}$. **311.** $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$.

312. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}>1$. **313.** $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$.

314. $\sqrt{x+5}>\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}$.

315. $\sqrt{\sqrt{x}+5}-\sqrt{x}<2$.

316. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<4$.

317. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}<\sqrt{x}$. **318.** $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}>\frac{1}{3}$.

319. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>\sqrt{x}$.

320. $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}>2x-1$.

321. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$.

322. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$. **323.** $x-4<\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}$.

324. $\sqrt{(x+2)(x-5)}>8-x$.

Для каждого вещественного a решить неравенства:

325. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$. **326.** $\sqrt{2ax-x^2}\geqslant a-x$.

327. $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$. **328.** $\sqrt{1-x^2}<a-x$.

Решить следующие системы уравнений:

329. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy},\\ x+y=10.\end{cases}$ **330.** $\begin{cases}7\sqrt[3]{x\cdot y}-3\sqrt{x\cdot y}=4,\\ x+y=20.\end{cases}$

331. $\begin{cases} x=\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}, \\ y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}, \\ z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}, \end{cases}$ где $\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0, \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}>\frac{1}{b}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}. \end{cases}$

332. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a, \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2, \quad a>0. \end{cases}$

333. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4. \end{cases}$

§ 7. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Предварительные замечания. 1. Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Эта функция определена для любых x и всегда положительна $a^x>0$. При преобразовании показательных выражений используются следующие свойства:

1) $a^x a^y=a^{x+y}$,
2) $a^x:a^y=a^{x-y}$,
3) $a^{mx+n}=(a^x)^m a^n$,
4) $(ab)^x=a^x b^x$.

При решении показательных неравенств нужно делать различие между свойствами показательной функции с основанием большим единицы и меньшим единицы.

Неравенство $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}$ при $a>1$ равносильно неравенству $f(x)>\varphi(x)$.

Неравенство $a^{f(x)}>a^{\varphi(x)}$ при $0<a<1$ равносильно неравенству $f(x)<\varphi(x)$.

2. Логарифмом числа x $(x>0)$ по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени y, в которую надо возвести a, чтобы получить x.

Запись $y=\log_a x$ означает, что $a^y=x$. Отсюда следует основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a x}=x.$$

Логарифмическая функция определена только для положительных x, но сама может принимать как поло-

жительные, так и отрицательные значения. При преобразовании логарифмических выражений используются следующие свойства логарифмической функции

1) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

3) $\log_a x^k = k \log_a x$.

При решении логарифмических уравнений для перехода к новому основанию используются формулы

4) $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$,

5) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,

6) $\log_{a^k} y = \frac{1}{k} \log_a y \quad (k \neq 0)$.

Здесь всюду $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

3. При решении логарифмических уравнений и неравенств нужно следить за равносильностью совершаемых преобразований и, в частности, за сохранением области допустимых значений неизвестного. Вышеприведенные формулы в общем случае не обеспечивают этих требований, например, левая часть равенства

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

определена при $xy > 0$ (т. е. $x > 0$, $y > 0$ или $x < 0$, $y < 0$), тогда как правая часть допускает только положительные значения x и y. При преобразовании логарифма произведения в сумму логарифмов по этой формуле сужается область допустимых значений, что может привести к потере решений. Наоборот, при преобразовании суммы логарифмов в логарифм произведения по этой формуле возможно расширение области допустимых значений и приобретение посторонних решений. Аналогичные замечания относятся и к остальным формулам.

Для преобразования логарифма произведения, частного и степени можно пользоваться формулами

1) $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$,

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $\frac{x}{y} > 0$,

3) $\log_a x^k = k \log_a |x|$, x — любое число, кроме нуля, k — четное число.

Однако эти формулы также не являются универсальными, так как они приводят к расширению области допустимых значений. Поэтому при решении уравнений необходима проверка для выявления посторонних корней.

4. В случае решения неравенств проверка трудно выполнима и поэтому необходимо выполнять лишь равносильные преобразования.

В ходе решения логарифмических неравенств нужно делать различие между свойствами логарифмической функции с основанием большим единицы и меньшим единицы.

Неравенство $\log_{a(x)} \varphi(x) > m$ равносильно совокупности двух независимых систем:

$$\begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < \varphi(x) < [a(x)]^m; \end{cases} \qquad \begin{cases} a(x) > 1, \\ \varphi(x) > [a(x)]^m. \end{cases}$$

* * *

334. Упростить выражения, освободившись от логарифмов:

а) $2^{\log_2 1\sqrt{2}\,15}$, b) $\left(\frac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$, c) $343^{1-\log_{49} 13}$, d) $a^{\frac{\lg \lg c}{\lg a}}$,

e) $4^{\log\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)^a}$.

335. a) Зная, что $\log_7 2 = a$, найти $\log_{\frac{1}{2}} 28$;

b) зная, что $\log_{ab} a = 4$, найти $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}}$;

c) зная, что $\log_{12} 27 = a$, найти $\log_6 16$.

336. Дано $\lg 2 = a$, $\lg 13 = b$, найти $\log_5 3{,}38$.

337. Дано $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 11 = b$, найти $\log_{275} 60$.

338. Дано $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$, найти $\log_{175} 56$.

339. Доказать формулу $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$ $(b > 0,\ a > 0,\ c > 0;\ a \neq 1)$.

340. Дано $a^2 + b^2 = c^2$. Доказать

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

341. Пусть $a > 0$, $c > 0$, $b = \sqrt{ac}$, a, c и ac не равны 1; $N > 0$. Доказать

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}.$$

342. Доказать, что

$$\log_{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

343. Доказать тождество

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a,$$
$$b \neq 1,\ c \neq 1,\ d \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$$

Решить показательные уравнения:

344. $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0.$

345. $5 \cdot 2^{3(x-1)} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0.$

346. $2^{x+2} + 2 \cdot 3^{x+1} = 8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x.$

347. $2\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right)^2 - 7\,\frac{7^x + 7^{-x}}{2} + 3 = 0.$

348. $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1.$

349. $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x = 4.$

350. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x.$

Уравнения вида $(a^x)^2 + p \cdot a^x \cdot b^y + q\,(b^y)^2 = 0$ могут быть сведены к квадратному уравнению относительно $t = \frac{a^x}{b^y}$. Пользуясь этим, решить уравнения:

351. $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0.$

352. $3 \cdot 9^x - 29 \cdot 6^{x-1} + 2^{2x} - 1 = 0.$

353. $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x.$ **354.** $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}.$

Найти все решения уравнений:

355. $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$

356. $(x+4)\,3^{1-|x-1|} - x = (x+1)\,|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1.$

357. $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}.$

Решить неравенства:

358. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x.$ **359.** $4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2} + 1 \geqslant 0.$

360. $4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$ **361.** $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}.$

362. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)} < 1.$

363. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$

364. Упростив $2^{15\log_2\sqrt{2}\sqrt{3}}$, решить неравенство

$$x^3 > 2^{15\log_2\sqrt{2}\sqrt{3}} \cdot 3^{\log_{\sqrt{x}} 3}.$$

365. Упростив $7^{\log_{\sqrt[3]{7}} 5}$, решить неравенство

$$x^4 \cdot 7^{\log_{\sqrt[3]{7}} 5} \leqslant 5^{-\log_{\frac{1}{x}} 5}.$$

366. Упростив $(25)^{\frac{1}{\log_3 5}}$, решить неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}.$$

Используя свойства показательной функции с основанием большим единицы и меньшим единицы, решить неравенства:

367. $(x^2+x+1)^x < 1$. **368.** $(x^2+x+1)^{x^2-\frac{x}{2}} < 1$.

369. $(x^2-x+1)^x < 1$. **370.** $|x|^{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}} < 1$.

371. $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

Решить логарифмические уравнения:

372. $\log_3(4^x+15\cdot 2^x+27) - 2\log_3(4\cdot 2^x-3) = 0$.

373. $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$.

374. $\log_2\left(9^x + 3^{2x-1} - 2^{x+\frac{1}{2}}\right) = x + 3{,}5$.

375. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3 - \log_2(3^x-13) = 3\log_{\sqrt{\frac{5}{25}}} 5 + 4$.

376. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3) = 6$.

377. $\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1) = 2x-1$.

Используя основное логарифмическое тождество, решить уравнения:

378. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.

379. $4^{\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3(2x^2-1)}$.

380. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$.

Решить логарифмические уравнения:

381. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$

382. $\frac{1}{2}\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1.$

383. $\sqrt{2\left|\log_2\left(\frac{x^2}{64}\right)-1\right|\,[2+\log_4(8x)]}=\log_2(2x).$

384. $2\log_2\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}\log_2 2\sqrt{2x}=1.$

385. $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4.$

386. $\log_{x+1}(x^2+x-6)=4.$

387. $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3)=2\log_8 4+\log_2\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

Используя формулы перехода к новому основанию, решить уравнения:

388. $\log_{0,5}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0.$

389. $\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$

390. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\frac{2}{\log_4 x}.$

391. $\sqrt{\log_x\sqrt{7x}}\cdot\log_7 x=-1.$

392. $\sqrt{\log_x ax}\log_a x=-\sqrt{2}.$

393. $2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0\quad(a\neq 1).$

394. $(\log_a^2 x+2)\log_{a^2x}a=\log_x a\cdot\log_a\frac{x^2}{a}.$

Найти все решения уравнений:

395. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$

396. $\log_3(\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|)=\log_9(4\sqrt{x}-3+4|\sqrt{x}-1|).$

397. $\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|).$

398. $\log_4(6+\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|)=\frac{1}{2}+\log_2(\sqrt{x}-|\sqrt{x}-2|).$

Решить неравенства:

399. $\log_4(2x^2+3x+1)\leqslant\log_2(2x+2).$

400. $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4.$

401. $\log_2(2-x)-\log_2(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3.$

402. $\log_2(x-3)(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3.$

403. $\log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{2}} (x+2) > -\log_{\frac{1}{2}} 4.$

404. $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) > \log_2 (2-x).$

405. $2\log_2 (x-1) - \log_2 (2x-4) > 1.$

406. $\log_4 (2x^2+x+1) - \log_2 (2x-1) \leqslant -\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}.$

407. $2\log_4 x - \frac{1}{2}\log_2 (x^2-3x+2) \leqslant \cos \frac{4\pi}{3}.$

408. $\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$

409. $\log_2 (\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0.$

410. $\log_2 (2^x-1) \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1}-2) > -2.$

411. $\log_{\frac{1}{2}} (5^x-1) \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x-1} > 2.$

412. $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} < 0.$

413. $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}.$

414. $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4}\right)^2 - 20\log_2 x + 148 < 0.$

415. $1 - \sqrt{1-8(\log_{\frac{1}{8}} x)^2} \leqslant 3\log_{\frac{1}{4}} x.$

416. $\left[\log_{\frac{1}{7}} (x^2-5x+2)\right]^{\frac{1}{2}} < 1.$

417. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$

418. $\frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$

419. $\frac{\sqrt{\log^2_{0,5} x - 8} + 2}{\log_{0,5} x - 1} < 1.$

420. $\frac{\log_a (26-x^3)}{\log_a (4-x)} > 3, \quad 0 < a \neq 1.$

421. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} > 1.$

Используя свойства логарифмической функции с основанием большим единицы и с основанием меньшим единицы, решить неравенства:

422. $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$.

423. $\log_{x^2} \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \frac{1}{2}$.

424. $\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x (2x^3)}$.

425. $\log_x [\log_2 (4x-6)] \leqslant 1$.

426. $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

427. $\log_{x+6} 2 \log_2 (x^2 - x - 2) \geqslant 1$.

428. Упростив $\log^2_{2\sqrt{2}} \frac{1}{4}$, решить неравенство

$$\log_3 (7-x) \leqslant \frac{9}{16} \log^2_{2\sqrt{2}} \frac{1}{4} + \log_{7-x} 9.$$

Решить системы уравнений:

429. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1$.

430. $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-y}, \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x-y) = 4. \end{cases}$

431. $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-y}, \\ 3^{\log_9 x} = \frac{y}{3}. \end{cases}$

432. $\begin{cases} 2^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

433. $\begin{cases} \log_9 (x^2+1) - \log_3 (y-2) = 0, \\ \log_2 (x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2. \end{cases}$

434. $\begin{cases} \log_3 (2x-y+2) = 2, \\ \log_2 (x+y) - \log_{\sqrt{2}} (y+1) = -1. \end{cases}$

435. $\begin{cases} \log_9 (x^2+2) + \log_{81} (y^2+9) = 2, \\ 2\log_4 (x+y) - \log_2 (x-y) = 0. \end{cases}$

436. $\begin{cases} (x-y)^{\lg\left(x+\frac{3}{2}\right)} = 0{,}2, \\ \sqrt[\lg (x-y)]{2x+3} = 0{,}1. \end{cases}$

437. $\begin{cases} x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 13, \\ 2\log_6 x + \log_6 y = 3. \end{cases}$

438. $\begin{cases} \log_2 \frac{x^2 \sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$

439. $\begin{cases} x^x = 2^y, \\ \log_4 y - \log_4 x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

440. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18, \\ \log_{\frac{1}{3}} (x+y) = -1. \end{cases}$

441. $\begin{cases} \log_4 x + 2\log_4 y = 0, \\ y^2 + 36x = 13 \end{cases}$

442. $\begin{cases} \log_2\left(1 - \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_2 y, \\ \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x + \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} y = 4. \end{cases}$

443. $\begin{cases} |x|^{|y|} = |y|^{|x|}, \\ \left|\frac{2}{x}\right|^{\left|\frac{1}{y}\right|} + 2|y|^{\left|\frac{1}{y}\right|} = 3. \end{cases}$

444. $\begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3. \end{cases}$

445. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

446. $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m, \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n. \end{cases}$

447. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

448. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

Указать все значения a, при которых уравнения имеют решения, и найти все соответствующие решения:

449. $\log_a x \cdot |\log_x a - \log_2 a| = \log_x ax - \log_2 a^2 + \log_a x \cdot \log_2 a$.

450. $\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10\left(\lg 10a - \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right)$.

451. $\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a\,|a + \log_a x| = a \log_x a$.

452. $2|\lg(ax)|\log_x 10 = (4\lg a - 3)\lg_{x^2} 10 - \frac{1}{2}\lg x$.

453. $\log_{\sqrt{x}} a\left|\log_a \frac{x}{2}\right| = \log_{a^2} 2 \cdot \log_{\sqrt{x}} a^2 - \log_a \sqrt{x}$.

454. $\log_{\sqrt{x}} a^2\left|\log_{a^2} \frac{x}{2}\right| + \log_a x = \log_{a^2} 4 \cdot \log_{\sqrt{x}} a$.

§ 8. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

А. Прогрессии

Предварительные замечания. 1. Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это постоянное число называется разностью прогрессии, а числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Таким образом, если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть арифметическая прогрессия, то по определению $a_{k+1} = a_k + d$, где $k = 1, 2, \ldots$, а d — разность прогрессии.

Всякий член арифметической прогрессии выражается формулой $a_k = a_1 + (k-1)d$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

2. Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этой последовательности. Это постоянное число называется знаменателем прогрессии, а числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Таким образом, если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, то по определению

$$a_{k+1} = a_k q,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$, а q — знаменатель прогрессии. Всякий член геометрической прогрессии выражается формулой

$$a_k = a_1 q^{k-1}.$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

Если члены арифметической или геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют соотношениям $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ $(a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots)$, то прогрессия называется возрастающей (убывающей).

3. Геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечно убывающей, если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы: $|q| < 1$. Величины $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$ называются частными суммами последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. В частности, для геометрической прогрессии они имеют вид:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}, \quad \ldots, \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad \ldots,$$

Если $|q|<1$, то существует предел последовательности частных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ и он равен $\frac{a_1}{1-q}$. Этот предел называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, что записывается иногда так:

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots=\frac{a_1}{1-q}.$$

Следует помнить, что равенство $S=a_1/(1-q)$ есть теорема, а равенство $S=\lim S_n$ — определение.

Если $|q|\geqslant 1$, то последовательность S_n не имеет предела.

* * *

455. При каких x три числа: $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\lg(2^x+3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

456. В арифметической прогрессии для любых m и $n\neq 1$

$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Доказать, что

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

457. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

458. В арифметической прогрессии даны ее члены $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n.

459. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

460. Доказать, что если котангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то квадраты сторон треугольника также составляют арифметическую прогрессию.

461. Доказать, что три числа $\frac{\sin\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ составляют геометрическую прогрессию только при

$$\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \quad \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

462. Доказать, что если a, b, c есть соответственно

k-й, n-й, m-й члены как арифметической, так и геометрической прогрессий, то

$$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=1.$$

463. Найти геометрическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 26, а сумма квадратов этих же членов равна 364.

464. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в n раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

465. Найти две прогрессии — арифметическую и геометрическую, удовлетворяющие следующим условиям: 1) первые члены этих прогрессий равны; 2) сумма первых двух членов арифметической прогрессии больше суммы первых двух членов геометрической прогрессии на утроенный первый член; 3) суммы первых трех членов обеих прогрессий равны.

466. Найти трехзначное число по следующим условиям: 1) его цифры составляют арифметическую прогрессию; 2) если к нему прибавить 396, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке; 3) если первую цифру искомого числа уменьшить на 1, вторую цифру также уменьшить на 1, а третью увеличить на 3, то получится геометрическая прогрессия.

467. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен отношению суммы квадратов ее членов к сумме членов, а сумма кубов ее членов, поделенная на первый член, так относится к сумме квадратов ее членов, как 6:7.

468. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна $\frac{108}{13}$. Найти сумму первых 5-ти членов этой прогрессии.

469. Найти все комплексные числа x и y такие, что числа x, $x+2y$, $2x+y$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+5$, $(x+1)^2$ образуют геометрическую прогрессию.

470. Найти действительную геометрическую прогрессию, если известно, что сумма первых ее 4-х членов равна 15, а сумма их квадратов равна 85.

471. Из полного бака, содержащего 729 $л$ чистой кислоты, отлили a литров и долили бак водой. После полного перемешивания (до получения однородного раствора) из

бака опять отлили a литров раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того, как такая операция была повторена шесть раз, жидкость в баке содержала 64 $л$ чистой кислоты. Определить величину a.

472. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, обладающую тем свойством, что ее сумма в 2 раза больше суммы k первых членов.

473. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + A = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + B = 0$. Известно, что числа $x_1, x_2, x_3 x_4$, (в указанном порядке) составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Найти A и B.

474. Три брата, возраст которых образует геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально своему возрасту. Если бы они это проделали через три года, когда самый младший окажется вдвое моложе самого старшего, то младший получил бы на 105, а средний — на 15 *руб* больше, чем сейчас. Сколько лет каждому из братьев?

475. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^4 = y^4 + z^4, \\ xyz = 8, \end{cases}$$

зная, что логарифмы $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ образуют геометрическую прогрессию.

476. Пусть числа $a_1 a_2 \ldots a_n$ составляют геометрическую прогрессию. Зная суммы

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

найти произведение $P = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Б. Метод математической индукции

Предварительные замечания. Доказательства посредством применения математической индукции основаны на принципе полной индукции, являющемся одной из аксиом в теории натуральных чисел. Общая формулировка этой аксиомы такова: если некоторое предложение A верно для $n = 1$ и если из предположения о том, что оно верно для натурального числа $n = k$ $(k > 1)$, вытекает, что A верно и для $n = (k + 1)$, то предложение A верно для любого натурального числа.

Применение метода математической индукции для доказательства заданного утверждения сводится к следующему:

1. Проверка того, что доказываемый факт имеет место при $n=1$ или при любом другом фиксированном натуральном числе.

2. Предположение, что заданное утверждение верно при некотором $n=k$ $(k>1)$.

3. Доказательство того, что это утверждение справедливо при $n=k+1$.

4. Заключение, что доказываемое утверждение верно на основании принципа полной индукции для любого натурального k.

Подчеркнем здесь, что метод математической индукции удобно использовать для доказательства уже заданных утверждений.

* * *

476. Доказать, что n^3+3n^2+5n+3 при любом натуральном n делится на 3.

478. Доказать, что если n — натуральное число, то $4^n+15n-1$ делится на 9.

479. Доказать, что при любом целом n число n^7-n делится на 7.

480. Доказать, что если p есть простое число, то при всяком целом n разность n^p-n делится на p (теорема Ферма).

481. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

482. Доказать, что при нечетном $n>1$ выражение n^3-n делится на 24.

483. Доказать, что при любом целом n выражение n^7-n делится на 42.

484. Доказать, что выражение $5^{n+3}+11^{3n+1}$ делится на 17 при всяком натуральном n.

485. Доказать, что при любом целом $n\geqslant 0$ выражение $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

486. Доказать, что при всяком натуральном значении n выражение $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11.

487. Доказать, что выражение $7^{2n}-4^{2n}$ делится на 33 при любом натуральном n.

Использовать метод математической индукции для доказательства тождеств (488—496).

488. Доказать, что для всякого натурального числа n

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

489. Доказать, что для всякого натурального числа n

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

490. Доказать, что для всякого натурального числа n

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

491. Доказать справедливость тождества при любом натуральном n

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{12}(3n^4+6n^3+3n^2)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

492. Доказать справедливость тождества при любом натуральном n

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

493. Доказать, что для всякого натурального числа n

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

494. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

495. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

496. Доказать, что

$$(1\cdot 2\ldots p)+[2\cdot 3\ldots p(p+1)]+\ldots+$$
$$+[n(n+1)\ldots(n+p-1)]=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}.$$

Использовать метод математической индукции для доказательства тригонометрических тождеств (497—505).

497. Доказать формулу Муавра $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$, где n — натуральное число.

498. Доказать, что

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

для любого натурального n и при условии, что $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$.

499. Доказать, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}=2\sin\frac{n\pi}{6}\cdot\sin\frac{n+1}{6}\pi.$$

500. Доказать тождество

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ \ldots\ \cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha},$$

где n — натуральное число, $\sin\alpha\neq 0$.

501. Доказать, что

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

502. Доказать, что

$$\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\ldots+n\cos n\alpha=$$
$$=\frac{(n+1)\cos n\alpha-n\cos(n+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

503. Доказать, что

$$\operatorname{arc\,ctg}3+\operatorname{arc\,ctg}5+\ldots+\operatorname{arc\,ctg}(2n-1)=$$
$$=\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}\operatorname{tg}1.$$

504. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

505. Доказать, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Использовать метод математической индукции для доказательства неравенства (505—516).

506. Доказать, что при натуральном $n\geqslant 5$ справедливо неравенство

$$2^n>n^2.$$

507. Доказать, что при натуральном $n\geqslant 3$ справедливо неравенство

$$2^n>2n+1.$$

508. Доказать, что $2^n>n^3$ для натуральных n не меньше 10.

509. Доказать, что при любом целом $n > 1$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4n}{n+1}.$$

510. Доказать, что при любом целом $n > 2$

$$n! > 2^{n-1}.$$

511. Доказать, что при любом целом $n > 2$

$$2^n n! < n^n.$$

512. Доказать, что при любом натуральном n

$$(2n)! < \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{2n}.$$

513. Доказать, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, где n — натуральное число, большее единицы.

514. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, где n — любое натуральное число, большее единицы.

515. Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n < 2^n (a^n + b^n).$$

516. Доказать, что $|\sin n\alpha| \leqslant n |\sin \alpha|$, где n — натуральное число, большее единицы.

§ 9. ТЕКСТОВЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Успешное решение большинства текстовых задач зависит от разумного выбора неизвестных. Поэтому при решении надо обращать внимание на то, почему переменные следует выбирать именно так, а не иначе. При этом не всегда то число, которое будет стоять в ответе, должно фигурировать как одно из неизвестных с самого начала. Надо вводить неизвестные так, чтобы через них легко записывались условия задачи.

Если при выборе неизвестных какая-либо величина принимается за единицу (длина, время, работа и т. д.), то необходимо убедиться, что в условии задачи нигде не встречается величина с той же размерностью. В противном случае такой выбор может привести к ошибке.

При составлении системы уравнений надо сначала записать все уравнения системы в том виде, в котором

они получаются из условия, не преобразовывая их. Может оказаться, что в исходной системе удобно ввести новые переменные, в результате чего система значительно упростится. Например, если x во всех уравнениях (или почти во всех) встречается в определенной комбинации с y $\left(\text{например, в комбинации } \frac{x}{y} \text{ или др.}\right)$, то удобно ввести новую неизвестную $u=\frac{x}{y}$ вместо x. Не пытайтесь из трех уравнений найти четыре неизвестных. Надо либо получить из текста еще условие (независимо от предыдущих), либо исключить одно из неизвестных (например, при указанном выше способе неизвестную x можно исключить из рассмотрения). В частности, каждое из уравнений

$$\frac{Ax+By}{A_1x+B_1y}=0; \qquad \frac{Ax^2+Bxy+Cy^2}{A_1x^2+B_1xy+C_1y^2}=0$$

позволяет определить отношение неизвестных $\frac{x}{y}$

$$\frac{A\frac{x}{y}+B}{A_1\frac{x}{y}+B_1}=0; \qquad \frac{A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C}{A_1\left(\frac{x}{y}\right)^2+B_1\left(\frac{x}{y}\right)+C_1}=0.$$

Если приходится отбрасывать некоторые корни, полученные в результате решения системы уравнений, то это необходимо делать исходя только из условий задачи, но не из соображений здравого смысла.

* * *

517. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход покрывает в полтора раза быстрее, чем катер, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 *км*. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

518. Два туриста вышли из A в B одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходит на 5 *мин* быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 *мин*, снова пошел в B. При этом в B оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 *час*?

519. Пассажир, едущий из города A в город B, половину затраченного на путь времени ехал в автобусе, а половину в автомашине. Если бы он весь путь от A до B проехал в автобусе, то это заняло бы у него в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходит путь от A до B автомашина, чем автобус (предполагается, что скорости автобуса и автомашины постоянны)?

520. Из пункта A в пункт B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, а пока его чинили 20 *мин*, лодку снесло вниз по реке. Определить, насколько позднее прибыла лодка в пункт B, если известно, что обычно путь из A в B лодка проходит в полтора раза дольше, чем путь из B в A.

521. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, причем первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 1 *час* быстрее второго. На сколько минут раньше произошла бы встреча автобусов, если бы скорость второго автобуса увеличилась и стала бы равной скорости первого автобуса?

522. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Они шли каждый со своей постоянной скоростью и встретились в 4 *км* от пункта B. Достигнув соответственно пунктов A и B, туристы немедленно повернули обратно и встретились в 2 *км* от пункта A. Вторая встреча произошла через 2 *час* после первой. Найти скорости движения туристов и расстояние между пунктами A и B.

523. Из пункта A в пункт B против течения реки на лодке отправилась группа туристов, которая проплыла это расстояние за 6 *час*. Обратно часть группы возвращалась на лодке, а часть на плоту. Лодка прибыла в пункт A на 4 *час* раньше, чем плот. Сколько часов плыла лодка из пункта B в пункт A?

Примечание. Скорость плота относительно берега считается равной скорости течения.

524. Переднее колесо повозки на некотором пути сделало на 1000 оборотов больше заднего. Если бы длина окружности переднего колеса была в полтора раза больше, то на том же пути оно сделало бы на 200 оборотов больше заднего колеса. Чему равны длины окружностей колес, если известно, что длина окружности заднего колеса на 1,5 *м* больше длины окружности переднего колеса?

525. Два тела движутся по окружности равномерно

и в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *сек* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *сек*. За какое время каждое тело проходит окружность?

526. Для того чтобы из пункта A попасть в пункт B, нужно часть пути от пункта A до пункта C проехать на поезде, а остальные 15 *км* от C до B — на автобусе. Вся поездка от A до B занимает 1 *час* 15 *мин*, причем автобус отправляется сразу после прихода поезда, а временем, которое поезд и автобус тратят на остановки, можно пренебречь. По ошибке пассажир сошел с поезда на остановку раньше, прошел оставшийся путь до C длиной 5 *км* пешком со скоростью 4 *км/час*, а затем еще 20 *мин* ждал автобуса и в результате попал в пункт B на 1 *час* 30 *мин* позже намеченного срока. Найти расстояние от A до C, если известно, что скорость поезда вдвое больше скорости автобуса.

527. Расстояние между пунктами A и C равно 30 *км*. Из пункта A по направлению к C вышел лыжник, двигающийся со скоростью 10 *км/час*. Через 15 *мин* навстречу ему из пункта C должен был выйти другой лыжник с тем, чтобы, двигаясь с постоянной скоростью, встретиться с первым на середине пути. Однако второй лыжник вышел с опозданием на 55 *мин*, вследствие чего встреча произошла в другом пункте B. Чему равно расстояние от A до B?

528. Колонна мотоциклистов с интервалом между соседними машинами 50 *м* движется со скоростью 15 *км/час*. В противоположном направлении вдоль колонны (от первой машины) едет велосипедист. Поравнявшись с 45-м мотоциклистом, он увеличивает свою скорость на 10 *км/час*, доезжает до последнего мотоциклиста, поворачивает и с той же увеличенной скоростью догоняет первую машину. Если бы велосипедист все время (с самого начала) двигался с этой увеличенной скоростью, то он вернулся бы к голове колонны на 15/8 *мин* раньше.

Найти первоначальную скорость велосипедиста (длины велосипеда, мотоцикла и время поворота велосипедиста не учитываются).

529. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 78 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста (соответственно P_A и P_B) и встретились через 3,9 *час*.

Через сколько часов встретятся эти же велосипедисты, если они выедут из тех же пунктов одновременно навстречу

друг другу и если скорость велосипедиста P_A увеличится вдвое, а скорость велосипедиста P_B уменьшится на 2 *км/час*. Известно, что скорость велосипедиста P_A меньше 9 *км/час*, а точка второй встречи велосипедистов отстоит от точки первой встречи на 16,8 *км* в сторону пункта B.

530. Пункт A находится на реке выше пункта B. В одно и то же время из пункта A отплыли вниз плот и первая моторная лодка, а из пункта B — вверх вторая моторная лодка. Через некоторое время лодки встретились в пункте C, а плот за это время проплыл третью часть AC.

Если бы первая лодка без остановки доплыла до пункта B, то плот за это время прибыл бы в пункт C. Если бы из пункта A в пункт B отплыла вторая лодка, а из пункта B в пункт A — первая лодка, то они встретились бы в 40 *км* от пункта A.

Какова скорость обеих лодок в стоячей воде, а также расстояние между пунктами A и B, если скорость течения равна 3 *км/час*?

531. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 100 *км* от A, в один и тот же момент времени выехал велосипедист и вышел пешеход. Одновременно с ними им навстречу из пункта B выехал автомобилист. Через час после начала движения автомобилист встретил велосипедиста и затем, проехав еще 14/17 *км*, встретил пешехода, посадил его в машину, после чего они отправились вдогонку за велосипедистом и настигли его.

Вычислить скорости, с которыми двигались велосипедист и автомобилист, если известно, что скорость пешехода равна 5 *км/час* (время, необходимое на посадку пешехода и на разворот автомобиля, считается равным нулю).

532. Автомобиль выехал из города A в город B и через 2 *час* остановился на 45 *мин*. После этого он продолжал движение к городу B, увеличив первоначальную скорость на 20 *км/час*. Если бы автомобиль ехал без остановки с первоначальной скоростью, то на путь из A в B он затратил бы столько же времени.

Найти первоначальную скорость автомобиля, если расстояние между городами A и B равно 300 *км*.

533. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города B выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоцик-

лист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через три, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 *км* ближе к A.

Найти расстояние между A и B.

534. Из двух городов A и B выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста, причем до их встречи велосипедист, выехавший из A, проехал расстояние в полтора раза больше, чем велосипедист, выехавший из B. Велосипедист, выехавший из A, прибыл в B через 1 *час* 20 *мин* после встречи, а другой велосипедист через 2 *час* после встречи еще находился в 10 *км* от A.

Найти расстояние между A и B.

535. Из города A в город B выходит пешеход, а через один час после него — второй. Если бы скорости пешеходов оставались все время неизменными, то они прибыли бы в город B одновременно. Однако, пройдя 7/10 расстояния от A до B, первый пешеход увеличил свою скорость так, что она стала равной 3/2 первоначальной. В результате в момент его прибытия в город B второй пешеход находился на расстоянии 2,5 *км* от B (скорость второго пешехода не менялась).

Найти скорость второго пешехода, если известно, что расстояние от A до B равно 20 *км*.

536. На лыжных соревнованиях на дистанции 10 000 *м* сначала вышел со старта первый лыжник, а через некоторое время после него — второй, причем скорость второго лыжника была на 1 *м/сек* больше скорости первого. В момент, когда второй лыжник догнал первого, первый увеличил свою скорость на 2 *м/сек*, а скорость второго лыжника осталась без изменения. В результате второй лыжник финишировал через 7 *мин* 8 *сек* после первого. Если бы длина дистанции была на 500 *м* больше, то второй лыжник финишировал бы на 7 *мин* 33 *сек* позже первого.

Найти, сколько времени прошло между выходом со старта первого и второго лыжника.

537. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 34 *км*. В четырех километрах от пункта A первый пешеход (вышедший из пункта A) сделал остановку на 1 *час* 30 *мин*. После остановки он увеличил скорость на 2 *км/час* и встретил второго пешехода в 18 *км* от пункта B. Если бы первый пешеход не делал остановки

и шел все время с первоначальной скоростью, то пешеходы встретились бы на полпути.

Определить скорость второго пешехода.

538. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 *час* быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/час*, то пассажирский поезд прошел бы расстояние AB на 2 *час* 24 *мин* быстрее товарного.

Найти расстояние между городами A и B.

539. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 *час* 40 *мин*. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B, каждый автобус мгновенно поворачивается и двигается к городу A.

Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t *мин* обгоняет 20-й автобус. Найти t и время, за которое легковая машина преодолевает расстояние AB, если, встретив 1-й автобус, она встречает 2-й автобус через $t = 9$ *мин*.

Примечание. Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города A.

540. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 *час* утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 *час*. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 *час* вечера того же дня?

541. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются в 12 *час* дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 *мин* раньше. Если же увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 *мин* раньше. Опре-

делить время встречи, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

542. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выходят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 *км* от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли обе против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B. Найти расстояние между городами A и B.

543. В озеро впадают две реки. Пароход выходит из порта M на первой реке, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро (где нет течения) и по второй реке вверх (против течения) до порта N. Затем пароход возвращается обратно. Скорость парохода при отсутствии течения равна v, скорость течения первой реки v_1, второй реки v_2, длина пути от M до N равна S, а время движения парохода от M до N равно t. Время обратного движения от N до M по тому же пути равно t. Какое расстояние пароход идет по озеру в одном направлении?

544. Из пункта A в пункт B выезжают одновременно мотоцикл и «Победа» а из B в A в тот же момент выезжает «Москвич», который через 5 *час* 50 *мин* прибывает в пункт A. Автомобили встретились через 2 *час* 30 *мин* после выезда, а мотоцикл и «Москвич» встретились на расстоянии 140 *км* от пункта A. Если бы скорость мотоцикла была в 4 раза большей, то он встретился бы с «Москвичом» в 200 *км* от A.

Найти скорости мотоцикла, «Москвича» и «Победы».

545. Из пункта A в пункт B выезжает автомобиль, и одновременно из B в A с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из B в A выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомобилем в точке, отстоящей от точки встречи автомобиля с первым мотоциклом на расстоянии, равном 2/9 пути от A до B. Если бы скорость автомобиля была на 20 *км/час* меньше, то расстояние между точками встречи равнялось бы 72 *км* и первая встреча произошла бы через 3 часа после выезда автомобиля из пункта A.

Найти длину пути между A и B (скорость мотоциклов одинакова).

546. Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения. Две байдарки, имеющие в стоячей воде одинаковую скорость, выходят одновременно по течению: первая — в левую протоку, вторая — в правую. Первая байдарка прошла свою протоку на 5 *мин* быстрее, чем вторая. Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 *мин* быстрее, чем первая. Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 *мин* быстрее, чем первая. За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению?

547. Из пункта P выходят три дороги, ведущие в пункты A, B и C. От A до P — 100 *км*, от B до P — 20 *км*. Группа туристов направилась из пункта A в пункт B через P. От A до P они ехали на машине, а от P до B шли пешком. Машина же, высадив их, направилась в пункт C. Здесь в нее сразу села вторая группа туристов и поехала через P в пункт B, куда и прибыла одновременно с первой группой. Затем первая группа прошла из B через P в пункт C пешком; при этом время движения оказалось на 6 *час* 40 *мин* больше, чем время проезда из A в P и перехода из P в B вместе. Из C в A эта группа возвратилась через P на машине, затратив на весь переезд 5 *час*. Определить расстояние от C до P. Скорость движения машины, как и скорость движения пешеходов предполагаются постоянными.

548. В бассейн проведены три трубы. Первая и вторая труба вместе наполняют его на 5 *час* 20 *мин* быстрее, чем первая и третья трубы вместе. Если бы вторая труба наливала, а третья выливала воду из бассейна, то он наполнился бы на 21/16 *час* быстрее, чем бассейн вдвое большего объема первой и второй трубами вместе (предполагается, что скорость, с которой третья труба наливает воду в бассейн, и скорость, с которой она выливает воду, равны).

За какой срок первая и вторая трубы вместе наполняют бассейн, если первая и третья трубы вместе наполняют его более чем за 8 *час*?

549. Между пунктами A и B расположен пункт C, причем $AC = 17$ *км*, $BC = 3$ *км*. Из пункта A в пункт B выехала машина, которая, не проехав и двух километров, остановилась. Через некоторое время она двинулась дальше в пункт B, и в этот же момент из пункта C в пункт B отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист, каждый из которых, достигая B, сразу же поворачивает назад.

С кем из них раньше поровняется машина, если скорость машины в 4 раза больше скорости велосипедиста и в 8 раз больше скорости пешехода?

550. Из пункта A в пункт C в 9 *час* утра отправляется скорый поезд. В это же время из пункта B, расположенного между пунктами A и C, выходят два пассажирских поезда, первый из них следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже чем через 3 *час* после его отправления, потом проходит пункт B не ранее 14 *час* того же дня и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 *час* после встречи с первым пассажирским поездом.

Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

551. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 *час*. Весь путь от A до B и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 *час*. Если бы собственная скорость (т. е. скорость в стоячей воде) моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь (т. е. путь от A до B и обратно) занял бы у лодки не более 7 *час*.

Найти время, за которое моторная лодка проходит путь из A в B в случае, когда ее собственная скорость не увеличена.

552. В 7 *час* утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляется катер и байдарка. Байдарка прибывает в пункт B в 17 *час* этого же дня. Катер же, дойдя до пункта B, мгновенно повернул обратно и на своем пути из B в A встретил байдарку не позднее 15 *час*, а прибыл в пункт A не ранее 23 *час* того же дня.

Найти время прибытия катеров в пункт B, если известно, что собственная скорость (т. е. скорость в стоячей

воде) катера в два раза больше собственной скорости байдарки.

553. Из города A в 9 *час* утра выехал велосипедист и двигался с постоянной скоростью 12 *км/час*. Спустя два часа вслед за ним из A выехал мотоциклист, который при начальной скорости 22 *км/час* двигался равнозамедленно, так что за час его скорость уменьшалась на 2 *км/час*. Автомобилист, едущий им навстречу в город A с постоянной скоростью 50 *км/час*, сначала встретил мотоциклиста, а потом велосипедиста.

Успеет ли автомобилист к 19 *час* этого дня прибыть в город A?

554. В 9 *час* утра из пункта A выезжает велосипедист, который едет до пункта B. Через два часа после выезда велосипедиста из A в B выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 *час* дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт B, мгновенно поворачивает и едет из B в A. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт A в 17 *час* того же дня (т. е. дня выезда велосипедиста).

Найти время прибытия велосипедиста в пункт B, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 *час*.

555. Два охотника с собакой шли навстречу друг другу с одинаковой постоянной скоростью. В некоторый момент времени собака побежала от первого охотника навстречу второму и, встретив второго охотника, сразу вернулась к первому. Затем собака снова побежала от первого охотника ко второму и от второго к первому. Найти, во сколько раз скорость собаки больше скорости охотников, если на первую пробежку от первого охотника до второго и обратно собака затратила 9 *мин*, а на вторую пробежку — 4 *мин*.

556. В реку впадает приток. На притоке на некотором расстоянии от его устья расположен пункт A. На реке на таком же расстоянии от устья притока расположен пункт B. Время, которое требуется моторной лодке, чтобы доплыть от пункта A до устья притока и обратно, относится ко времени, которое требуется ей, чтобы доплыть от пункта B до устья притока и обратно, как 32:35. Если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/час* больше, то это отношение было бы равно 15:16, а если бы скорость моторной лодки была на 2 *км/час* меньше, то это

отношение было бы равно 7:8. Найти скорость течения реки (расстояния измеряются вдоль притока и реки соответственно).

557. В море с прямолинейным берегом впадают две реки с одинаковой скоростью течения. Посередине между их устьями расположен город A, на первой реке находится пункт B, а на второй реке пункт C. Расстояние вдоль реки от B до устья этой реки равно расстоянию от A до устья реки, а расстояние от C до устья реки составляет 3/4 расстояния от A до устья реки. Из города A одновременно выходят две лодки; первая идет в B (вдоль берега моря и по реке), а вторая идет в C (также вдоль берега моря и по реке). Дойдя до пунктов B и C, лодки сразу поворачивают назад и идут соответственно в пункты C и B. Известно, что общее время, в течение которого первая лодка на пути из A в B, а потом в C шла по морю, относится ко времени, в течение которого она шла по рекам, как 45:47. Для второй лодки это отношение равно 16:17. Какая из лодок первой пришла в свой конечный пункт — первая лодка в C или вторая в B?

558. Два приятеля собрались на охоту. Один из них имеет машину и живет в 30 *км* от охотничьей базы, между этой базой и домом своего приятеля. Они вышли одновременно, и владелец машины поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу, и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 *час* 40 *мин* раньше владельца машины, то приятели встретились бы в 5 *км* от дома автомобилиста.

Какова скорость автомобиля, если расстояние между домами приятелей 16 *км*?

559. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 *м* с одинаковой скоростью 24 *м/сек*. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и a_2 ($a_1 < 0$ и $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 *сек* раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4$ *м/сек*^{2}. Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 *м*. Определить, какой автомобиль остановился раньше и найти ускорение a_2 заднего автомобиля.

560. Две суммы денег — всего 5000 руб. — положены на некоторые сроки в сберкассу из расчета 3% годовых (проценты начисляются от первоначальной суммы в момент выдачи вклада пропорционально времени пребывания вклада в сберкассе). Каждая из этих сумм дала 60 руб. дохода. Первая сумма находилась в сберкассе на четыре месяца меньше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она была положена в сберкассу?

561. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили a литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a литров и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ литров и налили столько же литров воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют a литров, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в 25/16 раза больше крепости окончательной смеси во втором сосуде.

562. От двух однородных кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в получившихся сплавах стало одинаковым.

Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

563. Из двух жидкостей, удельный вес которых 2 *г/см*^{3} и 3 *г/см*^{3} соответственно, составлена смесь. Сколько граммов взято каждой жидкости и каков удельный вес смеси, если 4 *см*^{3} смеси весит в 10 раз меньше, чем вся вторая жидкость, а 50 *см*^{3} смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь? Предполагается, что объем смеси равен сумме объемов ее составных частей.

564. Имеются три смеси, составленные из трех элементов A, B и C. В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении 3:5, во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении 1:2, в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении 2:3. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 3:5:2?

565. В сосуд с чистой водой налили 6 *л* 64%-ного (по объему) раствора спирта, а затем после полного перемешивания вылили равное количество (т.е. 6 *л*) получившегося раствора. Сколько воды было первоначально в сосуде, если после троекратного повторения этой операции в сосуде получился раствор спирта 37%-ной (по объему) концентрации?

566. 1°. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем 20-копеечных монет было больше, чем 15-копеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав 2 монеты на билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

2°. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб. Сколько стоит покупка и что дороже — портфель или авторучка?

567. Покупатель купил несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг на 4 штуки больше, чем тетрадей. За все тетради он заплатил 72 коп., а за все книги — 6 руб. 60 коп. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то покупатель истратил бы на покупку меньше, чем 4 руб. 44 коп. Сколько куплено тетрадей?

568. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы — 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

569. Продают три куска ткани. Из первого куска продали половину, а из второго 2/3, а третий кусок, в котором было 1/3 всей ткани, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось ее вдвое меньше, чем было во втором куске?

570. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если 23 марки на лист, то по

крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок.

Сколько листов в альбоме?

571. Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 *мин*; вторая, третья и четвертая, работая одновременно,— за 10 *мин*; вторая, третья и пятая—за 20 *мин* и, наконец, пятая и четвертая—за 30 *мин*. За какое время наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

572. Совхоз располагает тракторами четырех марок *А*, *Б*, *В* и *Г*. Бригада из четырех тракторов (два трактора марки *Б* и по одному марок *В* и *Г*) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки *А* и одного трактора марки *В* тратит на эту работу три дня, а три трактора марок *А*, *Б* и *В*—четыре дня. За какое время выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

573. Бак водокачки наполняется водой с помощью нескольких насосов. Сначала включили три насоса одинаковой производительности; через 2,5 *час* после начала их работы подключили еще два насоса другой, но также одинаковой производительности. В результате через 1 *час* после подключения насосов воды в баке до полного объема не хватало 15 $м^3$, а еще через час бак был полон. Один из двух насосов, подключенных во вторую очередь, мог бы наполнить бак за 40 *час*.

Найти объем бака.

574. Первый рабочий сделал 50 деталей, 40 из них он положил в первый ящик, а 10—во второй, где уже находились 30 деталей, изготовленных вторым рабочим. Из этих 30 деталей 10 оказались стандартными, а 20—нестандартными. Сколько стандартных деталей сделал первый рабочий, если стандартная деталь в 3 раза дороже нестандартной и суммарная стоимость всех деталей во втором ящике в 2 раза выше суммарной стоимости всех деталей в первом ящике?

575. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем „троек“ было больше, чем „пятерок“ и меньше, чем „четверок“. Кроме того, число „четверок“ делилось на 10, а число „пятерок“ было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа?

576. Два насоса перекачали 64 $м^3$ воды. Они начали работать одновременно и с одинаковой производительностью. После того как первый из них перекачал 9 $м^3$ воды, его остановили на 1 *час* 20 *мин*. После перерыва производительность первого насоса увеличили на 1 $м^3$ в час.

Определить начальную производительность насоса, если первый насос перекачал 33 $м^3$ воды и оба насоса окончили работу одновременно.

577. В лаборатории имеется раствор соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3:2:1, то получится 15%-ный раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешении 24%-ный раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных весовых частей первого и третьего растворов, имеют концентрацию 10%. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2:1?

578. Емкость бака A на 900 *л* меньше емкости бака B. Первый насос подключают к пустому баку A, и он начинает наполнять бак водой. Когда бак наполнится наполовину, включают второй насос, который выкачивает воду из бака. В результате бак A оказывается полным через 40 *мин* после включения первого насоса. Затем то же самое проделывают с баком B (к пустому баку B подключают первый насос и, после того как он наполнит бак B наполовину, включают второй насос), и бак B оказывается наполненным через 52 *мин* после того, как к нему подключили первый насос. Найти емкость бака A и производительность каждого из насосов, если известно, что один второй насос выкачивает всю воду из полного бака A за 30 *мин*.

579. Первая и вторая бригады одновременно начали выполнять некоторую работу. Более чем через час после начала работы первую бригаду сменила третья, которая вместе со второй работала до завершения всей работы. На выполнение работы ушло 5,5 *час*. Первая бригада за все время пока она работала, сделала столько, сколько третья делает за час. Если бы первая бригада проработала на 6 *час* больше, чем это было на самом деле, она сделала бы столько же, сколько было сделано второй бригадой. Если бы три бригады все время работали вместе, работа была бы выполнена в полтора раза быстрее, чем в действительности. Сколько времени работала первая бригада?

Часть II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Основные тригонометрические функции

$$y = \sin x; \qquad y = \operatorname{tg} x;$$
$$y = \cos x; \qquad y = \operatorname{ctg} x.$$

Аргумент тригонометрических функций x является действительным числом[1]. Такое число можно однозначно поставить в соответствие каждому углу, положительному или отрицательному, меньшему или большему, чем полный развернутый угол. Поэтому число x можно интерпретировать как числовую меру угла.

Для угла по величине меньшему, чем полный развернутый, абсолютная величина этого числа определяется как отношение длины дуги окружности l_{AM}, на которую опирается этот угол, к радиусу окружности R

$$|x| = \frac{l_{AM}}{R}.$$

Для угла по величине большему, чем полный развернутый угол, длину этой дуги нужно брать с учетом количества полных развернутых углов, содержащихся в данном.

Число x считается положительным, если угол отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным, если угол отсчитывается в противоположном направлении.

Угол, числовая мера которого равна единице, т. е. $x = 1$, называется радианом. Прямому положительному углу соответствует число $x = \frac{\pi}{2}$, полному развернутому $x = 2\pi = 6{,}28\ldots$ и т. д.

[1] x — отвлеченное действительное число, а не число градусов, минут и т. п.

Итак, каждое действительное число x определяет некоторый угол, обычно обозначаемый также буквой x. В свою очередь этот угол определяет некоторую точку $M(u, v)$ на окружности радиуса R (рис. 11). Тогда по определению тригонометрических функций

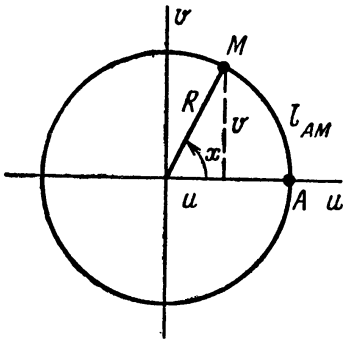


Рис. 11

$$y = \sin x = \frac{v}{R}; \quad y = \operatorname{tg} x = \frac{v}{u} \quad (u \neq 0);$$

$$y = \cos x = \frac{u}{R};$$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0).$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\sin^2 x + \cos^2 = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

Из этих определений следуют также неравенства

$$|\sin x| \leqslant 1; \quad |\cos x| \leqslant 1,$$

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad (\text{так как } |v| \leqslant l_{AM}),$$

$$|x| \leqslant |\operatorname{tg} x| \quad \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Тригонометрические уравнения. При решении тригонометрических уравнений надо стремиться свести данное уравнение к одному из простейших:

$$\sin x = a; \quad \cos x = a; \quad \operatorname{tg} x = a; \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Отметим особо решения следующих уравнений:

уравнение	решение
$\sin x = 0,$	$x = \pi n;$
$\sin x = 1,$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$
$\sin x = -1,$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$
$\cos x = 0,$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$
$\cos x = 1,$	$x = 2\pi n;$
$\cos x = -1,$	$x = \pi + 2\pi n;$
$\operatorname{tg} x = 0,$	$x = \pi n;$

$$\operatorname{ctg} x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Приведем общие решения простейших тригонометрических уравнений.

1) $\sin x = a$ ($|a| \leqslant 1$) (рис. 12):

а) $x = \arcsin a + 2\pi n$,
б) $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$,

$\Big\}\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$

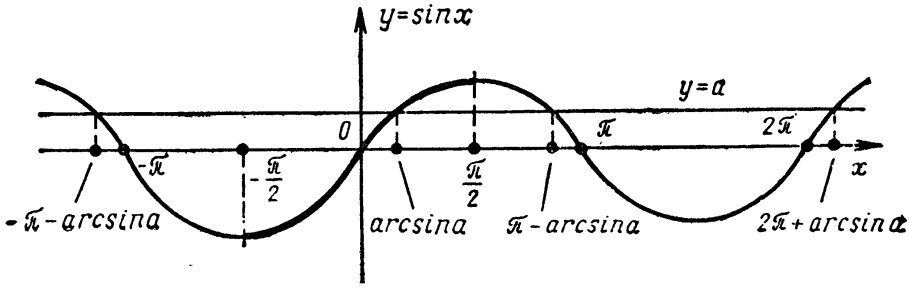


Рис. 12

$\arcsin a$ — есть то единственное решение уравнения $\sin x = a$, которое лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2};$$

2) $\cos x = a$ ($|a| \leqslant 1$) (рис. 13):

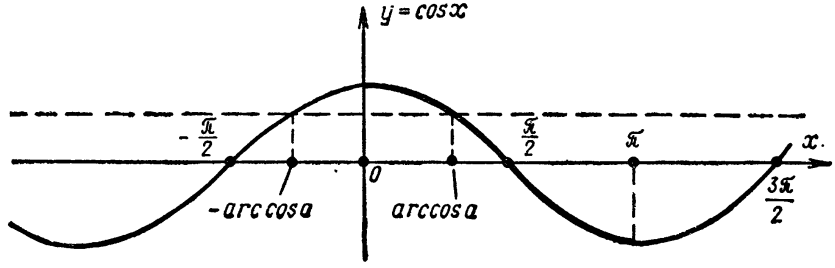


Рис. 13

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$$

$\arccos a$ — есть то единственное решение уравнения $\cos x = a$, которое лежит на отрезке $[0, \pi]$:

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi;$$

3) $\operatorname{tg} x = a$ (рис. 14):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$$

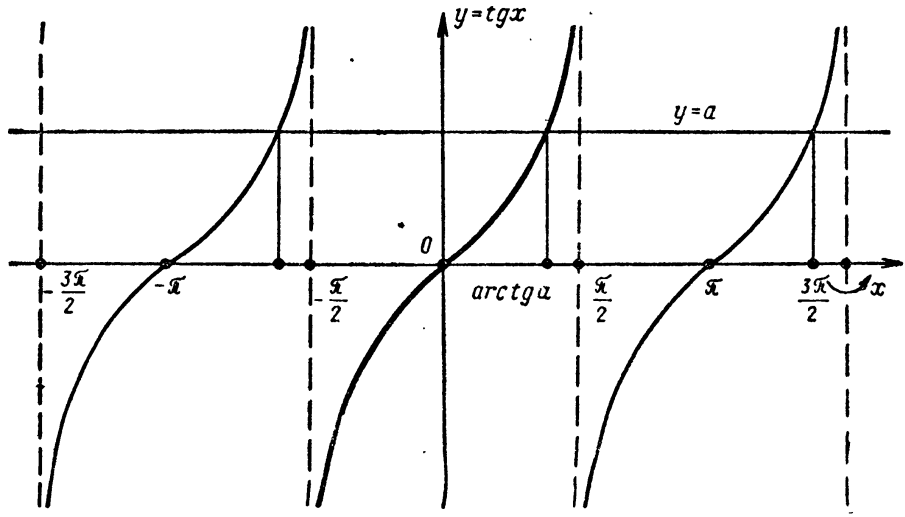


Рис. 14

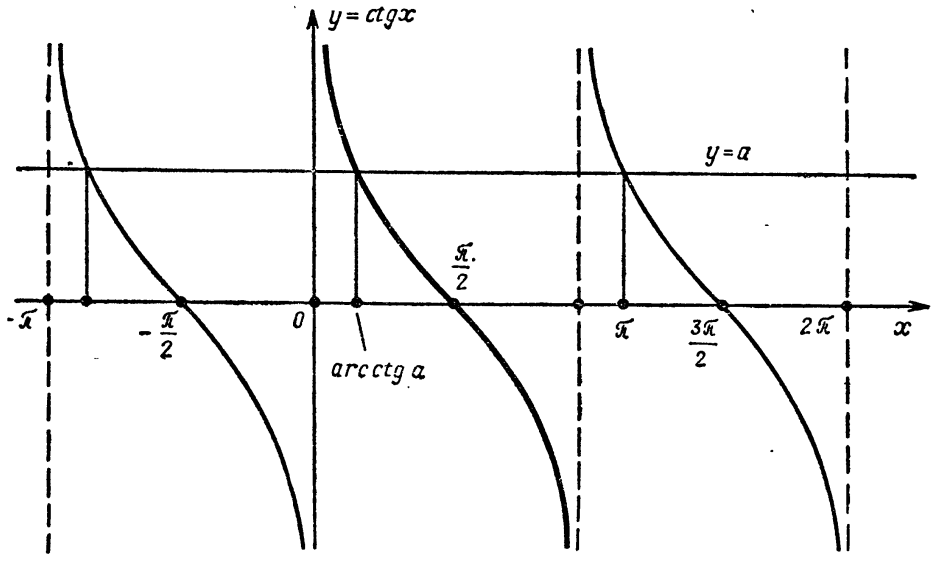


Рис. 15

$\operatorname{arctg} a$ — есть то единственное решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$, которое лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2};$$

4) $\operatorname{ctg} x = a$ (рис. 15):

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,$$

$\operatorname{arcctg} a$ — есть то единственное решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, которое лежит в интервале $(0, \pi)$

$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi.$$

3. Тригонометрические неравенства. Решение тригонометрических неравенств также сводится к решению простейших. Запись решения простейших тригонометрических неравенств удобно проводить с использованием графиков соответствующих функций. Проиллюстрируем это примерами.

а) $\sin x < \frac{1}{3}$.

Запись решений производится в следующей последовательности. График функции $y = \sin x$ (рис. 16) пересекаем прямой $y = \frac{1}{3}$. Решением неравенства будут все

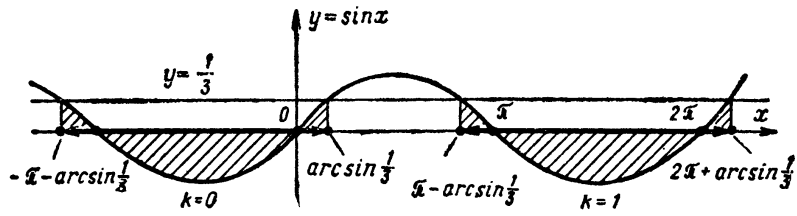


Рис. 16

действительные числа x, для которых график функции $y = \sin x$ лежит ниже прямой $y = \frac{1}{3}$. На чертеже эти области заштрихованы. Все они получаются из какой-нибудь одной сдвигом на $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Расставив на чертеже обозначения концов одной из областей (например, при $k = 0$), получим

$$-\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k < x < \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k;$$

б) $-\frac{1}{7} < \cos x < \frac{1}{5}$.

Для записи решений этого неравенства используем чертеж, представленный на рис. 17. Интересующие нас области заштрихованы. Решения неравенства имеют вид

1) $\arccos\frac{1}{5}+2\pi k<x<\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)+2\pi k.$

2) $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)+2\pi k<x<\arccos\frac{1}{5}+2\pi k$

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

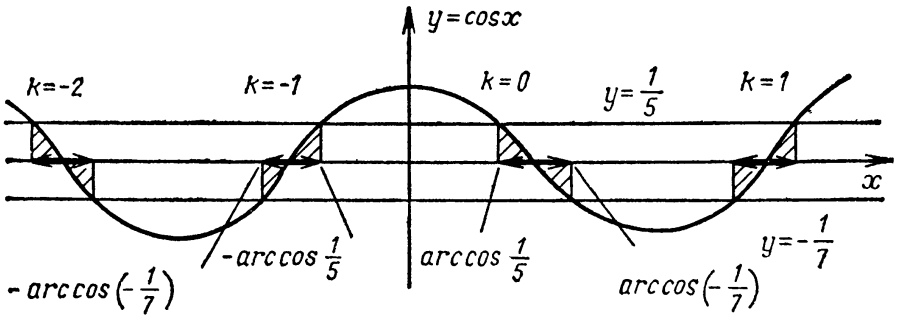


Рис. 17

в) $\operatorname{tg}x<3$.

Используем чертеж на рис. 18. Области, где $\operatorname{tg}x<3$, заштрихованы. Решения имеют вид

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\operatorname{arctg}3+\pi k,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

4. Основные формулы тригонометрии.

а) Формулы сложения

$$\begin{aligned}&\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,\\&\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x;\\&\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\\&\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;\end{aligned}\qquad(1)$$

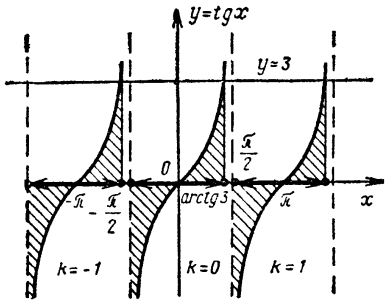


Рис. 18

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},\qquad(2)$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y},\qquad(3)$$

$$\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}.$$

В частности,

$$\begin{aligned}&\sin2x=2\sin x\cos x,\\&\cos2x=\cos^2x-\sin^2x,\end{aligned}\qquad(4)$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x},$$

$$\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2x-1}{2\operatorname{ctg}x}.\qquad(5)$$

Очень часто применяются формулы

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1, \\ \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned} \tag{6}$$

Или

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}, \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Формулы утроенного аргумента

$$\begin{aligned} &1. \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \\ &2. \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \end{aligned} \tag{8}$$

б) Формулы „приведения“

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x, \qquad \sin(\pi \pm x) = \mp \sin x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x, \qquad \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x, \qquad \operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x.$$

в) Формулы „преобразования суммы в произведение“ и „произведения в сумму“

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$
$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}, \tag{10}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right], \tag{11}$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right].$$

г) Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \tag{12}$$

Замечание. При использовании тригонометрических формул (1—12) нужно иметь в виду следующее важное обстоятельство. Эти формулы являются тождествами и, значит, выполняются для всех действительных чисел, которые являются допустимыми, одновременно для обеих частей равенств. Однако для ряда формул области допустимых значений правой и левой частей равенств не совпадают.

Например, в формуле

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

левая часть определена при $x+y \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, а правая часть требует дополнительно неравенств

$$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}+m\pi\ (k,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Замена тангенса суммы по этой формуле может привести к потере решений вида $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $y = \frac{\pi}{2}+m\pi$. Использование этой формулы «справа налево» может привести к

возникновению посторонних решений. Поэтому применение этой формулы «слева направо» требует отдельного рассмотрения случая $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+m\pi$, а «справа налево» — учета ограничений $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$.

Аналогичное обстоятельство имеет место и в формулах (3, 5, 12).

5. Некоторые распространенные тригонометрические преобразования:

а) $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

б) $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

в) $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

г) Выражение $y(x)=A\cos x+B\sin x$ преобразуется введением вспомогательного угла φ:

$$y(x)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right)=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi+x).$$

Здесь

$$\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и, очевидно,

$$\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1 \text{ и } \left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\leqslant 1.$$

Итак,

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi).$$

Отсюда следует, что

1) $-\sqrt{A^2+B^2}\leqslant A\cos x+B\sin x\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$.

2) Уравнение $A\cos x+B\sin x=C$ имеет решение в том и только в том случае, если

$$|C|\leqslant\sqrt{A^2+B^2}.$$

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Следующие уравнения могут быть решены сведением их к квадратному относительно какой-либо тригонометрической функции.

580. $1-\sin^4 x-\frac{5}{3}\cos^4 x=0.$

581. $\cos x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=1.$

582. $8\cos^4 x-\cos 4x=1.$

583. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$

584. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}.$

585. $4\sin^4 x=5\cos^2 x+2\cos 2x+2.$

586. $8\cos^4 x=3+5\cos 4x.$

587. $\cos 4x+2\cos^2 x=1.$

588. $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4}=\cos^3\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{2}.$

589. $4\cos^3\frac{x}{2}+3\sqrt{2}\sin x=8\cos\frac{x}{2}.$

590. $6\cos^2 x+\cos 3x=\cos x.$

591. $\left(2\sin^4\frac{x}{2}-1\right)\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}}=2.$

592. $(3-2\sin^2 2x)\frac{1}{\sin^2 x}=2.$

593. $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=1+2\sin x.$

В следующих уравнениях удобно применить способ разложения на множители:

594. $2\cos 2x=\sqrt{6}(\cos x-\sin x).$

595. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=16\cos 2x.$

596. $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x).$

597. $2(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$

598. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x.$

599. $\operatorname{tg} x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}.$

600. $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x.$

601. $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=0.$

602. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=(\sin x+\cos x)^2$.

603. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 4x$.

604. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x=\sin x$.

Уравнения вида

$$A\sin^2 x+B\sin x\cdot\cos x+C\cos^2 x+D\cos 2x+E\sin 2x+F=0$$

могут быть преобразованы к виду

$$M_1\sin^2 x+M_2\sin x\cdot\cos x+M_3\cos^2 x=0$$

и делением на $\sin^2 x$ (если $M_3\neq 0$) или на $\cos^2 x$ (если $M_1\neq 0$) приведены к квадратному уравнению относительно $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$.

Решить уравнения:

605. $12\sin^2 x+3\sin 2x-2\cos^2 x=2$.

606. $8\sin 2x-3\cos^2 x=4$.

607. $4\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+3\sin^2\frac{x}{2}=3$.

608. $2\sin^2 x+3\cos 2x=5\sin 2x+6$.

609. $2\cos 4x-3\sin 4x=1$.

610. $1-3\cos^2 x=2\sin x\cdot\cos x$.

611. $\sin^2 x-\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

612. $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=3$.

613. $3\sin x-\cos x=1$.

614. Найти все пары чисел x и y, которые являются решениями уравнения

$$\cos^2 x+\cos x\cdot\cos y+\cos^2 y=0.$$

Используя формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму, решить уравнения:

615. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}$.

616. $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x$.

617. $\cos 3x-2\cos 2x+\cos x=0$.

618. $\cos 3x\cdot\cos 4x+\sin 2x\cdot\sin 5x=\frac{1}{2}[\cos 2x+\cos 4x]$.

619. $2\sin x\cdot\cos 2x+\sin 2x\cdot\cos x=\sin 4x\cdot\cos x$.

620. $\sin x-\sin 3x=\cos 2x\cdot\sin 3x$.

621. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$.

622. $1+\sin 3x=\cos 2x+\sin x$.

623. $6\operatorname{tg} x+5\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$.

624. $\sin 7x\cdot\cos 13x=\sin x\cdot\cos 19x$.

625. $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$.

626. $\sin 5x\cdot\sin 4x=-\cos 6x\cdot\cos 3x$.

627. $\sin 4x\cdot\sin 6x=2(\sin x+\sin 5x)$.

628. $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cdot\cos 2x$.

629. $2\cos x\cdot\cos 2x=1-\cos 2x+\cos 3x$.

630. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\cdot\sin x)$.

Следующие задачи удобно решать вводя вспомогательный аргумент:

631. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$.

632. $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$.

633. $\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\frac{1}{2}\cos 7x=0$.

634. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$.

635. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения

$$\sin x+\sqrt{2}\sin(a-x)=1.$$

636. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения

$$\sin x+\cos(a+x)+\cos(a-x)=2.$$

Используя свойство ограниченности выражения $A\sin x+B\cos x$, решить следующие задачи:

637. $3\sin x+4\cos x=5$. **638.** $\sin x+\cos x=\frac{3}{2}$.

639. $\sin x-\sin 15x\cdot\cos x=\frac{3}{2}$.

640. Сколько решений на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ имеет уравнение

$$\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x?$$

641. Доказать, что уравнение

$$(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$$

не имеет решений.

642. Решить уравнение

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg}5x+\operatorname{ctg}5x.$$

Преобразования, применяемые при решении следующих уравнений, могут привести к появлению посторонних решений. Имея в виду это обстоятельство, решить уравнения:

643. $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$.

644. $\cos 2x+\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=0$.

645. $\sqrt{\sin x+\cos x}=\sin x-\cos x$.

646. $\sqrt{17\sec^2 x+16\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\cdot\sec x-1\right)}=$

$$=2\operatorname{tg}x(1+4\sin x).$$

647. $\sin 4x\cdot\sin x-\sin 3x\cdot\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 3x+\sqrt{1+\cos x}$.

648. $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}x$.

649. $\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\cdot\cos x$.

650. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}+2\sin x=0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

651. Найти все решения уравнения

$$\sin x+\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)\sqrt{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}=0,$$

заключенные между $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.

652. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

заключенные между π и $\frac{3\pi}{2}$.

653. Найти решения уравнения

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}}{\cos x}=4\sin x,$$

лежащие в интервале $(0,\ 2\pi)$.

654. $\sin 5x + \sin 7x = 5 \sin 6x$.

655. $\sin x - \sin 9x = 3 \cos 5x$.

656. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 7x\right) + \sin 7x = 6 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

657. $\cos 7x + \cos x = 4 \cos 4x$.

658. $4 \operatorname{tg} 4x - 4 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x$.

659. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$. **660.** $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$.

661. $\cos x = \cos^2 \frac{3x}{4}$. **662.** $\operatorname{ctg} x - 2 \cos 2x = 1$.

663. $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

664. $3 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 2x = 4 \operatorname{tg} x$.

665. $\sin 2x + 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$.

666. Для каждого a решить уравнение

$$\sin(x - a) = \sin x + \sin a.$$

667. Для каждого a решить уравнение

$$|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|.$$

668. Для каждого a решить уравнение $(0 < a < 4)$

$$\sin 4x = a \operatorname{tg} x.$$

669. Для каждого a решить уравнение

$$\cos x - \sin a + 2 \cos 3x \cdot \sin(a - 3x) = 0.$$

670. Выяснить, при каких a уравнение

$$a^2 - 2a + \sec^2 \pi(a + x) = 0$$

имеет решения и найти эти решения.

671. Выяснить, имеет ли уравнение

$$\sin 3x \cdot \cos 5x = 1$$

решения.

672. Найти решения уравнения

$$\sin 5x + \cos 8x = 2,$$

удовлетворяющие неравенству $|x| < 10$.

673. Найти решения уравнения

$$\sin x = \cos 7x,$$

удовлетворяющие неравенству $|x| > 3$.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решить следующие неравенства:

674. $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} > 2$. 675. $\frac{\operatorname{tg}^2 x-2}{\operatorname{tg}^2 x-1} < \frac{1}{2}$.

676. $\sin^2 x - 2\sin x - 1 < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

677. $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| < 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

678. $\left|\cos^2 x - \cos x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

679. $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$.

680. $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$,

681. $\operatorname{tg} x > \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

682. $|\sin x| > \operatorname{ctg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

683. $|\sin x| > |\cos x|, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

684. $1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} \leqslant \frac{1}{3 - 4\cos^2 x}, \quad 0 < x < \pi$.

685. $\log_{0,5} \sin x > 1, \quad 0 < x < \pi$.

686. $\sin 3x < \sin x$.

687. $\sin x \sin 3x > \sin 5x \sin 7x$.

688. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{8}$.

689. $3\sin 2x > \sin x - \cos x + 1$.

690. $\frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \leqslant 2$,

691. $\frac{2 + \sqrt{2} - 4\cos^2 x}{\sin x - \cos x} \leqslant 2$.

692. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$.

693. $5 + 2\cos 2x \leqslant 3\,|2\sin x - 1|$.

694. $\operatorname{tg}^2 x \leqslant |1 - 2\operatorname{ctg}^2 x|$.

695. $\sqrt{3 + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} \geqslant \frac{1 + 3\operatorname{tg} x}{2}$.

696. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant 6\sin x - 1$.

697. $\sqrt{2 + 4\cos x} \geqslant \frac{1}{2} + 3\cos x$.

698. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

699. $\cos(2 - 4x) + \cos(2 + 4x) \geqslant \sqrt{2\cos^2 2x + \operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi}$.

700. $\sin^4 x+\cos^4 x \geqslant \frac{5}{8}$.

701. $\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x$.

702. $2\cos 2x+\sin 2x > \operatorname{tg} x$.

703. $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{\cos x} > \sqrt{\frac{17}{7}-\cos x}$, $0 \leqslant x < 2\pi$.

704. $\log_2 \cos x > \log_2 \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

705. $\sin|\lg x|+\cos|\lg x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Для каждого действительного значения параметра a найти все решения неравенства:

706. $\sin^2 x \leqslant a^2 \sin^2 3x$, $a > 0$.

707. $\frac{1+\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\sin x}{1-\cos x} \leqslant a$.

708. $\cos x-\frac{1}{\cos x} \leqslant a$, $a > 0$.

§ 4. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Характерной особенностью систем тригонометрических уравнений является, как правило, то, что каждое из уравнений системы при своем решении дает целочисленный параметр. При этом нужно помнить, что, решая независимо уравнения системы, следует независимо вводить и целочисленные параметры. Например, система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y)=1, \\ \cos(x-y)=1 \end{cases} \tag{1}$$

равносильна системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x-y=2\pi m. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь m и n — целочисленные параметры, принимающие независимо друг от друга значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, т. е. произвольная пара целых чисел (m, n) дает решение системы

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi(m+n), & n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ y=\frac{\pi}{4}+\pi(n-m) & m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Обозначение целочисленного параметра при записи решений каждого из уравнений системы (1) одинаковой буквой приводит к потере бесчисленного множества решений, которые получаются из (2) при $m \neq n$.

Некоторый класс систем тригонометрических уравнений удается решить, комбинируя входящие в них уравнения. Если в результате этого находится какая-либо тригонометрическая функция от алгебраической комбинации неизвестных, то легко находится и сама эта комбинация. В конечном счете удается свести задачу к системе алгебраических уравнений.

* * *

709. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

710. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{8}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

711. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos (x-y) = 2 \cos (x+y), \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

712. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin (x-y) = 3 \sin x \cdot \cos y - 1, \\ \sin (x+y) = -2 \cos x \cdot \sin y. \end{cases}$$

713. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \sin (3x+2y) + \sin x = 0, \\ 4 \sin (2x+3y) + \sin y = 0. \end{cases}$$

714. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + 3 \sin x = 2 \cos y, \\ \cos y + 3 \sin y = 2 \cos x. \end{cases}$$

715. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin (x+y)} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\cos y}{\sin (x+y)} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

716. Для каждого a решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{5}{6} \sin a, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{5}{6} \cos a. \end{cases}$$

717. Для каждого a решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a^2, \\ \sin y \cdot \cos x = a. \end{cases}$$

718. Для каждого $a > 1$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} a \cos (2x + y) = \cos y, \\ a \cos (x + 2y) = \cos x. \end{cases}$$

Следующие системы тригонометрических уравнений могут быть сведены к системам алгебраических уравнений простой заменой неизвестных:

719. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sec y = 2, \\ \sin x \cdot \sec y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

720. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}. \end{cases}$$

721. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos (x + y) + \sin (x + y) = 3 \cos (x + y), \\ 4 \sin x = 5 \operatorname{ctg} (x + y). \end{cases}$$

722. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

723. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{y} = \sin \frac{13\pi}{6}, \\ 2 \sin (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 1 - 2 \cos \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{y}. \end{cases}$$

724. Для каждого a решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \\ \sec^2 x + \sec^2 y = \frac{8}{3-a}. \end{cases}$$

725. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2 \sin y \cdot \sin (x+y) = \cos x. \end{cases}$$

726. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3y = 3 \operatorname{tg} 2x, \\ 2 \sin x \cdot \cos (x-y) = \sin y. \end{cases}$$

727. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

728. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x-y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

729. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y, \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

§ 5. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Предварительные замечания. 1°. Для решения задач на обратные тригонометрические функции (аркфункции) достаточно хорошо знать их определения, которые приведены в предварительных замечаниях к этой главе. Сведем эти определения в таблицу:

$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
если 1) $\sin y = x$, $\lvert x \rvert \leqslant 1$ 2) $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	если 1) $\cos y = x$, $\lvert x \rvert \leqslant 1$ 2) $0 \leqslant y \leqslant \pi$	если 1) $\operatorname{tg} y = x$ 2) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	если 1) $\operatorname{ctg} y = x$ 2) $0 < y < \pi$

2°. Отметим некоторые свойства аркфункций и соотношения между ними:

1. a) если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

b) если $x \geqslant 0$, то $0 \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

если $x \leqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x \leqslant 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcctg} x < \pi;$$

2. a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$,
   b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$,
   c) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (x — любое действительное число),
   d) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ (x — любое действительное число);

3. a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

   b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

4. a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$,
   b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$,
   c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$,
   d) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

Выписанные соотношения являются следствием определения аркфункций и известных тригонометрических формул. В качестве примера рассуждений, типичных при решении задач, связанных с аркфункциями, приведем доказательство соотношений 3,а и 4,а:

3,а. Данное соотношение определено при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и равносильно следующему:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

1) Углы $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ имеют одинаковый синус: $\sin\alpha = x$ (по определению арксинуса), $\sin\beta = \cos(\arccos x) = x$ (по формуле приведения и определению арккосинуса).

2) Оба угла α, β заключены в одних и тех же пределах: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ (по определению арксинуса) и так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ (по определению арккосинуса), то имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ каждому значению синуса соответствует единственное значение аргумента. Поэтому из равенства синусов углов α и β следует равенство этих углов, т. е. $\alpha = \beta$, $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ и т. д.

4,а. Положив в формуле $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (угол $\alpha = \arcsin x$), получим:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Поскольку значение $\alpha = \arcsin x$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, в котором косинус неотрицателен, то перед радикалом следует взять знак „плюс“.

Итак, имеем

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

3°. При решении уравнений, содержащих аркфункции, часто используемым приемом является сравнение тригонометрических функций от обеих частей уравнения. Однако следует помнить, что алгебраическое уравнение, получающееся при этом, является *следствием* исходного, но *не равносильно* ему. Например, из $f(x) = g(x)$ следует соотношение

$$\sin f(x) = \sin g(x).$$

Но, обратно, из последнего равенства имеем: $f(x) = (-1)^n g(x) + \pi n$ при любом целом n. Поэтому этот прием может привести к появлению посторонних корней, для выявления которых *необходима проверка*. Следует также помнить, что поскольку функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не определены при некоторых x, то переход от уравнения

$$f(x) = g(x)$$

к уравнению

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$$

может привести к потере решений.

Вычислить:

730. a) $\arcsin(\sin 0{,}3\pi)$, b) $\arcsin(\sin 1{,}3\pi)$,
c) $\arcsin(\sin 1{,}7\pi)$, d) $\arcsin(\sin 10)$.

731. a) $\arccos(\cos 0{,}97\pi)$, b) $\arccos(\cos 1{,}2\pi)$,
c) $\arccos(\cos 10)$.

732. a) $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]$, b) $2\operatorname{arctg}(-3)$.

733. a) $\operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3})$, b) $\operatorname{arcctg}[\operatorname{ctg}(-10)]$.

734. a) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$, b) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$,

c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$, d) $\sin(\operatorname{arcctg} 2\sqrt{2})$,

e) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{17}\right)$, f) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right)$.

735. a) $\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{1}{4}$,

b) $\operatorname{arcctg}(-2) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$,

c) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23}$,

d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} +$
$+ \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{5}{7}$.

736. Найти величину выражения

a) $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$,

b) $\arccos[\sin\pi(x^2+x-3)]$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Решить уравнения:

737. a) $3\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$, b) $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right) = 1$,
c) $\sin(5\operatorname{arcctg} x) = 1$.

738. $2\arcsin x + \arccos(1-x) = 0$.

739. $\arcsin x - \operatorname{arcctg} x = 0$.

740. $\arccos(\sqrt{3}x) + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

741. $2\operatorname{arctg} x+3\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$.

742. $\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x=\arcsin x$.

743. $\operatorname{arctg}(2+\cos x)-\operatorname{arctg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

744. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}$.

Решить системы уравнений:

745. $\begin{cases}\arcsin\left(\frac{x}{2}+\sin y\right)=y-\frac{\pi}{3},\\ x^2+2x\sin y+3\cos y=0.\end{cases}$

746. $\begin{cases}\operatorname{arctg}(x\operatorname{tg} y)=2y,\\ x^2\operatorname{tg}^2 y\cdot(\operatorname{tg}^2 y-2)=1-2x.\end{cases}$

§ 6. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Используя свойства показательной (см. предварительные замечания к § 7, ч. I) и тригонометрической функций, решите следующие уравнения и неравенства (№ 747—768):

747. $(\sin x)^{-\sin x}-1=\operatorname{ctg}^2 x$ при условии, что $\sin x>0$.

748. $(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x}=(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ при условии, что $\operatorname{tg} x>0$.

749. $\left|\cos\frac{x}{2}+2-\frac{3}{4\cos\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{x^2+3x-10}}=1$.

750. $\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{8x-x^2-6}}=1$.

751. $\left|10\sin\frac{x}{2}-6+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{11x-x^2-10}}=1$.

752. $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\frac{3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|^{\sqrt{x^2-12x+6}}=1$.

Для каждого действительного a найти все действительные решения уравнения:

753. $|\cos x|^{\operatorname{ctg} 2x+a\operatorname{ctg} x}=1$.

754. $|3^{\operatorname{tg}\pi x}-3^{1-\operatorname{tg}\pi x}|\geqslant 2$.

755. $2^{\sqrt{\log_{1/2}\operatorname{tg} x}-1}<1$.

756. Решить неравенство

$$x^{\lg \sin x}\geqslant 1$$

при условии, что $x>0$.

757. Решить неравенство

$$x^{2\sin x-\cos 2x}<\frac{1}{x}$$

при условии, что $x>0$.

758. Для каждого вещественного числа $a>0$ решить неравенство

$$x^{\sin x-a}>1$$

при условии, что $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Подходящей заменой переменных сведите уравнения 759—767 к квадратным:

759. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

760. $\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$.

761. $2^{1+2\cos 5x}+16^{\sin^2 5x/2}=9$.

762. $3^{\sin^2 x+2\cos^2 x}+3^{1-\sin 2x+2\sin^2 x}=28$.

763. $1+2^{\operatorname{tg} x}=3\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$.

764. $(0{,}5)^{\cos 2x}-\frac{1}{4^{\sin^2 x}}=\frac{1}{2}$.

765. $2^{5/2+2\cos 2x}-(2^{3/2}-1)\cdot 4^{\cos^2 x}=$

$$=-(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{1/\sqrt{2}}\sin x(\sqrt{2}-1)}.$$

766. $4\cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}-16{,}5\cdot 4^{\cos x+\sin x}=\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}}16$.

767. $4^{\operatorname{tg}^2 x}-4^{\frac{1}{1+\cos 2x}}\cdot\log_{\sqrt[3]{2}}4=-\log_{\sin x}\frac{1-\cos 2x}{2}$.

768. Решить неравенство

$$4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\leqslant 8.$$

Используя свойства логарифмической и тригонометрической функций, решите уравнения и неравенства 769—777:

769. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = \frac{1}{2}$.

770. $(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1$.

771. $\log_{\frac{1}{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$.

772. $\lg \sin 2x - \lg \sin x = \lg \cos 2x - \lg \cos x + 2\lg 2$.

773. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = 1$.

774. $4\log_{16} \cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0$ $\left(\text{при условии } 0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$.

775. $\lg \sin \frac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x)$.

776. $\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1$.

777. $\log_{\frac{1}{3}}(27^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}) + 2\cos^2 x = \frac{2}{\log_{12} 3} + \log_9 (1 - 3^{0,5 + \cos 2x})^4$.

Подходящей заменой неизвестного сведите уравнения и неравенства 778—786 к квадратным:

778. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

779. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

780. $(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x}(3\operatorname{tg}^2 x)$.

781. $\log_{2\sin x}(2\cos x) + 2\log_{2\cos x}(2\sin x) > 3$.

782. $(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.

783. $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2\log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1$.

784. Для каждого действительного a решить уравнение

$$(\lg \sin x)^2 - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$$

785. Для каждого положительного числа a $(a \neq 1)$ решить уравнение

$$(\log_a \sin x)^2 + \log_a \sin x - a = 0.$$

786. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = a.$$

При решении задач № 774—796 нужно учесть свойство монотонности логарифмической функции (монотонного возрастания при основании большем единицы и убывания при основании меньшем единицы).

Решить неравенства:

787. $\log_{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{5}{2}x+3\right)\geqslant 0.$

788. $\log_{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)}(\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x)\geqslant 1.$

789. $\log_{\sqrt{3}\sin x+\cos x}(x^2+2x+1)\geqslant 0.$

790. $\log_{\sin x-\cos x}(\sin x-5\cos x)\geqslant 1.$

791. $\log_a \cos x>0$, где $a=\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x.$

792. $\log_{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)<1.$

793. $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1.$

794. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\frac{5}{12}}<-1.$

795. $\log_{2\sin x}\sqrt{1+2\cos 2x}<\frac{1}{2}.$

796. $\log_{\operatorname{tg} x}\left|\frac{1-\cos^2 x-\frac{3}{4}\sin 2x}{\cos^2 x}\right|<1.$

797. $\log_{|\sin x|}(x^2-8x+23)>\frac{3}{\log_2|\sin x|}.$

798. Найти все решения неравенства

$$\log_{|\cos x+\sqrt{3}\sin x|}\frac{1}{2}>0$$

из промежутка $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

799. Решить неравенство

$$\sqrt{1-\log_{\operatorname{tg} x}2}\cdot[1-3\log_{\operatorname{tg} x}2+2(\log_{\operatorname{tg} x}2)^2]\geqslant 0.$$

800. Решить неравенство

$$(\log_{\sqrt{x}}\sin x)\cdot\log_{2^x}\left[\frac{1}{9}(2^{2x-2}-3\cdot 2^{x-2}-1)\right]\leqslant 0.$$

801. Решить неравенство

$$\sqrt{\operatorname{tg} x-1}\cdot[\log_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x)-2]\geqslant 0.$$

802. Решить неравенство

$$\sqrt{4\sin^2 x - 1}\cdot\log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1}\geqslant 0.$$

803. Найти все решения системы

$$\begin{cases}\dfrac{1+x^2+xy}{x+y}=2-y,\\ \log_{2^{1-y}}2^{x^2}=1+y.\end{cases}$$

804. Найти решения системы

$$\begin{cases}\log_2 x\cdot\log_y 2+1=0,\\ \sin x\cdot\cos y=1-\cos x\cdot\sin y,\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x+y<8$.

805. Найти все решения системы

$$\begin{cases}1+\dfrac{\log_2 21-1}{\log_2\dfrac{x-y}{21}}=\log_{\frac{x-y}{21}}2\cdot\log_2(x+y),\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(x-2)}{2}=\cos\dfrac{\pi y}{2}-\sin\dfrac{\pi y}{2}.\end{cases}$$

806. Найти решения системы

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(1-y+x^2)\cdot\cos 2x=\cos(y-1-x^2)\cdot\sin x\cdot\cos x,\\ \log_{2^x}\left(\dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}}\right)=2-x,\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $y-1-x^2+2x\geqslant 0$.

Решить следующие системы уравнений:

807. $\begin{cases}x\cdot 9^{y-x}+2y\cdot 3^{-x-y}=8\cdot 3^{-2x+y}\\ 3x\cdot 3^{2y+x}+2y\cdot 3^{2x-y+1}=72\cdot 9^{x-y}.\end{cases}$

808. $\begin{cases}x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2,\\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1.\end{cases}$

809. $\begin{cases}\log_2 x\cdot\log_x(x-3y)=2,\\ xy^{\log_x y}=y^{5/2}.\end{cases}$

Для нахождения решения задач № 810—830 используйте построение графиков функций, исследуйте области изменения обеих частей уравнений.

Решить уравнения:

810. $\sin x=x^2+x+1$. **811.** $2\sin x=5x^2+2x+3$.

812. $3x^2 = 1 - 2\cos x$.

813. $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

814. $2\cos \frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}$.

815. $2^{|x|} = \sin x^2$. **816.** $\sin x = 2^{x^2}$.

817. $3^{|x|} = \cos \frac{x}{3}$. **818.** $3^{|\sin \sqrt{x}|} = |\cos x|$.

819. Показать, что уравнение

$$2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{6} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

не имеет решений.

Решить уравнения:

820. $2^{1-x^2} + 2^{x^2-1} = 2\sin \frac{\pi y}{2}$.

821. $x^{\sin y} + (1-x)^{\cos y} = 1$.

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют соотношениям:

822. а) $|y| = \sin x$; b) $|x| = \sin y$.

823. $\log_{|\sin x|} y > 0$. **824.** $\log_{|\sin y|} x < 0$.

825. $\log_{\sin(x-y)} (x+y) = 0$. **826.** $\log_{(x-y)} \cos(x+y) = 0$.

827. $\log_{(1+y)} (1+\sin x) > 1$. **828.** $\log_{(1+\sin x)} (y - \cos x) \geqslant 0$.

829. $\begin{cases} x > \log_2 |y|, \\ y < x. \end{cases}$

830. $\log_{|\sin x \cdot \cos y|} |\sin x + \cos y| \geqslant 0$.

Часть III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Основные теоремы и формулы планиметрии. I. Треугольники.

Определение. Два треугольника называются равными, если они при наложении могут быть совмещены всеми своими точками.

Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если выполняется одно из условий:

а) Две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника.

б) Два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника.

в) Три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника.

Биссектриса внутреннего угла треугольника — прямая, которая делит данный угол на две равные части.

а) Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

б) Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке (O), являющейся центром окружности, вписанной в треугольник (т. е. касающейся всех его сторон).

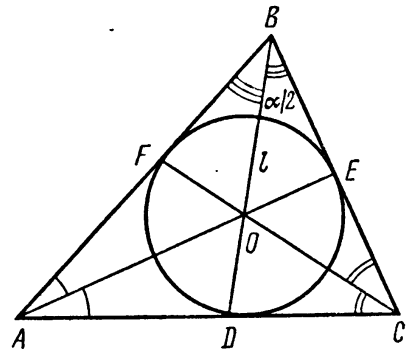


Рис. 19

в) Биссектриса (BD, рис. 19) любого угла треугольника (ABC) делит противоположную сторону на части

(AD и DC), пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

г) Длина l биссектрисы (BD, рис. 19) угла треугольника (ABC), равного α, заключенного между сторонами $AB=c$ и $BC=a$, определяется по формуле

$$l=\frac{2ac\cos\frac{\alpha}{2}}{a+c}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}.$$

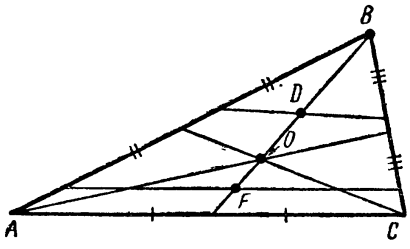


Рис. 20

Медианой треугольника называется отрезок прямой, проведенной из вершины треугольника и делящей противоположную сторону на две равные части.

а) Медиана есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана (рис. 20).

б) Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке, называемой центром тяжести треугольника;

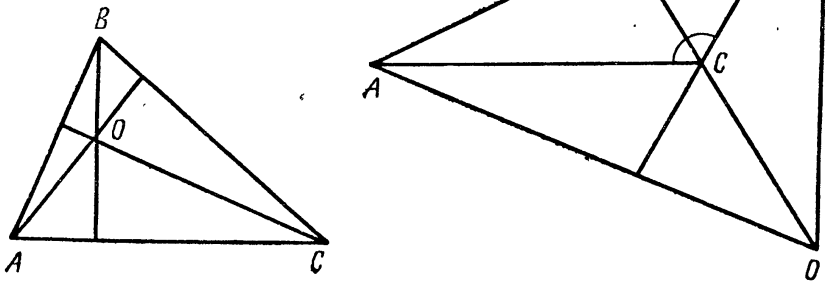


Рис. 21

эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение. Три высоты

треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентре) (рис. 21).

Срединный перпендикуляр — перпендикуляр, восстановленный к стороне треугольника из ее середины. Все три срединных перпендикуляра пересекаются в одной точке (лежащей внутри или вне треугольника), являющейся центром описанной вокруг треугольника окружности (рис. 22).

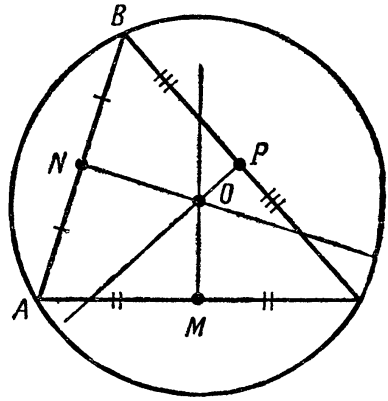


Рис. 22

Определение. Два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

Признаки подобия треугольников. Два треугольника подобны, если выполняется одно из условий:

а) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого;

б) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны;

в) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого (рис. 23).

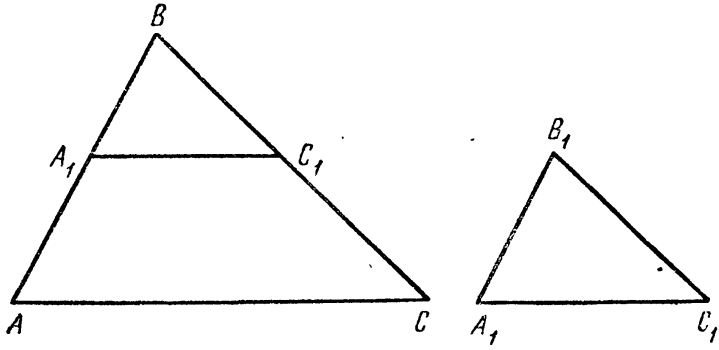


Рис. 23

Отношение любых сходственных линейных элементов подобных треугольников (сторон, медиан, биссектрис, периметров, радиусов вписанных и описанных окружно-

стей и т. п.) одно и то же и называется коэффициентом подобия k:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{l}{l_1}=\frac{m}{m_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{R}{R_1}=\frac{p}{p_1}=\ldots=k$$

(l — биссектрисы, m — медианы, p — периметры, r, R — радиусы вписанной и описанной окружностей).

Отношение любых сходственных квадратичных элементов подобных треугольников (площадей и т.п.) одно и то же и равно квадрату коэффициента подобия k^2:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=k^2.$$

Теорема синусов. Во всяком треугольнике отношение любой стороны к синусу противолежащего ей угла постоянно и равно диаметру описанной вокруг треугольника окружности (рис. 24).

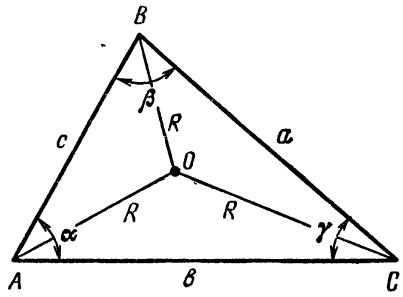


Рис. 24

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\beta}=2R$$

($\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$, R — радиус описанной окружности).

Теорема косинусов. Во всяком треугольнике квадрат одной из сторон (BC, рис. 24) равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла, заключенного между ними

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha.$$

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов (AB и AC) равна квадрату гипотенузы (BC)

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

Площадь треугольника. Для нахождения площади треугольника S со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ и противолежащими им углами $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ (рис. 6) наиболее употребительны следующие формулы:

а) $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,

где h_a, h_b, h_c,— высоты треугольника, проведенные к соответствующим сторонам,

б) $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$,

в) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p=1/2\ (a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Если радиус окружности, вписанной в треугольник, равен r, а радиус описанной окружности — R, то имеют место соотношения:

г) $S=p\cdot r$,

д) $S=\frac{abc}{4R}$.

Первая из этих формул справедлива также для любого многоугольника, в который можно вписать окружность.

II. Четырехугольники. Четырехугольник называется выпуклым (рис. 25), если он расположен по одну сторону от любой из своих сторон.

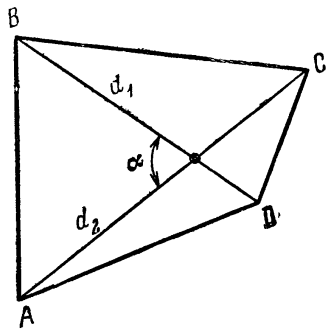


Рис. 25

Если диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 и образуют угол α, то площадь четырехугольника дается формулой

$$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\sin\alpha.$$

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.

Площадь параллелограмма дается формулами

а) $S=a\cdot h$,

б) $S=ab\sin\alpha$,

где a, b — смежные стороны параллелограмма, h — высота, α — угол между смежными сторонами.

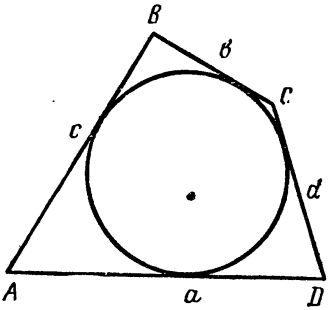
Трапеция — это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h дается формулой

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

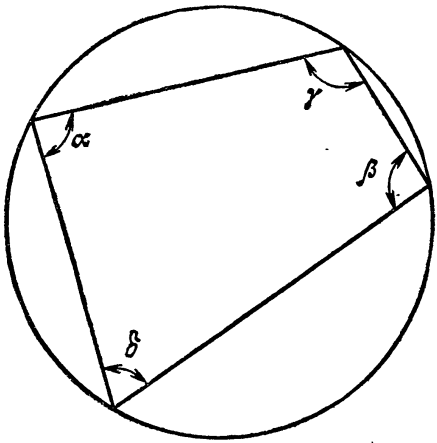
Теорема I. *Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны друг другу* (рис. 26а).

Теорема II. *Для того чтобы вокруг выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны двум прямым* (рис. 26б).



$a+b=c+d$

Рис. 26 а



$\alpha+\beta=\gamma+\delta=\pi$

Рис. 26 б

III. Окружность, круг и их части. Окружность — геометрическое место точек, удаленных на расстояние R от заданной точки O (центра). Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

а) Длина окружности $C = 2\pi R$,

б) Площадь круга $S = \pi R^2$.

Центральный угол — угол, имеющий своей вершиной центр круга (рис. 27). Если α — число радианов в центральном угле, то

а) длина дуги l, на которую опирается центральный угол, равна

$$l = R \cdot \alpha;$$

б) площадь S центрального сектора $OADB$ равна

$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha,$$

где R — радиус круга;

в) площадь сегмента ADB определяется как разность площади сектора $OADB$ и площади треугольника OAB

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha).$$

Вписанный угол — угол образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности (рис. 27).

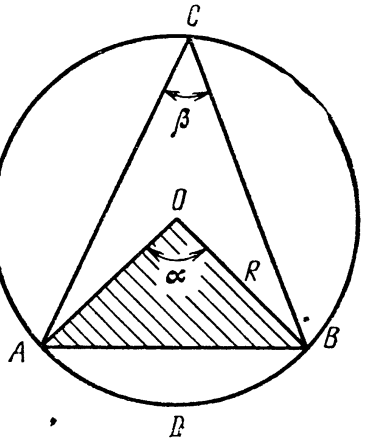


Рис. 27

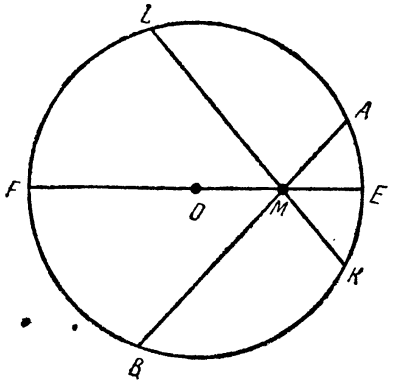


Рис. 28

Величина вписанного угла β равна половине величины центрального угла α, опирающегося на ту же дугу окружности

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Пропорциональные линии в круге.

а) Теорема I. *Если через точку* (M, рис. 28), *взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд* (AB, EF, KL ...), *то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд*

$$AM \cdot MB = DM \cdot MC = KM \cdot ML = EM \cdot MF = \ldots = \text{const}.$$

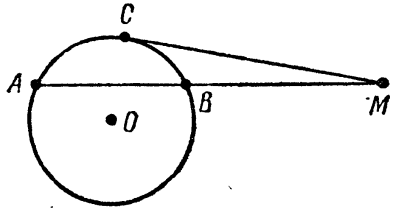


Рис. 29

б) Теорема II. *Если из точки* (M, рис. 29), *взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая* (MA) *и касательная* (MC), *то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной*

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

IV. Геометрическое место точек. Определение. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такое множество точек, которое содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им:

а) геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку прямой, соединяющей эти точки, через его середину;

б) геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла, является биссектрисой этого угла.

Вспомогательные задачи. Найти геометрические места точек:

1) середин всех отрезков, проведенных из данной точки к различным точкам данной прямой;

2) точек, равноотстоящих от двух параллельных прямых;

3) вершин треугольников, имеющих общее основание и равные высоты;

4) точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку;

5) центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой;

6) оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B;

7) середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку;

8) вершин треугольников, имеющих одинаковое основание и одинаковый угол при вершине, противолежащей общему основанию;

9) точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная;

10) точек, расстояние которых от сторон данного угла имеет одно и то же отношение $m:n$.

V. Задачи на построение. Задачи на построение — это задачи, выполняемые с помощью циркуля и линейки. Решение таких задач состоит из четырех основных частей.

а) Анализ задачи. В этой части, полагая, что задача решена, разыскивают такие зависимости между данными задачи и искомыми величинами, которые позволили бы свести задачу к другим, известным ранее.

б) Построение. Выполняется построение согласно найденному плану решения.

в) Доказательство. На основании известных теорем производится доказательство того, что полученная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи.

г) Исследование задачи. Проводится определение условий, при которых задача имеет решение, определяется число решений, исследуются особые случаи.

Вспомогательные задачи. Построить:

1) треугольник по трем медианам;

2) треугольник по трем высотам;

3) прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов;

4) прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов;

5) треугольник по медиане, биссектрисе и высоте, исходящим из одной вершины;

6) ромб по стороне и диагонали;

7) прямую, проходящую через заданную точку внутри угла и отсекающую от сторон угла равные части;

8) точку внутри прямоугольника, из которой стороны прямоугольника видны под равными углами;

9) прямую, проходящую через заданную внутри или вне угла точку так, чтобы отрезки ее, заключенные между этой точкой и сторонами угла, имели данное отношение $m:n$.

10) прямоугольник, который вписан в данный треугольник с заданным отношением сторон $m:n$.

* * *

831. В окружность радиуса $R=1$ вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в два раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

832. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 5 *см*, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 2 *см*. Найти периметр этого треугольника.

833. В ромб площадью $S=1$ вписан круг площадью $S_1=\frac{1}{2}$. Определить длину стороны ромба.

834. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании

треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают (центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан).

835. В равнобочную трапецию, верхнее основание которой равно единице, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.

836. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что

$$AM = BM = 2, \quad CM = 1.$$

837. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1:3, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади исходного треугольника?

838. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность радиуса 1,2. Найти площадь этого четырехугольника.

839. Определить длину перпендикуляра EH, восстановленного из точки E к стороне AB треугольника ABC (H — точка пересечения данного перпендикуляра с одним из отрезков AC или CB), зная длины сторон $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{17}$ и зная, что данный перпендикуляр делит треугольник на две фигуры равной площади.

840. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, в полтора раза меньше радиуса описанной окружности. Найти отношение основания к боковой стороне.

841. Около окружности единичного радиуса описана равнобочная трапеция, у которой одно основание вдвое больше другого. Определить среднюю линию трапеции.

842. В окружность радиуса $R = 1$ вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

843. Найти площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 30°$, $AC = BC$ и периметр треугольника равен 5.

844. В треугольник ABC вписан квадрат таким образом, что одна из его сторон лежит на стороне AB треугольника ABC. Найти сторону этого квадрата, если

$$AB = AC = 8, \text{ а } BC = 8\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

845. Дан треугольник ABC. Точка L делит сторону BC пополам. Точка K делит пополам отрезок BL. Из вершины A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника ABC отрезки $LD = AL$ и $KF = \frac{1}{3} AK$. Найти отношение площадей треугольника ABC и четырехугольника $KLDF$.

846. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD угла ABC и AE угла BAC (точка D лежит на стороне AC, а точка F на стороне BC). Найти отношение площадей треугольников ABC и CDF, если известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 3$.

847. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD угла BAC и CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, а точка F на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

848. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $\frac{CD}{BC} = \alpha \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что CD равняется DE.

849. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, лежащей между точками B и C, причем $\frac{BD}{BC} = \alpha \, (\alpha < 1)$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке E. Найти отношение площадей треугольников ABD и ECD.

850. На стороне AB треугольника ABC между точками A и B взята точка D так, что $\frac{AD}{AB} = \alpha \, (\alpha < 1)$. На стороне BC между точками B и C взята точка E так, что $\frac{BE}{BC} = \beta \, (\beta < 1)$. Через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей треугольников BDE и BEF.

851. На продолжении стороны AB треугольника ABC отложен отрезок AD так, что $\frac{AD}{AB}=\alpha$. На продолжении медианы BF отложен отрезок EF так, что $\frac{EF}{BE}=\beta$. Найти отношение площадей треугольников BDF и ABC.

852. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=\beta$. Параллельно AC проведена средняя линия треугольника, продолженная до пересечения с окружностью в точках D и E. Вершина B треугольника соединена отрезками прямых с точками D и E. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE.

853. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=\beta$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке D и окружность в точке E. Вершина B соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников ABE и BDE.

854. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3\sqrt{39}$ и $BC=\sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол $BAD=30°$ и угол $ADC=60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

855. Дана трапеция $PQRN$ с основаниями $PN=8$, $QR=4$, стороной $PQ=\sqrt{28}$ и углом $RNP=60°$. Через точку R проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

856. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N, так что $BN=NC$ и $AM=2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5+\sqrt{3}$, $\angle BAD=90°$ и $\angle ABC=60°$.

857. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $\frac{1}{2}$. Найти острые углы треугольника.

858. В круг вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC$ и $\angle BAC=\alpha$. Из вершины C прове-

дена прямая, составляющая с AC угол, равный $\frac{\alpha}{4}$, и проходящая внутри треугольника, которая пересекает окружность в точке E.

Эта прямая пересекается с биссектрисой $\angle BAC$ в точке F. Вершина A треугольника соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников AFC и AEC.

859. В остроугольный треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр лежит на стороне AB, а дуга касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, касающейся дуги этого полукруга и сторон AC и BC треугольника, если $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\alpha$.

860. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC=2$ и $AD=10$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (вокруг трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$.

Найти также отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.

861. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB=1$, $BC=2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая перпендикулярна стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

862. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC=1$ и $AD=3$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (вокруг трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти площадь описанного круга.

863. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D, такой, что $DA=DB$. Найти длину стороны BC.

864. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD, длины сторон равны: $AD=5$, $AB=1$, $CD=4$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD?

865. Прямоугольные треугольники ACB и ADB лежат по одну сторону от их общей гипотенузы AB. Угол CAB равен α, угол ABD равен β, причем и α и β больше $\frac{\pi}{4}$. На AD взята точка M, а на CB — точка N так, что отрезок MN параллелен AB. Найти отношение площадей треугольников ACM и BDN.

866. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника так, что одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

867. Вокруг равнобедренного треугольника ABC описана окружность. Через вершину A проведена хорда длины m, пересекающая основание BC в точке D. Даны отношение $\frac{BD}{DC}=k$ и угол $A\left(A<\frac{\pi}{2}\right)$. Найти радиус окружности.

868. Вокруг круга радиуса $R=1$ описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

869. Заданы два равносторонних треугольника, каждый площадью 1, второй получается из первого поворотом на угол 30° около его центра. Вычислить площадь общей части этих треугольников.

870. В круг радиуса $R=1$ вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

871. Вычислить площадь общей части двух ромбов, из которых у первого диагонали равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° около его центра.

872. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них касается двух других внешним образом. Две из них имеют радиус 3, а третья — радиус 1. Найти площадь треугольника ABC, где A, B и C — соответствующие точки касания трех окружностей.

873. В равнобедренном треугольнике дана боковая сторона b и угол при основании α. Вычислить расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной окружности.

874. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса r, проведена секущая, не проходящая через центр O окруж-

ности. Пусть B и C — точки, в которых секущая пересекает окружность. Найти

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOB}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2},$$

если $OA=a$.

875. AOB — сектор круга радиуса r. Угол AOB равен $\alpha\,(\alpha<\pi)$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающейся хорды AB, дуги $\overset{\smile}{AB}$ и биссектрисы угла AOB.

876. Даны две концентрические окружности радиусов r и R. Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, не проходящая через центр окружностей и пересекающая бо́льшую окружность в точках B и C. Пусть перпендикуляр к BC в точке P пересекает меньшую окружность в точке A. Найти сумму $PA^2+PB^2+PC^2$.

877. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности S_1. Окружность S_2 имеет центр D и радиус DA. Из точки D проведены два луча, пересекающие окружность S_1 в точках P и Q, а дугу $\overset{\smile}{AB}$ окружности S_2, лежащую внутри окружности S_1, — в точках M и N. Пусть P' и Q' — проекции точек P и Q на диаметр AB. Доказать, что фигура, ограниченная дугами $\overset{\smile}{PQ}$, $\overset{\smile}{MN}$ и отрезками MP, NQ, равновелика треугольнику $DP'Q'$.

878. Из точки A, лежащей на окружности радиуса r, проведены две хорды AC и AB. Эти хорды лежат по одну сторону от диаметра окружности, проходящего через точку A. Дана длина b большей хорды и угол $BAC=\alpha$. Найти радиус окружности, которая касается хорд AB и AC и дуги $\overset{\smile}{BC}$.

879. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B\neq\angle C$). Найти котангенс острого угла, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

880. На одной из сторон угла, равного α, даны две точки, расстояния которых до другой стороны b и c. Найти радиус окружности, проходящей через эти две точки и касающейся другой стороны.

881. В треугольнике ABC даны углы A, B, C и радиус R описанной вокруг него окружности. Внутри этого треугольника взяты две точки P и Q такие, что $\angle PCA=\angle QCB=\frac{C}{3}$, $\angle PAC=\frac{A}{3}$, $\angle QBC=\frac{B}{3}$. Найти площадь треугольника PQC.

882. В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB с центральным углом $\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на радиусе OA, третья вершина на радиусе OB, а четвертая вершина — на дуге AB. Найти отношение площадей квадрата и сектора.

883. Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, катеты которого равны a ($CA = CB = a$), взята точка P такая, что $\angle PAC = \frac{\pi}{12}$, $\angle PBC = \frac{\pi}{24}$. Найти расстояние от точки P до центра вписанной окружности.

884. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них внешним образом касается двух других. Радиусы окружностей относятся как 1:2:3. Вычислить углы треугольника, вершины которого расположены в точках касания.

885. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

886. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найти длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

887. Угол при основании равнобедренного треугольника ABC равен $\alpha\,(\alpha > 45°)$, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC.

§ 2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Основные теоремы стереометрии. 1. Теоремы о параллельности прямых и плоскостей.

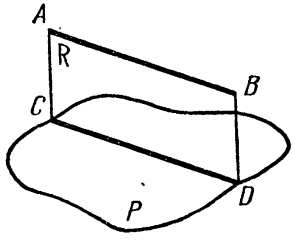


Рис. 30

а) Если прямая (AB, рис. 30) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

б) Если плоскость (R, рис. 30) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).

в) Если две параллельные плоскости (P и Q, рис. 31) пересекаются третьей плоскостью (R), то линии пересечения (AB и CD) параллельны.

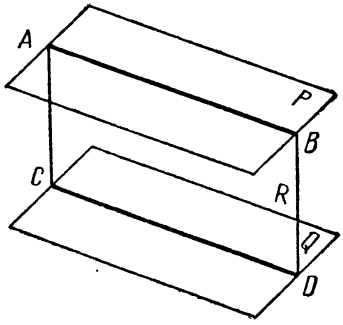


Рис. 31

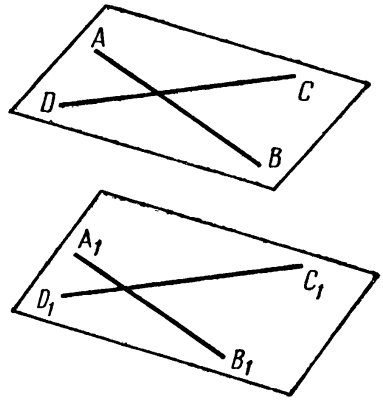


Рис. 32

г) Если две пересекающиеся прямые (AB и DC, рис. 32) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и D_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны.

2. Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей.

а) Для того чтобы прямая (AB, рис. 33) была перпендикулярна плоскости (P), необходимо и достаточно, чтобы

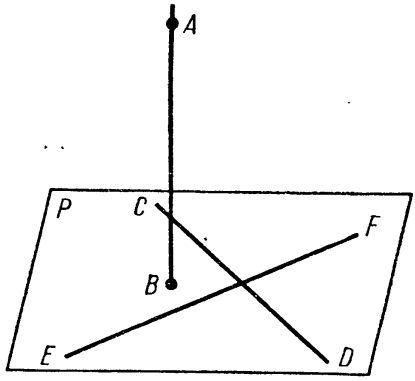


Рис. 33

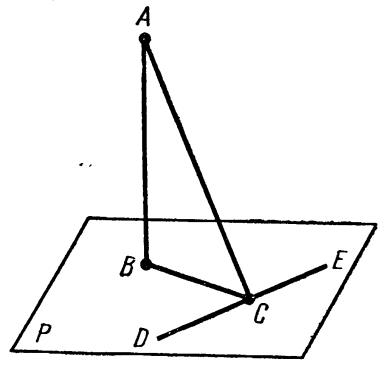


Рис. 34

она была перпендикулярна к двум произвольным непараллельным прямым (CD и EF), лежащим в этой плоскости.

б) Для того чтобы прямая (DE, рис. 34), проведенная на плоскости (P) через основание наклонной (AC), была

ей перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна к проекции наклонной (BC) на плоскость (P). (Достаточное условие этой теоремы носит название «теоремы о трех перпендикулярах» AB, BC, AC.)

в) Если две прямые (AB и CD, рис. 35) перпендикулярны к одной плоскости (P), то они параллельны между собой.

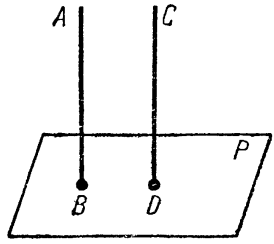


Рис. 35

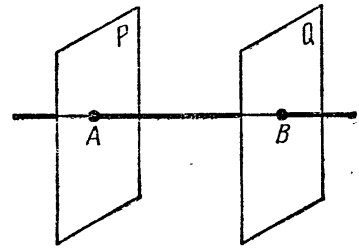


Рис. 36

г) Если две плоскости (P и Q, рис. 36) перпендикулярны к одной прямой (AB), то они параллельны между собой.

3. Скрещивающиеся прямые.

а) Угол φ между скрещивающимися прямыми (AB и CD, рис. 37) определяется как угол между одной из этих прямых (например, CD) и любой прямой (A_1B_1), проходя-

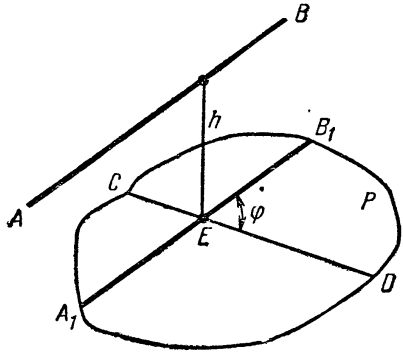


Рис. 37

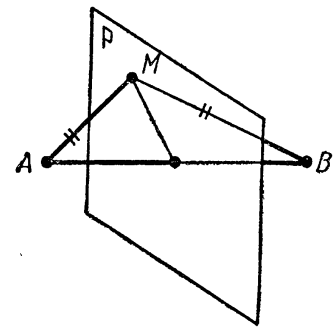


Рис. 38

щей через ее произвольную точку (E) параллельно другой прямой.

б) Расстояние h между скрещивающимися прямыми (AB и CD, рис. 37) находится как расстояние от одной

из этих прямых (например, AB) до плоскости (P), проходящей через другую прямую (CD) параллельно первой.

4. Основные геометрические места точек в пространстве.

а) Геометрическим местом точек, удаленных на расстояние R от данной точки (O), называется сфера радиуса R с центром в этой точке.

б) Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух точек пространства (A и B, рис. 38), является плоскость (P), перпендикулярная к отрезку прямой, соединяющей эти точки, и проходящая через его середину.

в) Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех точек (A, B, C, рис. 39) пространства, не лежащих на одной прямой, является прямая MN, перпендикулярная к плоскости (P), в которой лежат эти точки и которая проходит через центр окружности, проведенной через эти точки.

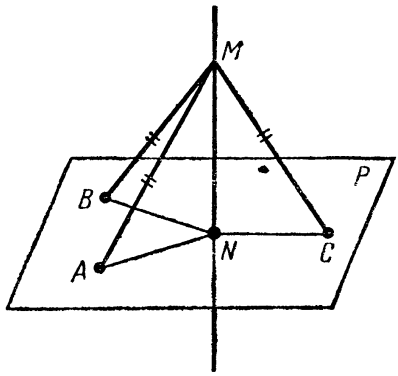


Рис. 39.

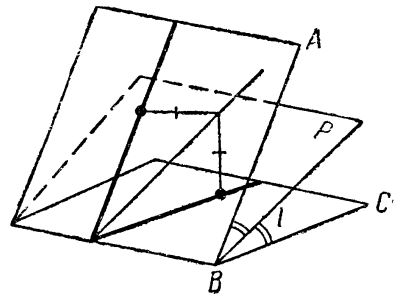


Рис. 40

г) Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон двугранного угла, является биссектральная плоскость (P, рис. 40), проходящая через ребро двугранного угла и пересекающая любой линейный угол двугранного угла (ABC) по биссектрисе (l).

II. Основные формулы стереометрии

1. Многогранники.

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

а) Призма (рис. 41). Площадь боковой поверхности прямой призмы $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$ ($P_{осн}$ — периметр основания, H — высота):

объем $V = S_{осн} \cdot H$ ($S_{осн}$ — площадь основания).

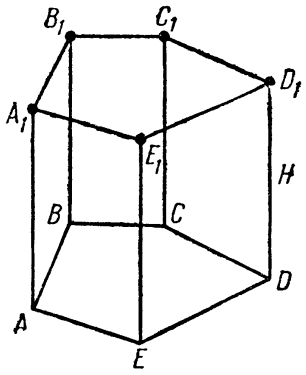


Рис. 41

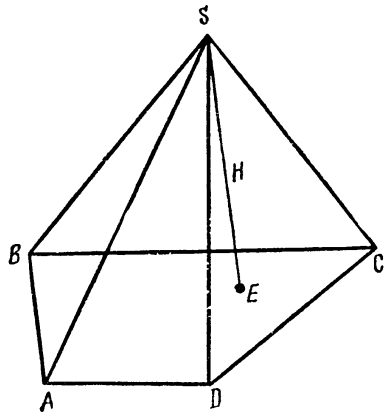


Рис. 42

б) Пирамида. Объем (рис. 42) $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ ($S_{осн}$ — — площадь основания, H — высота),

объем усеченной пирамиды (рис. 43) $V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})\, H$ (S_1, S_2 — площади оснований, H — высота).

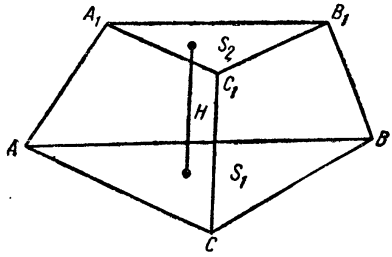


Рис. 43

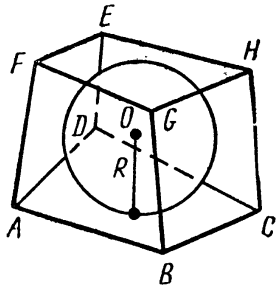


Рис. 44

в) Объем многогранника, описанного вокруг шара радиуса R (рис. 44)

$$V = \frac{1}{3} S_п \cdot R$$

($S_п$ — площадь поверхности многогранника).

2. Круглые тела.

Круглые тела — тела, состоящие из поверхностей вращения:

а) Цилиндр (рис. 45).

Площадь боковой поверхности $S_{бок} = 2\pi RH$ (R — радиус основания, H — высота),

объем $V = \pi R^2 H$.

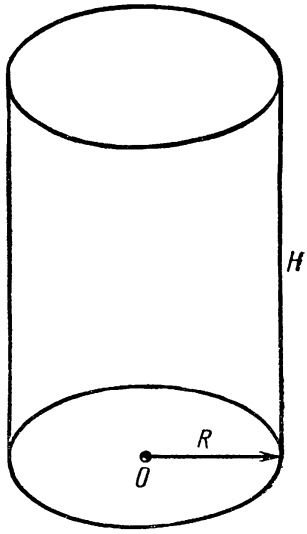


Рис. 45

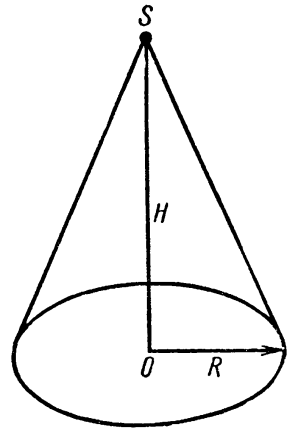


Рис. 46

б) Прямой круговой конус (рис. 46).

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок} = \pi RL$ (R — — радиус основания, L — образующая),

площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок} = = \pi (R_1 + R_2) L$ (R_1, R_2 — радиусы оснований, L — образующая),

объем конуса $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ ($S_{осн}$ — площадь основания),

объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})\, H$ (S_1, S_2 — площади оснований).

в) Сфера, шар.

Площадь сферы $S = 4\pi R^2$ (R — радиус сферы),

Площадь шарового пояса $S_{ш.\,п.} = 2\pi R \cdot H$ (H — высота шарового пояса),

площадь шарового сегмента $S_{ш.\,с.} = 2\pi R \cdot H$ (H — высота сегмента),

объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R — радиус шара),

объем шарового сектора $V = \frac{1}{3} S_{ш.\,п.} \cdot R$ ($S_{ш.\,п.}$ — площадь шарового пояса).

III. Вспомогательные задачи. Перед тем как перейти к систематическому решению задач по стереометрии, целесообразно решить нижеследующие вспомогательные задачи. Приемы, которые необходимо использовать для решения этих задач, характерны для ряда более сложных задач экзаменационного характера.

I. Правильная треугольная пирамида (рис. 47).

1. Доказать равносильность определений.

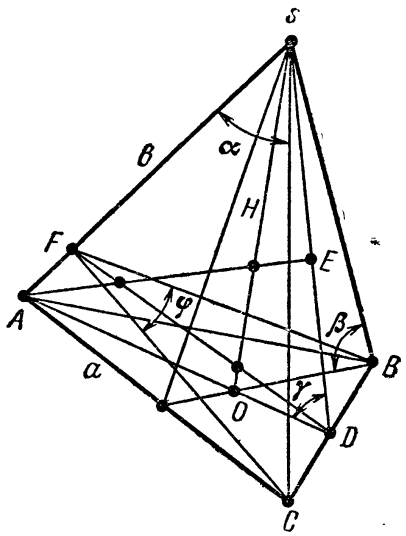


Рис. 47

Определение I: правильной треугольной пирамидой называется такая треугольная пирамида, у которой в основании лежит правильный треугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр основания.

Определение II: правильная треугольная пирамида — это такая пирамида, у которой в основании лежит правильный треугольник, а все боковые ребра равны между собой.

2. Доказать, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны ($SA \perp BC$, $SB \perp CA$, $SC \perp AB$).

3. Доказать, что плоскость, проходящая через боковое ребро и высоту правильной треугольной пирамиды, перпендикулярна грани пирамиды, противолежащей этому ребру (пл. $\triangle ASD \perp$ пл. $\triangle SBC$).

4. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из любой вершины при основании правильной треугольной пирамиды на противолежащую ей грань, попадает на апофему этой грани ($AE \perp$ пл. $\triangle SBC$).

5. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте этой пирамиды.

6. Доказать, что центр сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды.

7. Пусть плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен $\alpha\left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$. Построив плоскость сечения пирамиды, проходящую через одну из сторон основания перпендикулярно противолежащему ребру (например, пл. $\triangle BCF$), определить двугранный угол (φ) между боковыми гранями пирамиды.

Ответ: $\varphi = 2\arcsin\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

8. Правильную треугольную пирамиду можно задать двумя элементами. Пусть дана сторона основания пирамиды a и высота пирамиды H. Найти:

а) Боковое ребро пирамиды.

Ответ: $b = \sqrt{H^2 + \frac{1}{3}a^2}$.

б) Угол при вершине пирамиды.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{6H^2 - a^2}{6H^2 + 2a^2} = 2\arcsin\dfrac{a}{2b}$.

в) Угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Ответ: $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{H\sqrt{3}}{a}$.

г) Угол между боковыми гранями пирамиды.

Ответ: $\varphi = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3H^2 + a^2}}{3H}$.

д) Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}H}{a}$.

е) Радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Ответ: $r = \dfrac{a^2}{12H}\left[-1 + \dfrac{H}{a}\sqrt{\dfrac{a^2}{H^2} + 12}\right]$.

ж) Радиус сферы, описанной вокруг пирамиды.

Ответ: $R = \frac{3H^2 + a^2}{6H}$.

з) Объем пирамиды.

Ответ: $V = \frac{\sqrt{3}\, a^2 H}{12}$.

9. Пусть дана сторона основания правильной треугольной пирамиды a и плоский угол при вершине пирамиды α. Найти все остальные элементы пирамиды (перечисленные в предыдущей задаче).

10. Пусть дана высота правильной треугольной пирамиды H и угол между боковыми гранями пирамиды φ (найти все остальные элементы, перечисленные в предыдущих задачах).

11. Доказать, что любое сечение правильной треугольной пирамиды, параллельное непересекающимся (скрещивающимся) ребрам, представляет собой прямоугольник. Найти сторону того прямоугольника, который является квадратом, если даны сторона основания пирамиды a и боковое ребро b.

2. Правильная четырехугольная пирамида (рис. 48). Правильной четырехугольной пирамидой называется такая пирамида, у которой в основании лежит квадрат, а все боковые ребра равны между собой.

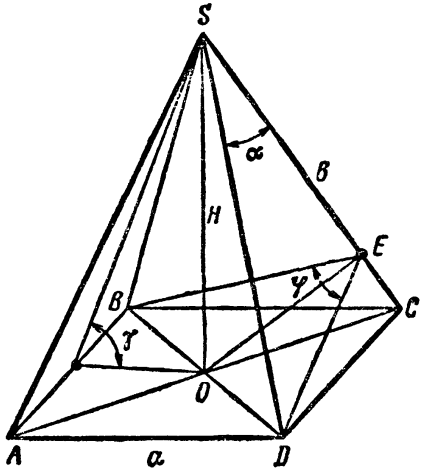


Рис. 48

12. Доказать, что вершина правильной четырехугольной пирамиды проектируется в центр основания.

13. Доказать, что плоскости, проходящие через вершину правильной четырехугольной пирамиды, и диагонали основания взаимно перпендикулярны.

14. Доказать, что каждое боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно непересекающейся с ним диагонали основания.

15. Доказать, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.

16. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг правильной пирамиды, лежит на ее высоте.

17. Правильную четырехугольную пирамиду можно задать двумя элементами. Пусть дана сторона основания пирамиды a и высота пирамиды H. Найти:

а) Боковое ребро пирамиды. Ответ: $b = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{2}}$.

б) Угол при вершине пирамиды. Ответ: $\alpha = \arccos \frac{2H^2}{2H^2 + a^2}$.

в) Угол между боковыми гранями пирамиды. Ответ: $\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{H}$.

г) Угол между боковой гранью и плоскостью основания. Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2H}{a}$.

д) Радиус сферы, вписанной в пирамиду. Ответ: $r = \frac{aH}{a + \sqrt{4H^2 + a^2}}$.

е) Радиус сферы, описанной вокруг пирамиды. Ответ: $R = \frac{2H^2 + a^2}{4H}$.

ж) Объем пирамиды. Ответ: $V = \frac{Ha^2}{3}$.

3. Куб.

18. Осью симметрии многогранника называется такая прямая, при повороте вокруг которой на некоторый угол, отличный от 0 и 360°, многогранник занимает свое прежнее положение в пространстве. Если этот угол обозначить $\varphi = \frac{360^\circ}{m}$, то число m называется порядком оси симметрии. Найти оси симметрии куба 2-го, 3-го и 4-го порядков.

19. Доказать, что диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагонали боковой грани.

20. Найти угол между диагональю куба и пересекающейся с ней диагональю боковой грани. Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба. Ответ: 60°.

22. Найти угол между скрещивающимися диагоналями параллельных граней куба. Ответ: 90°.

23. Доказать, что плоскость сечения куба, проведенная через концы трех ребер куба, исходящих из одной вершины, перпендикулярна диагонали куба; сечение представляет собой правильный треугольник; диагональ куба проходит через центр этого треугольника и делится такими сечениями на 3 равные части.

24. Доказать, что сечение куба, проведенное перпендикулярно диагонали куба и проходящее через середину непересекающегося с ней ребра куба, представляет собой правильный шестиугольник.

4. Построение сечений многогранников. При решении большинства стереометрических задач приходится в конечном счете иметь дело с рядом отдельных планиметрических задач. При этом „расчленение" каждой задачи в пространстве на несколько плоских задач чаще всего бывает связано с построением различного вида сечений рассматриваемой объемной фигуры.

Для успешного решения этой задачи нужно помнить о необходимости достаточно крупного, удобного для решения чертежа, на котором были бы видны все линии, фигуры и углы, которые используются при решении, а также проведены все вспомогательные построения.

Основные правила построения сечений состоят в следующем:

а) через три точки тела можно провести единственное сечение;

б) если две какие-либо точки принадлежат сечению, то принадлежит сечению и прямая, проходящая через эти точки. В том случае, если точки лежат на одной из граней многогранника, эта прямая является линией пересечения грани с сечением;

в) параллельные грани многогранника пересекаются сечением по параллельным прямым.

В следующих задачах требуется построить сечение многогранников плоскостями.

25. В каком отношении делит объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельные грани) плоскость, проходящая через точки M $(MD = MD_1)$, N $(AN = ND)$, Q $(BQ = 2QB_1)$?

26. В каком отношении делит объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через точки A, B_1 и M $(DM = MD_1)$?

27. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M $(AM=MD)$, N $(BN=NB_1)$, P $(D_1P=2PC_1)$.

28. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB=\frac{1}{2}BC$ $\left(MC=\frac{3}{2}BC\right)$. Через точку M и середины ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

29. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно 1.

30. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

31. Через одну из сторон основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объема V. Определить площадь сечения.

32. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания a, а высота h. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух не смежных и не параллельных сторон основания и через середину высоты.

33. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

* * *

888. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

889. Определить синус угла между двумя высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

890. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

891. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и оно наклонено к плоскости основания под углом β. Найти сторону квадратного сечения, проведенного параллельно двум непересекающимся ребрам пирамиды.

892. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно b. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающегося плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC.

893. В пирамиде $ABCD$ $AB=6$, $CD=8$, остальные ребра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

894. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.

895. Объем правильной треугольной пирамиды равен $^1/_6$ куба бокового ребра. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

896. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

897. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость.

В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза больше стороны основания?

898. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром $a\sqrt{2}$. Сфера проходит через точку A и касается боковых ребер SB и SC в их серединах. Найти радиус этой сферы.

899. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти радиус этой сферы.

900. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA=AB$ ($MB=2AB$). Через точки M, B_1 и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

901. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра A_1B_1 взята точка M так, что $B_1M=\frac{1}{2}A_1B_1$ $\left(A_1M=\frac{3}{2}A_1B_1\right)$. Через точку M и середины ребер A_1C_1 и B_1B проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

902. Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

903. Шар радиуса r касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна α. Доказать, что пирамида правильная. Найти длину бокового ребра пирамиды.

904. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды равен α. Сумма длин боковых ребер равна $3b$. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

905. Шар касается всех трех боковых граней треугольной пирамиды $SABC$ в точках пересечения их биссектрис. Из вершины S проведены биссектрисы SD и SE боковых граней SAB и SAC. Угол DSE равен α, объем пирамиды равен V. Доказать, что пирамида правильная. Найти периметр основания.

906. Высота треугольной пирамиды равна h, сумма девяти плоских углов при всех вершинах основания равна α. Известно, что существует шар, касающийся всех боковых граней в точках пересечения их медиан. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

907. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а периметр основания $3a$. Шар касается всех трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

908. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен $8\ см$. Каждое из боковых ребер пирамиды равно $9\ см$. Найти объем пирамиды.

909. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоские углы при вершине равны φ. Определить объем пирамиды.

910. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

911. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S—вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

912. Пусть S—вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны a. Через точку A и точку E ребра SC проведена плоскость перпендикулярно плоскости треугольника SAC, причем SE равно b. Определить объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

913. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S—вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C. Найти объем пирамиды ABO_1O_2.

914. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S проведена секущая плоскость P, параллельная стороне AB и проходящая через точку касания вписанного шара и грани SAB и через точку этого шара, ближайшую к вершине S. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P, если $AB=1$, $SA=\sqrt{5}/2$.

915. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти угол между смежными боковыми гранями.

916. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S—вершина) высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

917. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину

ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

918. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB = \frac{1}{2} BC \left(MC = \frac{3}{2} BC \right)$. Через точку M и середины ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

919. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. На продолжении ребер AB, AA_1, AD отложены соответственно отрезки BP, A_1Q, DR длиной $1{,}5AB$ ($AP = AQ = AR = 2{,}5AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

920. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро C_1B_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

921. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно 1.

922. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

923. Дана прямая призма, у которой основанием служит правильный треугольник. Через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и основанием призмы равен α, а площадь сечения призмы равна S. Определить объем призмы.

924. Определить объем параллелепипеда, у которого все ребра равны 1, а все плоские углы при одной из вершин равны $\varphi < 90°$.

925. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O, попарно перпендикулярны, и их длины равны a, b и c. Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной O.

926. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка

пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.

927. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6 *см*. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 *см*. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

928. Высота прямой призмы $h = 1$ *м*, ее основанием служит ромб со стороной 2 *м* и с острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая призму плоскость, с углом наклона к плоскости основания 60°. Найти площадь сечения.

929. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Через гипотенузу нижнего основания проведена плоскость так, что в сечении призмы получился равносторонний треугольник. Известно, что в призму можно вписать шар, касающийся боковых граней призмы, верхнего основания и сечения. Найти объем призмы.

930. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно l. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA_1.

931. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра A_1B_1 взята точка M так, что $B_1M = \frac{1}{2} A_1B_1$ $\left(A_1M = \frac{3}{2} A_1B_1\right)$. Через точку M и середины ребер A_1C_1 и B_1B проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

932. Через одну из сторон основания правильной трехгранной призмы проведена плоскость под углом α к основанию, отсекающая от призмы пирамиду объема V. Определить площадь сечения.

933. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

934. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы

шаров, если известны длина c стороны AB и прилежащие к ней углы A и B.

935. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус сферы, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.

936. Три сферы радиусов r, r и R внешним образом касаются друг друга и все касаются некоторой плоскости. Найти радиус сферы, касающейся данных сфер и этой плоскости.

937. Две равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и обеих данных сфер. Дано отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из равных сфер. Найти величину α двугранного угла. В каких границах может изменяться m?

938. Четыре равных шара радиуса r внешним образом касаются друг друга так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

939. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

940. В шар вписан прямой круговой цилиндр. Во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

941. Шар вписан в усеченный конус. Доказать, что площадь поверхности шара меньше боковой поверхности конуса.

942. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Определить высоту цилиндра.

943. Дан прямой круговой конус. Проводят различные сечения плоскостью через его вершину. Оказалось, что площадь максимального сечения в два раза больше площади осевого. Найти угол в осевом сечении.

944. В прямой круговой конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. В каком отношении боковая поверхность конуса делится линией касания шара и конуса?

945. Середина высоты прямого конуса с образующей l и углом при вершине α принята за центр шара, проходящего через вершину. Определить радиус круга, получившегося в результате пересечения указанных выше конуса и шара.

946. Две перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1:2. Найти объем конуса, если его высота равна h.

947. Найти объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром l и плоским углом α при вершине.

948. Плоскость, проведенная через центр шара, вписанного в конус параллельно плоскости основания конуса, делит объем конуса пополам. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

949. Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса $\left(\beta < \frac{\alpha}{2}\right)$ проведена плоскость. Найти угол между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

950. Ребро куба равно b. Найти объем конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не проходящих через вершину A.

951. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

952. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $AA' = a$. Точка E' — середина ребра $C'D'$, точка F' — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки E', F', A, C.

953. В точке M, находящейся на расстоянии $2h$ от плоскости основания куба с ребром h и на расстоянии $R > 3h$ от центра куба, помещен источник света. Доказать, что тень, отбрасываемая кубом на плоскость основания, будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость, проходящая через центр куба, точку M и одну из вершин, перпендикулярна плоскости основания.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ

§ 1. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Предварительные замечания. Очень широкий класс задач составляют так называемые экстремальные задачи, в которых требуется найти максимум или минимум некоторой функции действительного переменного $y=f(x)$.

1°. Определения. Говорят, что действительная функция $y=f(x)$, определенная при $x=x_0$, имеет в точке x_0 локальный максимум, если существует такая окрестность этой точки

$$x_0-\delta \leqslant x \leqslant x_0+\delta$$

($\delta > 0$ — достаточно малая величина), что для любых значений x из указанной окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x).$$

Аналогично определяется минимум функции. Функция $y=f(x)$, определенная при $x=x_0$, имеет в точке x_0 локальный минимум, если существует такая окрестность этой точки

$$x_0-\delta \leqslant x \leqslant x_0+\delta,$$

что для любых значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x).$$

Таким образом, в точке максимума возрастание функции сменяется на убывание и наоборот, в точке минимума убывание функции сменяется возрастанием. Например, функция, изображенная на рис. 49, в точке x_2 имеет локальный максимум, а в точках x_1 и x_3 — локальный минимум.

Максимум и минимум функции объединяют одним общим термином — экстремум. Локальный экстремум называется внутренним экстремумом или граничным экстремумом, если соответственно точка x_0 является внутренней точкой или граничной точкой области определения функции $f(x)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, следует искать

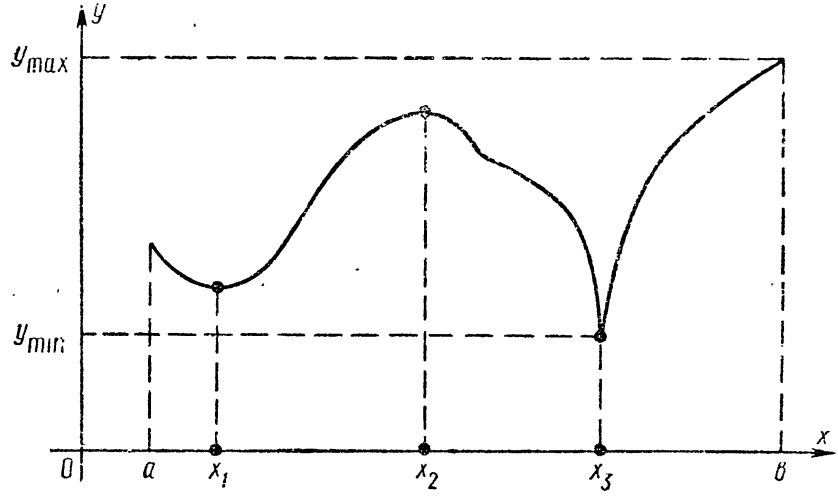


Рис. 49

среди внутренних максимумов и минимумов и граничных максимумов и минимумов. Например, функция, график которой представлен на рис. 49, достигает наибольшего значения на правом конце отрезка $[a, b]$ при $x = b$: $y_{max} = f(b) > f(x_2)$, а наименьшее значение — во внутренней точке отрезка $[a, b]$ при $x = x_3$: $y_{min} = f(x_3) < f(x_1) < f(a)$.

Отметим, что при решении задач на наибольшие и наименьшие значения должна быть точно указана область определения функции $f(x)$. Например, функция $f_1(x) = x\,(-\infty < x < +\infty)$ не имеет наибольшего значения, а функция $f_2(x) = x$ $(x \leqslant 1)$ имеет наибольшее значение, совпадающее с граничным максимумом, при $x = 1$.

2°. Отметим некоторые элементарные приемы общего и частного характера, позволяющие решать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений.

1. Исследование функции на монотонность. Функция $f(x)$ монотонна на некотором интервале, если она на нем определена и если для

любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала либо из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) < f(x_2)$ (возрастающая функция), либо же из $x_1 < x_2$ всегда следует $f(x_1) > f(x_2)$ (убывающая функция).

Если в интервале $a \leqslant x < x_0$ функция $y = f(x)$ монотонно возрастает (или убывает), а в интервале $x_0 < x \leqslant b$ монотонно убывает (или возрастает), то $f(x_0)$ является наибольшим (или наименьшим) значением $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В некоторых случаях исследование функции на монотонность позволяет находить ее наибольшие и наименьшие значения.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Решение. Отметим, что данная функция определена при любых действительных x и является нечетной: $f(-x) = -f(x)$. Поэтому достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$. Исследуем функцию на монотонность. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$; составим разность:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Поскольку знаменатель последнего выражения положителен при любых x_1 и x_2 и $x_1 - x_2 < 0$ по предположению ($x_1 < x_2$), то отсюда следует:

1) если $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$ (т. е. $1 - x_1x_2 > 0$), то $f(x_1) - f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$, и функция на этом промежутке возрастает;

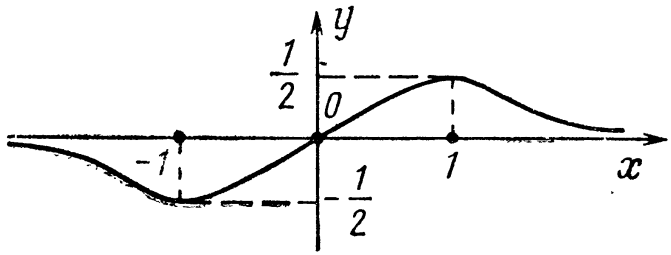


Рис. 50

2) если $1 < x_1 < x_2 < +\infty$ (т. е. $1 - x_1x_2 > 0$), то $f(x_1) - f(x_2) > 0$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$, и функция здесь убывает.

Итак, при $x=1$ функция принимает наибольшее значение $y_{\max}=f(1)=\frac{1}{2}$. В силу нечетности функции наименьшее значение достигается при $x=-1$ (в точке, симметричной относительно оси Oy точке максимума), $y_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$ (рис. 50). Заметим, что вообще использование свойства нечетности или четности функции облегчает нахождение ее экстремальных значений.

2. Исследование множества значений функции. Если множество значений функции $y=f(x)$ известно, то ее экстремальные значения (если они существуют) находятся непосредственно.

Для определения множества значений функции $y=f(x)$ достаточно аргумент x (если это возможно) выразить через y и найти область существования полученной обратной функции. Последняя и будет множеством значений исходной функции $y=f(x)$. Поскольку x выражается через y из уравнения

$$f(x)-y=0, \tag{1}$$

то вышесказанное равносильно нахождению множества всех значений параметра y, при которых уравнение (1) имеет действительные решения.

Предлагаемый способ нахождения экстремума функции особенно эффективен, если уравнение (1) является квадратным относительно x.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{x+1}{x^2+x+1}. \tag{2}$$

Решение. Данная функция определена при любых действительных x (квадратный трехчлен x^2+x+1, стоящий в знаменателе, не имеет действительных корней). Найдем множество ее значений. Из (2) имеем:

$$yx^2-(1-y)x+y-1=0.$$

Задача, таким образом, свелась к исследованию квадратного (относительно x) уравнения с действительным

параметром y. Это уравнение имеет действительные решения, если его дискриминант

$$D=(1-y)^2-4y\,(y-1)\geqslant 0,$$

$$(y-1)\,(-1-3y)\geqslant 0,$$

$$(y-1)\left(y+\frac{1}{3}\right)\leqslant 0. \qquad (3)$$

Решения неравенства (3): $-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$ и образуют множество значений данной функции. Отсюда следует, что наибольшее значение функции равно 1 ($y_{\max}=1$) и достигается при $x=0$, наименьшее значение $y_{\min}=-\frac{1}{3}$ и принимается при $x=-2$. График функции приведен на рис. 51.

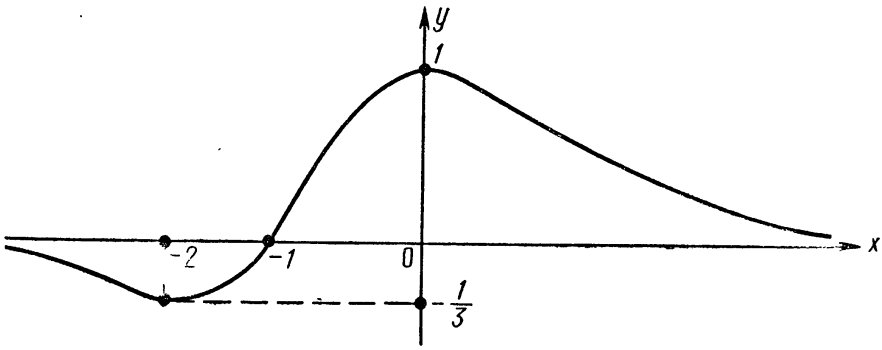


Рис. 51

3. Применение неравенств. 1) *Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом* (неравенство Коши).

Среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n$. При $n=2$ теорема о средних записывается в виде $\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$ (равенство имеет место при $x_1=x_2$) и является следствием очевидного неравенства

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0.$$

Если $x_1x_2=1$, то в качестве следствия отсюда получаем для любых $x>0$

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2 \text{ (равенство имеет место при } x=1).$$

Последнее соотношение можно обобщить на случай отрицательных значений x и для любых $x\neq 0$ записать в виде

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2 \tag{4}$$

(равенство имеет место при $x=1$ или $x=-1$).

При $n>2$ доказательство теоремы о средних можно получить методом математической индукции.

2) Следствия из теоремы о средних.

а) Произведение n положительных величин с данной суммой становится максимальным, когда все эти величины равны.

б) Сумма n положительных величин с данным произведением становится минимальной, когда все эти величины равны.

Заметим, что неравенство между средними содержит одновременно оба эти утверждения; чтобы получить то или другое, мы должны рассматривать как заданную ту или другую часть неравенства.

Теорема о средних позволяет решать многие (в частности, геометрические) задачи на максимум и минимум.

Пример 3. Площадь поверхности ящика, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равна S. Найти максимум его объема.

Решение. Пусть x, y, z — длины трех ребер ящика, выходящих из одной и той же вершины, V — объем. Очевидно,

$$S=2(xy+yz+zx),\ V=xyz.$$

Замечая, что сумма трех величин xy, yz и zx равна $S/2$, а их произведение равно V^2 и используя теорему о средних ($n=3$), получим

$$V^2=(xyz)^2\leqslant\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3=\left(\frac{S}{6}\right)^3,$$

причем равенство имеет место при

$$xy=yz=zx,$$

или, что то же самое,

$$x=y=z.$$

Иначе говоря, если ящик не является кубом, то $V < \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$. В противном случае осуществляется равенство.

Полученному результату можно дать две различные (хотя по существу эквивалентные) формулировки:

1) из всех ящиков с данной площадью поверхности куб имеет наибольший объем;

2) из всех ящиков с данным объемом куб имеет наименьшую площадь поверхности.

4. Исследование квадратного трехчлена. Выделяя полный квадрат, представим квадратный трехчлен в виде

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (a \neq 0).$$

Отсюда следует, что квадратный трехчлен при $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ имеет экстремальное значение, равное $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$; при $a > 0$ — это будет минимум $y_0 = y_{\min}$, а при $a < 0$ — максимум $y_0 = y_{\max}$.

Отметим, что x_0, y_0 суть координаты вершины параболы, являющейся графиком функции $y = f(x)$.

Приведенный выше результат позволяет находить экстремумы некоторых функций от квадратного трехчлена как, например, $[f(x)]^2$, $\sqrt{f(x)}$, $\frac{A}{f(x)}$ и т. п.

5. Исследование биквадратного трехчлена

$$y = ax^4 + bx^2 + c = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (a \neq 0).$$

Данная функция четная, поэтому достаточно ее исследовать при $x \geqslant 0$.

При $a > 0$ имеем

1) если $b > 0$, то $y = y_{\min} = c$ при $x = 0$;

2) если $b < 0$, то $y = y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ при $x = \pm\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ и $y = y_{\max} = c$ при $x = 0$;

3) если $b = 0$, то $y = y_{\min} = c$ при $x = 0$.

При $a < 0$ результаты можно сформулировать аналогично предыдущему.

Пример 4. Найти максимум функции

$$y = x\sqrt{1 - 4x^2}.$$

Решение. Данная функция определена, если $1-4x^2 \geqslant 0$, т. е. $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Поскольку $y>0$ при $x>0$ и $y<0$ при $x<0$, то данная функция может иметь максимум при положительных значениях x. Считая поэтому далее $0<x \leqslant \frac{1}{2}$ и вводя x под знак радикала, получим

$$y=\sqrt{x^2(1-4x^2)}.$$

Радикал имеет наибольшее значение, когда максимально подкоренное выражение, или, что то же самое, когда минимальна функция $\varphi(x)=-x^2(1-4x^2)=4x^4-x^2$. Имеем:

$$\varphi(x)=4x^4-x^2=4\left(x^2-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{16}.$$

Отсюда следует, что $\varphi=\varphi_{\min}$ при $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$. Этому значению x будет соответствовать максимум исходной функции:

$$y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

6. Использование свойств тригонометрических функций.

1) Ограниченность синуса и косинуса:

$$|\sin x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1 \text{ при любых } x.$$

2) Поскольку $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x=1$, то из неравенства (4) как следствие получаем

$$|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x| \geqslant 2$$

для любых $x \neq \frac{\pi}{2}(n+1)$[1], $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (равенство имеет место при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$).

3) Преобразование введения вспомогательного аргумента позволяет исследовать на экстремум функцию

$$y=a\sin kx+b\cos kx=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(kx+\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(kx-\beta),$$

[1] В этих точках $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ не определены.

где вспомогательные аргументы α или β определяются как одно из решений (любое) уравнений

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что данная функция $y=f(x)$ достигает наибольшего значения $y_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$, если $\sin(kx+\alpha)=1$ (или, что то же самое, $\cos(kx-\beta)=1$) и наименьшего значения $y_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}$, если $\sin(kx+\alpha)=-1$ (или $\cos(kx-\beta)=-1$).

3°. Условный экстремум. Иногда возникает задача об определении экстремума функции, зависящей от нескольких переменных величин, которые связаны между собой дополнительными соотношениями.

Пусть, например, некоторая величина u зависит от двух переменных x и y

$$u=f(x,\ y),$$

причем величины x и y не независимы между собой, а связаны дополнительным условием

$$\varphi(x,\ y)=0. \tag{5}$$

Требуется исследовать функцию $u=f(x,\ y)$ на максимум или минимум при условии (5), т. е. найти такие значения x_0, y_0, удовлетворяющие этому условию, при которых $f(x,\ y)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. Экстремумы такого типа называются *условными*.

Вообще говоря, функция u может зависеть от трех и более переменных величин, связанных условиями типа (5), которые могут быть представлены и в виде системы неравенств.

Иногда при нахождении условного экстремума удобно дать геометрическую интерпретацию решений системы дополнительных условий типа (5).

Пример 5. Среди решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 3, & \text{(а)} \\ 2x-y\leqslant 1, & \text{(б)} \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 & \text{(в)} \end{cases} \tag{6}$$

найти такое, для которого выражение $u=x^2+y^2$ имеет наибольшее значение.

Решение. Изобразим на плоскости множество точек (x, y), дающих решение системы (6). Условие (6, в) задает множество точек на плоскости, лежащих в I четверти, включая и положительные части осей координат $x=0$, $y=0$ (рис. 52). Условию (6, а) удовлетворяют точки на плоскости, расположенные ниже прямой $y=\frac{1}{2}(3-x)$. Условию (6, б) удовлетворяют точки, лежащие выше прямой $y=2x-1$. Тогда решения системы неравенств (6) изображаются точками на плоскости (x, y), заполняющими четырехугольник $ABCO$ (рис. 52), включая и точки, лежащие на его сторонах. Требуется найти такую точку (x, y) четырехугольника (лежащую внутри или на сторонах), для которой функция $u=x^2+y^2$ принимает наибольшее значение. Это нетрудно сделать с помощью графиков. Построим кривые $x^2+y^2=C$ (линии уровня функции u[1]). Это суть окружности (рис. 52) с центром в начале координат и радиусом $r=\sqrt{C}$ (на рис. 52 $C=\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}$). Из рис. 52 видно, что функция $u=x^2+y^2$ достигает максимума в точке $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ и $u_{\max}=\frac{9}{4}$.

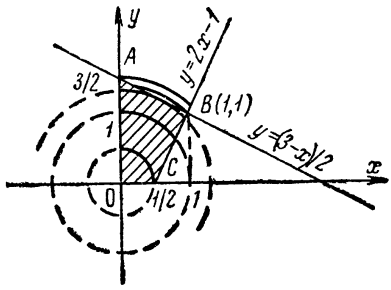


Рис. 52

К нахождению условного экстремума сводятся важные для практики задачи „линейного программирования". В общем виде эту задачу можно сформулировать так:

Дана система линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_n \leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{cases}$$

Из всех решений этой системы нужно выбрать такое, для которого данная линейная функция

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

[1] Линии, вдоль которых функция двух переменных остается постоянной величиной, называются линиями уровня этой функции.

принимает наименьшее (или наибольшее) значение.

К такой задаче сводится, например, значительная часть расчетов в экономике, связанная с нахождением оптимальных (наилучших) планов, вариантов и т. д.

Если число переменных величин x_1, x_2, ... невелико ($n=2$ или $n=3$), то такого типа задачи нетрудно решить с помощью геометрической интерпретации решений системы неравенств (пример 5) и построения линий уровня функции y.

А. Нахождение наибольших и наименьших значений функций

Определить, есть ли максимум или минимум у следующих функций:

954. a) $y=5x^2-6x$; b) $y=4x-x^2$;

c) $y=\frac{1}{x^2+x+1}$; d) $y=\frac{1}{2-x^2}$;

e) $y=\frac{4}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

955. $y=x^4-4x^2+5$.

956. a) $y=2\cos|x|$; b) $y=-5\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$.

957. $y=3\sin 2x+4\cos 2x$.

958. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$. **959.** $y=3^{|\sin x|}$.

960. a) $y=2^{-x^2}$; b) $y=10^{x^4}$.

961. $y=5^{\pi x}+5^{-\pi x}$.

962. a) $y=\frac{x^2}{x^4+1}$; b) $y=\frac{x}{x^2+1}$.

963. Найти наибольшее значение функций:

a) $y=\cos x\cdot\cos 2x$, b) $y=\sin x\cdot\sin 2x$.

Найти наименьшее и наибольшее значение функций:

964. a) $y=\frac{-2x+3}{x^2+6x+10}$, b) $y=\frac{2x-1}{2x-x^2-4}$.

965. $y=\left[\frac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{3/4}$ $(a\neq 0)$.

966. $y=-\cos^2 x-5\sin x+7$.

967. Найти максимум функции

$$y=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}.$$

968. Найти наибольшее значение функции

$$y = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x},$$

если $1 \leqslant x \leqslant 64$.

969. Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

970. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{1 + x^2}{1 + x}$$

при $x \geqslant 0$.

971. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:
а) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, b) $y = 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x$.

972. Найти наименьшее значение функции

$$y = (\sin x + \cos x)^3 + \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

973. Найти наименьшее значение выражения

$$\varphi = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2}.$$

974. Найти наименьшее значение многочлена:

а) $y = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6) + 9$,

b) $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Используя теорему о средних, решите задачи под № 975.

975. Найти наименьшее значение выражения

а) $A = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} + \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$,

где $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{3}$.

b) $B = \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

где α, β, γ — углы треугольника.

В. ЗАДАЧИ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Общий прием решения геометрических задач на максимум и минимум состоит в следующем: величина, экстремальное значение которой требуется найти, записывается как функция какого-либо параметра, удобного для данной задачи. Затем эта функция исследуется на экстремум. Однако иногда удается получить результат, непосред-

ственно используя геометрические соотношения и теоремы. В последнем случае решение является обычно более красивым и менее стандартным.

976. На окружности радиуса R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно r. Какое наибольшее значение может принимать сумма $M = AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

977. На одной стороне угла $\angle AOB$ задан отрезок MN. На другой стороне угла найти точку, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом.

978. Дана площадь S сектора круга. Найти значение центрального угла, при котором периметр сектора является наименьшим.

979. Даны площадь и угол треугольника. Найти минимум: a) суммы двух сторон, заключающих данный угол; b) стороны, противолежащей данному углу; c) всего периметра.

980. Среди всех треугольников с данным основанием a и данным углом α при вершине найти тот, a) площадь, которого будет наибольшей; b) периметр которого будет наибольшим.

981. Дан угол $\angle AOB$ и внутри его точка M. a) Провести через точку M прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади. b) Построить треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина лежала в данной точке M, вторая — на стороне AO и третья — на стороне BO данного угла. c) Провести через точку M прямую, пересекающую стороны угла в точках K и L так, чтобы сумма $OK + OL$ была наименьшей.

982. Среди всех прямоугольных треугольников с общей гипотенузой c найти тот, который имеет наибольший радиус вписанной окружности.

983. Доказать, что из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами четырехугольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь.

984. Сумма трех сторон прямоугольника равна 300. Найти наибольшее значение его площади.

985. В круг радиуса R вписывается данный угол α. Какими должны быть длины хорд, образующих этот угол, чтобы их сумма была наибольшей?

986. Из всех параллелепипедов с данной суммой s трех взаимно перпендикулярных ребер найти тот, объем которого наибольший.

987. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Сумма длин всех ее ребер равна l. a) Найти наибольшее значение боковой поверхности S. b) Дано, кроме того, что объем призмы равен V. При каких значениях V наибольшее значение S, достигающееся при этих условиях, совпадает с найденным в пункте «a»?

988. В правильной треугольной пирамиде сумма квадратов длин всех ребер равна Q. Какое наибольшее значение может иметь ее боковая поверхность S?

989. В треугольной пирамиде все три боковые ребра перпендикулярны друг к другу; одно из них равно противолежащему ему ребру основания, а произведение двух других равно $p > 0$. Найти наименьшее значение: a) объема пирамиды V; b) суммы ее боковых ребер σ; c) площади боковой поверхности S.

990. Из всех сечений треугольной пирамиды, параллельных двум ее скрещивающимся ребрам, найти сечение с наибольшей площадью.

991. Из всех конусов, описанных около данного шара, найти тот, объем которого наименьший.

992. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, высота равна H. В конус вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое — на боковой поверхности конуса. Какое наибольшее значение может иметь боковая поверхность цилиндра?

Решить задачи № 993—997, предварительно определяя экстремальное значение требуемого параметра (например, числа плиток в задаче № 993) и затем сравнивая его с заданным значением.

993. Достаточно ли приобрести 4000 штук кафельных плиток размером 10 *см* × 10 *см* для облицовки внутренних стенок бортов бассейна площадью 450 $м^2$? Известно, что бассейн имеет форму ромба, а высота борта равна 0,5 *м*.

994. Для изготовления каркасов полотняных домиков кубической формы используют алюминиевые трубки ценой 2 руб. за метр. На покупку трубок для каркасов двух домиков израсходовали 144 руб. Может ли случиться так, что общий объем домиков окажется меньше 50 $м^3$?

995. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, все боковые ребра пирамиды равны, а высота равна $\sqrt{2}$ *см*. По ребрам пирамиды со скоростью 1 *см/сек* ползет жук. Достаточно ли ему 2 *сек* для того,

чтобы спуститься с вершины пирамиды по боковому ребру на основание, если вдоль периметра основания он проползает за 8 *сек*?

996. Прямоугольный участок площадью 900 $м^2$ необходимо огородить забором, две смежные стороны которого каменные, а две другие — деревянные. Один метр деревянного забора стоит 10 руб., а каменного — 25 руб. На строительство выделено 2000 руб. Хватит ли этой суммы?

При решении задач № 997—1002 нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Утверждение о том, что наименьшее значение суммы (или произведения) двух функций достигается тогда, когда будет наименьшим каждый член суммы (или произведения),— справедливо лишь в том случае, когда минимум каждой функции достигается при одном и том же значении аргумента. В противном случае это утверждение может оказаться неверным.

997. В квадратном листе фанеры со стороной, равной 10 единицам длины, вырезано отверстие в форме прямоугольника, диагональ которого равна 5 единицам длины. Это отверстие по краю окантовано тонкой проволочной рамкой. Единица площади фанеры весит 2 *г*, а единица длины проволоки весит 7 *г*. Какими должны быть стороны отверстия, чтобы вес получившегося листа был наибольшим? (Единица площади есть площадь квадрата со стороной, равной единице длины.)

998. Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 $м^2$. При каких длинах сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей?

999. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 $см^2$. Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна 20 *см*. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

1000. Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть равна 2 $дм^2$, а боковая поверхность — 18 $дм^2$. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей?

1001. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 $м^2$, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

1002. Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы, имеющей основанием прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 50 *см*. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь 0,96 $м^2$. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей?

С. Текстовые алгебраические задачи

1003. Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 тыс. $м^2$. Затраты на постройку одного дома, имеющего N $м^2$ жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 $м^2$ обходится в 184,8 тыс. руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.

1004. Мастерская производит закрытые резервуары кубической формы. Время монтажа одного резервуара пропорционально его поверхности, на монтаж резервуара объемом 8 *л* затрачивается 1 *мин* 40 *сек*, на последующую обработку его поверхности затрачивается еще по 1,5 *сек* на каждые 10 $см^2$ поверхности. Может ли мастерская успеть за 20 *час* изготовить такое количество одинаковых резервуаров, чтобы их общая вместимость составила 64 тыс. литров?

1005. Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 литров. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной ее поверхности. При этом колба объемом в 1 литр обходится в 1 руб. 25 коп., и в этом случае стоимость труда составляет 20% стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежимо малой). Хватит ли на выполнение работы 100 руб.?

D. Задачи на условный экстремум

Решите эти задачи, учитывая, что решение по смыслу условия этих задач следует искать в целых числах.

1006. Предполагается использовать 2000 руб. на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15 дней, на 27 дней, на 45 дней. Стоимость их соответственно 21 руб., 40 руб., 60 руб. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим?

1007. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа вмещает 40 деталей, ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 руб.. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

1008. Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки деревьев имеются полуторатонки, трехтонки, пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке можно перевезти за один раз 45 деревьев, на пятитонке можно перевезти за один раз 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 руб., для трехтонки 15 руб., для пятитонки 24 руб. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается.

1009. На 100 руб. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 руб.; набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 руб. и набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 руб. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

Задачи № 1010—1011 являются простейшими задачами „линейного программирования“.

1010. На предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий I типа, и 300 изделий II типа в сутки; в то же время ОТК (отдел технического контроля) может проверить не более 150 изделий (любого типа) в сутки. Известно, что изделие I типа стоит вдвое дороже, чем

изделие II типа. Найти такой план выпуска продукции, который обеспечивал бы предприятию наибольшую прибыль.

1011. На двух шахтах добывается руда: на I шахте — 100 m в день, на II шахте — 200 m в день. Эту руду можно переработать на двух заводах; причем стоимость перевозок 1 m руды видна из таблицы:

	1-й завод	2-й завод
I шахта	5 руб.	4 руб.
II шахта	7 руб.	5 руб.

Известно, что каждый завод может переработать не более 250 m руды. Сколько руды нужно перевозить с каждой шахты на каждый завод, чтобы стоимость перевозки была наименьшей?

§ 2. СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

Предварительные замечания. I. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой*. В школьной математике рассматриваются только три типа комбинаций, которые принято называть общим именем *соединения*.

Определение 1. Если из некоторого числа каких-либо предметов составляются группы этих предметов, отличающиеся одна от другой числом предметов, предметами или их порядком, то такие группы называются *соединениями*.

Определение 2. *Размещениями* из n элементов по k называются соединения, каждое из которых содержит k элементов, взятых из данных n элементов, и отличается от другого или элементами или порядком элементов. Общее число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k. Число A_n^k вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1)$$

Определение 3. *Перестановками* из n элементов называются соединения, каждое из которых содержит n этих элементов и отличается от другого порядком элементов. Число n-перестановок обозначают через P_n. Формулы для P_n сразу получаются из формулы (1) для числа размещений. Именно

$$P_n = A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1. \qquad (2)$$

Определение 4. *Сочетаниями* из n элементов по k называются соединения, каждое из которых содержит k элементов, взятых из данных n элементов, и отличается от другого хотя бы одним элементом. Число сочетаний по k элементов, которые можно составить из данных n элементов, обозначают через C_n^k. Это число может быть вычислено по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}. \qquad (3)$$

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил — правила суммы и правила произведения:

1) Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор „либо A, либо B“ можно осуществить $m+n$ способами.

2) Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить $m\cdot n$ способами.

II. Следующая формула, представляющая выражение $(x+a)^n$ при натуральном n в виде приведенного многочлена, называется формулой бинома Ньютона:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1\cdot x^{n-1}\cdot a + \\ + C_n^2 x^{n-2}\cdot a^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}\cdot a^k + \ldots + a^n. \qquad (4)$$

Многочлен, стоящий в правой части формулы, называется разложением бинома. Число членов разложения на единицу больше показателя бинома. Любой член разложения может быть написан с помощью общего члена разложения

$$T_{k+1} = C_n^k\cdot x^{n-k}\cdot a^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Коэффициенты членов разложения называются биномиальными.

* * *

1012. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

1013. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?

1014. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

1015. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицами к паровозу, а трое — спиной к нему, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

1016. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

1017. Та же задача, но они садятся не за круглый стол, а на карусель, и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

1018. Сколькими способами из колоды в 52 карты можно вынуть 10 карт так, чтобы среди них а) был хотя бы один туз, б) ровно один туз, в) не менее двух тузов, е) ровно два туза?

1019. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

1020. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

1021. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает либо яблоко, либо грушу. Сколькими способами это может быть сделано?

1022. У отца есть 5 попарно различных апельсинов, которые он выдает своим восьми сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами это можно сделать?

1023. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия

в беге на 1000 *м*. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100+200+400+800$?

1024. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

1025. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)?

1026. Группа студентов из семи юношей и десяти девушек танцуют. Если в каком-то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашенными? Решить те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец?

1027. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов.

1028. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

1029. В разложении $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ коэффициент третьего члена разложения больше коэффициента второго на 35. Найти член разложения, не содержащий x.

1030. Сколько рациональных членов содержится в разложении $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$?

1031. Найти член разложения $(3x+2)^7$ с наибольшим коэффициентом.

1032. Доказать соотношения:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$,

2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$,

3) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

1033. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего членов разложения $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ равна 11. Найти член, содержащий x^2.

1034. Коэффициент третьего члена разложения $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ равен 5. Найти средний член разложения.

1035. Найти член разложения $(3x+5)^{12}$ с наибольшим коэффициентом.

1036. Доказать тождества:

$$1-3C_n^2+9C_n^4-27C_n^6+\ldots=(-1)^n\cdot 2^n\cos\frac{2n\pi}{3},$$

$$C_n^1-3C_n^3+9C_n^5-\ldots=\frac{(-1)^{n+1}\,2^{n+1}}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

§ 3. ЛОГИЧЕСКИЕ И НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕОБХОДИМОСТЬ И ДОСТАТОЧНОСТЬ

В данном параграфе собраны задачи, решение которых не удается выполнить обычными, стандартными методами, эти задачи требуют индивидуального подхода. Однако те знания, которые необходимы для их решения, не выходят за рамки школьной программы.

В чем же особенность этих задач?

Рассмотрим пример:

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x}.$$

Конечно, его можно решить стандартным методом: возведение в квадрат + проверка. Однако если сформулировать условия, определяющие область допустимых значений неизвестного

$$\begin{cases} x\geqslant 7, \\ x\leqslant 5, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

то легко убедиться в том, что не существует ни одного значения x, при котором были бы одновременно определены все функции, входящие в уравнение, т. е. ОДЗ неизвестного не содержит ни одного значения x, и, следовательно, уравнение не имеет решений.

Другой пример: $\cos x=\frac{\pi}{3}$. Поскольку $\frac{\pi}{3}>1$, а $\cos x\leqslant 1$, при всех значениях x уравнение не имеет решений.

Третий пример: $x+\lg(1+x)<0$. Знак левой части определяется значком функций, входящих в нее: если $x\geqslant 0$, то и $\lg(1+x)\geqslant 0$, откуда $x+\lg(1+x)\geqslant 0$, а если $-1<x<0$, то и $\lg(1+x)<0$, откуда $x+\lg(1+x)<0$; таким образом, получаем $-1<x<0$.

При решении всех этих задач мы использовали различные свойства элементарных функций: а) ограниченность области определения функции (1 пример); б) ограниченность функции (2 пример); в) знакопостоянство функций на интервалах (3 пример).

Все эти свойства функции, а также ряд других свойств (монотонность, четность и нечетность функций и т. д.) и используются при решении нестандартных задач.

Наиболее часто используется ограниченность функций.

1°. Пусть дано уравнение $f(x)=\varphi(x)$. Если одна из функций ограничена снизу (например, $f(x)\geqslant a$), а другая — сверху ($\varphi(x)\leqslant a$), причем эти границы совпадают, равенство функций возможно в том и только в том случае, когда эти функции одновременно принимают свои экстремальные значения, т. е. когда одновременно выполняются два условия

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ \varphi(x)=a. \end{cases}$$

2°. Аналогично, если $f(x, y)\geqslant a$, а $\varphi(x, y)\leqslant a$, уравнению $f(x, y)=\varphi(x, y)$ удовлетворяют такие пары (x, y), для которых

$$\begin{cases} f(x, y)=a, \\ \varphi(x, y)=a. \end{cases}$$

3°. Пусть дано неравенство

$$f(x)\geqslant\varphi(x). \qquad (*)$$

Если $f(x)\leqslant a$, $\varphi(x)\geqslant a$, то неравенству (*) удовлетворяют только те значения x, для которых

$$f(x)=a, \quad \varphi(x)=a.$$

4°. Пусть дано неравенство

$$f(x, y)\geqslant\varphi(x, y). \qquad (**)$$

Если $f(x, y)\leqslant a$, а $\varphi(x, y)\geqslant a$, то неравенству (**) удовлетворяют только те пары (x, y), для которых

$$\begin{cases} f(x, y)=a, \\ \varphi(x, y)=a. \end{cases}$$

5°. Если дана сложная функция $y=f[\varphi(x)]$, причем функция $\varphi=\varphi(x)$ ограничена ($a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$), а функция $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$ (например, $f(x)$ возрастает), то функция $y=f[\varphi(x, y)]$ ограничена ($f(a)\leqslant\leqslant f[\varphi(x)]\leqslant f(b)$).
Например,

$$\frac{1}{2}\leqslant 2^{\sin x}\leqslant 2.$$

6°. Если функция $F(x)$ представляет собой сумму функций ($F(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$), ($f_1(x)\geqslant a$, $f_2(x)\geqslant b$, $f_3(x)\geqslant c$), где все слагаемые ограничены снизу, то функция $F(x)$ также ограничена снизу ($F(x)\geqslant a+b+c$), причем она может достигать своего наименьшего значения только при тех значениях x, при которых одновременно принимают свои наименьшие значения все слагаемые, т. е. одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} f_1(x)=a, \\ f_2(x)=b, \\ f_3(x)=c. \end{cases}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для суммы функций, ограниченных сверху.

7°. Для установления границ областей изменения функций надо знать свойства основных элементарных функций и некоторые простейшие нестрогие неравенства. Эти сведения даны в предварительных замечаниях к § 2 главы IV.

Другая большая группа задач — так называемые „логические“ задачи, т. е. задачи, в которых наиболее существенные трудности — логические. Как правило, это задачи с параметрами, требующие тонких рассуждений и наблюдений. Надо уметь находить значения параметров, при которых выполняются некоторые требования, сформулированные в условии задачи. Прежде чем переходить к анализу приемов решения таких задач, дадим некоторые определения.

1°. Взаимоотношение суждений. Необходимость и достаточность. В дальнейшем при решении задач будут часто использоваться термины „необходимо“ и „достаточно“. Для того чтобы четко представлять себе смысл этих терминов и возможность дальнейшего использования высказанных суждений, дадим некоторые

определения и пояснения к ним. Пусть A и B — некоторые суждения, связанные между собой. Охарактеризуем эту связь следующим образом.

Суждение B называется необходимым признаком суждения A, если из справедливости суждения A следует справедливость суждения B ($A \Rightarrow B$).

Суждение B называется достаточным признаком суждения A, если из справедливости суждения B следует справедливость суждения A ($B \Rightarrow A$).

Если из справедливости суждения B следует справедливость суждения A и, наоборот, из справедливости суждения A следует справедливость суждения B, то говорят, что суждение B является необходимым и достаточным признаком суждения A ($A \rightleftarrows B$).

Интересно, что взаимоотношение суждений напоминает взаимоотношение уравнений (см. § 5, ч.I, равносильность уравнений).

Пусть суждение B есть необходимый признак суждения A. Это значит, что B непременно справедливо, если справедливо A, но можно ли утверждать, что если A неверно, то неверно и B? Нет! Отрицание A не влечет за собой отрицания B (необходимого признака A), так как B может быть справедливым и тогда, когда A неверно. А вот если отрицается B (необходимый признак A), то A также не может быть справедливо, так как из этого следовала бы справедливость суждения B. Следовательно, отрицание необходимого признака A влечет за собой отрицание A.

Аналогично можно показать, что отрицание достаточного признака суждения A не влечет за собой отрицание суждения A, в то время как отрицание A влечет за собой отрицание достаточного признака этого суждения.

2°. Процесс поиска решения любой задачи состоит в том, что мы пытаемся подменить поставленную задачу какими-то вспомогательными задачами, после решения которых можно будет построить цепочку рассуждений, приводящих к решению поставленной задачи. Разумеется, наиболее удобным является тот случай, когда интересующее нас утверждение мы подменяем его необходимым и достаточным признаком, т. е. когда вспомогательная задача равносильна исходной. Однако такое возможно не всегда. Иногда удается сформулировать ряд условий, при

выполнении каждого из которых выполняются условия данной задачи. Эти условия являются достаточными признаками — утверждение, которое требуется доказать. При таком плане решения очень важно четко представлять себе, все ли достаточные признаки включает в себя сформулированный набор условий, все ли решения данной задачи будут найдены из поставленной вспомогательной задачи, т. е. равносильна ли исходной поставленная вспомогательная задача.

Пример: Для каждого действительного значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x+a} > x-a. \qquad (1)$$

Решение: Если $x-a \geqslant 0$, то неравенство (1) равносильно неравенству $x+a^2 > (x-a)^2$. Если же $x-a < 0$, то неравенству (1) удовлетворяют все x из области допустимых значений неизвестного. Имеем две системы:

$$\text{I} \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+a^2 > (x-a)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{II} \begin{cases} x-a, \\ x+a^2 \geqslant 0, \end{cases}$$

решение каждой из которых удовлетворяет условию задачи. В данном случае совокупность систем I и II равносильна исходному неравенству (1).

От предыдущего случая надо отличать такой, когда условия данной задачи выполняются при одновременном соблюдении ряда условий.

Пример: Определить значения параметра a, при которых минимум функции $f(x) = |x-a| + x^2$ больше 1.

Решение: Функция $f(x)$ может быть описана аналитически следующими соотношениями:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-a, & \text{при} \quad x-a \geqslant 0, \\ x^2-x+a, & \text{при} \quad x-a < 0. \end{cases}$$

Имеем две вспомогательные задачи:

I задача: при каких a $x^2+x-a > 1$ при всех $x \geqslant a$.

II задача: при каких a $x^2-x+a > 1$ при всех $x < a$, причем условия исходной задачи выполняются тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия первой и второй вспомогательных задач.

Как указывалось выше, отрицание необходимого признака данного суждения влечет за собой отрицание дан-

ного суждения. Таким образом, если в процессе решения задачи с параметром нам удается сформулировать необходимые условия для параметра, то все те значения параметра, которые не удовлетворяют необходимым условиям, являются посторонними для данной задачи. Это позволяет ограничить множество значений параметра, в пределах которого находится решение задачи. Часто такого ограничения бывает достаточно для того, чтобы довести до конца решение поставленной задачи.

В частности, в тех случаях, когда необходимым условиям удовлетворяют только несколько конкретных значений параметра, задача сводится к непосредственной проверке этих значений.

Все рассмотренные выше соображения используются при решении приведенных ниже задач.

* * *

Используя условие ограниченности функций, решить уравнения:

1037. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1.$

1038. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1.$

1039. $\sin^5 x + \cos^8 x = 1.$

1040. $\sin^4 x + \cos^7 x = 1.$

1041. $\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 1.$

1042. $\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sqrt{2}.$

1043. $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0.$

1044. $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\sin x}} + \sqrt{\dfrac{\sin x}{x^2-x-2}} = \dfrac{3}{2}.$

1045. $\sqrt{\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}} = 2.$

1046. $\sin x + \cos y = 2.$

1047. $\sin x + \sin 9x = 2.$

1048. $\sin x \cdot \left(\cos \dfrac{x}{4} - 2 \sin x\right) + \cos x \times$
$\times \left(1 + \sin \dfrac{x}{4} - 2 \cos x\right) = 0.$

1049. $2^{-\cos x} = \log_\pi x + \log_x \pi.$

1050. $2^{1-|4x-1|} = \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x.$

Используя условие ограниченности функций на отдельных частях ОДЗ, решить уравнения:

1051. $x^2 = -\cos x$.

1052. $2\cos\frac{\pi x}{2} = x^2 + 4x + 5$.

1053. $\cos\frac{\pi x}{2} = x^2 - 4x + 4$.

1054. $\cos \pi x = x^2 - 4x + 5$.

1055. $2^{1-|x-1|} = x^2 - 2x + 3$.

1056. $2^x = 3 - x$.

1057. $\log_2 x = 3 - x$.

1058. $\sin \pi x = x - 1$.

1059. $2\cos \pi x = 2x - 1$.

1060. $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

1061. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$.

1062. $\log_\pi x = 1 + (\sin x)\cdot \log_\pi 2$.

1063. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geqslant 1$.

1064. $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} > 2$.

Анализируя условия, определяющие ОДЗ, найти решения следующих уравнений:

1065. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2}$.

1066. $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi x}{2}$.

1067. $\arccos(6x - x^2 - 10) = -\frac{\pi x}{3}$.

Используя условия ограниченности сложных функций, решить уравнения с одним неизвестным:

1068. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

1069. $\cos^4(\operatorname{arcctg} x) + \sin^4(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcctg} x)$.

1070. $\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$.

1071. $\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] - \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right) = 1$.

1072. $\log_2(3 + 2x - x^2) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}$.

1073. $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.

1074. $\log_2(4 - \sin^2 x) = \log_\pi x + \log_x \pi$.

1075. $\log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) = 2^{|x|} - 2$.

1076. $\log_2(3 - |\sin x|) = 2^{-|\pi - x|}$.

1077. $\log_3\left(\frac{1}{3}-\left|\frac{3\pi}{2}-x\right|\right)=\sin x.$

1078. $\log_3\left(4-\left|\cos\frac{4x}{3}\right|\right)=\sin x.$

1079. $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\cdot\sin^2 3x.$

1080. $3\arcsin\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{2}}.$

1081. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}.$

1082. $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13}=\frac{\log_3|x|+\log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}.$

1083. $\cos\frac{16\pi}{16x^2-8x+49}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x+\operatorname{ctg}^2\pi x}.$

Используя условие ограниченности сложных функций, решить неравенства с одним неизвестным:

1084. $2^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1.$

1085. $\cos^2(x+1)\cdot\log_2[9-2x-x^2]\geqslant 1.$

1086. $(4x-x^2-3)\cdot\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1.$

1087. $|\sqrt{2}\cdot|x|-1|\cdot\log_2(2-2x^2)\geqslant 1.$

1088. $\cos(x+3\operatorname{tg}x)+(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2\leqslant -1.$

1089. $\cos\left[\pi\left(x+\frac{1}{2}\sin\pi x\right)\right]+(\sin^2\pi x+\sin\pi x)^2\leqslant -1.$

1090. $\sin\left[\frac{3\pi}{2}\left(2^x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]+|3^x+3^{1-x}-4|\leqslant -1.$

Используя условия ограниченности функции, решить системы уравнений и неравенств:

1091. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$
(x, y, z — действительные числа).

1092. При каких действительных значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1093. Найти действительное решение системы

$$\begin{cases} x^2+4y^2+5=4z, \\ x-y \geqslant z. \end{cases}$$

1094. Найти действительное решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2+20=z, \\ 8x+4y \geqslant z. \end{cases}$$

1095. Найти действительное решение системы

$$\begin{cases} z^2+7 \leqslant 14xy, \\ z-2x-2y=1. \end{cases}$$

1096. $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y, \\ \sin^2 y+\cos^2 z=1. \end{cases}$

1097. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|\sin x|+\log_{|\sin x|}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\cos^2 y, \\ \operatorname{tg}^2 y+2^{\sin z}=1. \end{cases}$

1098. $\begin{cases} 2^{1+\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=4\cos^2 y, \\ \log_{\frac{1}{2}}(\sin z)+\sin^2 y=1. \end{cases}$

Используя условие ограниченности функций, решить уравнение с двумя неизвестными:

1099. $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0.$

1100. $3x^2+3y^2-4xy+6x+6y+18=0.$

1101. $2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7.$

1102. $(x^2-2x+3)(y^2+6x+12)=6.$

1103. $2^{|x|}-\cos y+\lg(1+x^2+|y|)=0.$

1104. $\log_2[2+2\sin(x+y)-\cos^2(x+y)]=4^x-2^{x+1}+3$

1105. $\dfrac{|\operatorname{tg}(x+y)|}{\sin^2(x+y)}=\dfrac{4}{\log_\pi(x-y)+\log_{x-y}\pi}.$

1106. $\log_2\left(\cos^2 xy+\dfrac{1}{\cos^2 xy}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}.$

1107. $\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1.$

1108. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\dfrac{2}{\sin^2(x+y)-2\sin(x+y)+2}.$

1109. $\dfrac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}=\log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10)+2.$

1110. $2^{\operatorname{tg}^2 xy+\operatorname{ctg}^2 xy}=\dfrac{4}{\log_2(4x^2-4x+3)}$.

1111. $4\sin^2 xy+4\sin xy+3=\dfrac{4}{\log_\pi|y|+\log_{|y|}\pi}$.

1112. $3^{\sin x}=\dfrac{1}{\log^2_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y)-6\log_{\sqrt[3]{\pi}}(x+y)+12}$.

1113. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$.

1114. $\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\dfrac{1}{2}\sin y$.

Используя условия ограниченности сложных функций, решить неравенства с двумя неизвестными:

1115. $\sec^2(x+y)\cdot\log_3(2+2^{|x|})\leqslant 1$.

1116. $(3-\cos^2 x-2\sin x)(\lg^2 y+2\lg y+4)\leqslant 3$.

1117. $[\sin^2(x+y)+2\sin(x+y)+2]\cdot\log_2(3^x+3^{-x})\leqslant 1$.

1118. $\lg(1+y)+\arcsin(2^{|x|}+y)\geqslant\dfrac{\pi}{2}$.

1119. $1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\leqslant 0$.

1120. $\log_{\frac{1}{2}}(1+x)+\arccos(x+y^2)\leqslant -1$.

1121. $\pi y-2\pi+2\arcsin(x^2+y)\geqslant 0$.

Комбинируя условия ограниченности функций и условия, определяющие ОДЗ, решить неравенства с двумя неизвестными:

1122. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$.

1123. $y-|\sec x|-\sqrt{1-y-x^2}\geqslant 0$.

1124. $-x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\geqslant -1$.

1125. $-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geqslant 1$.

1126. $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 0$.

1127. $2^{\cos x}-|x|+\sqrt{x^2+|\sec x|-1}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Вводя вспомогательную неизвестную, решить уравнения:

1128. $\log_2^2 x+(x-1)\log x=6-2x$.

1129. При каких значениях параметров a и b уравнение $\dfrac{x^2+5}{2}=x-2\cos(ax+b)$ имеет хотя бы одно решение?

1130. $8-x\cdot 2^x+2^{3-x}-x=0$.

1131. $x^x=10^{x-x^2}\quad(x>0)$.

1132. $x=\sin\left(\pi\cdot\frac{x+1}{3}\right)\sin\left(\pi\cdot\frac{1-x}{3}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

1133. $x\cdot 2^x=x(3-x)+2(2^x-1)$.

1134. $x^2+(x+1)\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{3+x}{2}$.

Вводя вспомогательную неизвестную и исследуя вопрос о существовании действительных решений вспомогательного уравнения, найти решение уравнений с двумя неизвестными:

1135. $x^2+4x\cdot\cos xy+4=0$.

1136. $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}$.

1137. $4^{\sin x}-2^{1+\sin x}\cdot\cos xy+2^{|y|}=0$.

1138. $\log_2^2(x+y)-2\sin\frac{\pi xy}{2}\cdot\log_2(x+y)+1+|y-1|=0$.

1139. $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x(\sin y+\cos y)+2=0$.

1140. $2\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)\cos y=3+\cos 2y$.

1141. $2+2\sin x(\sin y+\cos y)=\cos 2x$.

Исследуя знак функций на отдельных частях ОДЗ, решить неравенства:

1142. $\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)+\sin x\cdot\cos(\sin x)>0$.

1143. $(\sin x)\arccos x+x\cos x>0$.

1144. $2^x\cdot\arcsin x+\cos x\lg(1+x)<0$.

1145. $3^{\sin x}\cdot\operatorname{arctg}x+x^7\cdot\cos^2 x>0$.

1146. $\cos(\sin x)\cdot\lg(1+\cos x)+x^2\cos x<0$.

Вводя вспомогательное неизвестное и исследуя вопрос о знаке квадратичной функции на заданном интервале, решить задачи.

1147. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (xy) таковы, что выражение

$$\sin^2(t+x)+\sin(t+y)+\sin(t+2x-y)+\frac{1}{4} \qquad (1)$$

положительно при всяком значении t, и изобразить область, образуемую этими точками.

1148. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$2\cos 2t+4\sin 2x\cdot\sin t+2\sin(x+y)-(\sin 2x-1)^2 \qquad (1)$$

больше 1. Изобразить область, образуемую этими точками.

1149. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\sin^2 t \cdot \cos^2 x + \cos^2 t \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sin 2t + 2(\cos 2x + \cos y)$$

отрицательно, и изобразить область, образуемую этими точками.

1150. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$\left(2\cos t + \frac{1}{2}\cos x \cos y\right)\cos x \cdot \cos y + 1 + \cos x \cdot \cos y + \cos 2t$$

положительно при всяком значении t, и изобразить область, образуемую этими точками.

1151. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\cos(t + 3x + y) - \cos(t + x - y) - \sin^2(t + 2x)$$

больше $\frac{1}{4}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

1152. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых таковы, что выражение

$$\cos 2(t + x) + 2\sin(t + x) \cdot \cos y - \frac{1}{2}(\cos y - 1)^2 - \sin x$$

при всяком значении t меньше $\frac{1}{2}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

1153. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$4\sin t \cdot \sin x - 2\cos(t + y) \cdot \cos(t - y) - \cos 2x - 8\sin^2 y \cdot \cos^2 x$$

больше -3 при всяком значении t и изобразить область, образуемую этими точками.

При решении следующих задач с параметрами особое внимание следует уделять постановке вспомогательных задач и их связи с данной задачей.

1154. Определить, при каких действительных значениях параметра a минимум функции

$$f(x) = x^2 + 2|x + a - 1| + (a + 1)^2 \qquad (1)$$

меньше трех.

1155. Определить, при каких действительных значениях параметра a минимум функции

$$F(x)=ax+|x^2-4x+3|$$

больше единицы.

1156. Найти все значения параметра a, при которых минимум функции

$$f(x)=3|x-a|+|x^2+x-2|$$

меньше двух.

1157. Найти все значения параметра a, при которых минимум функции

$$f(x)=2|x-1|+|x+3|-2|x-a^2-a|$$

больше единицы.

1158. Даны три утверждения: (а) уравнение $x+\frac{1}{x}=a$ не имеет действительных корней; (б) справедливо равенство

$$\sqrt{a^2-4a+4}=2-a;$$

(в) система

$$\begin{cases} x+y^2=a, \\ x-\sin^2 y=-3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каких значениях параметра a два из этих утверждений верны, а одно ложно?

1159. Даны три утверждения: а) трехчлен x^2+x+a неотрицателен при всех x; б) функция $y=\log_{2a}x$ убывает (как функция от x); в) система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ y+\cos x=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. При каких значениях a два утверждения верны, а одно ложно?

Сформулировать необходимые условия для параметров, решить следующие задачи:

1160. Определить, при каких действительных значениях параметров a и b каждое решение (x, y) уравнения $x^2+y^2=a$ (1) удовлетворяет уравнению $xy=b$ (2).

1161. Определить, при каких действительных значе-

ниях параметров a и b любое решение $\left(x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ уравнения

$$x + y = a \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b. \tag{2}$$

1162. Определить, при каких действительных значениях параметров a и b каждое решение уравнения

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = a \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{y} = b. \tag{2}$$

1163. Найти все пары чисел (a, b), для которых всякая пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению $xy = a$, удовлетворяет уравнению $x + y = b$.

1164. Найти все пары чисел (a, b), для которых всякая пара чисел $(x, y)\left(x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, удовлетворяющая уравнению $x + y = a$, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b.$$

1165. Найти все пары чисел (a, b), для которых всякая пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению $\frac{x}{y} = a$, удовлетворяет уравнению $(x + y)^2 = b$.

1166. Найти все пары чисел (a, b), для которых всякая пара чисел $x,\ y\left(x,\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, удовлетворяющая уравнению $x + y = a$, удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b.$$

1167. Найти все пары чисел (a, b), для которых всякая пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению

$$\sin(x + y) = a,$$

удовлетворяет уравнению

$$\cos(x + y) = b.$$

1168. При каких значениях параметра a системы

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

равносильны?

1169. Определить, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x| & (1.а) \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1 & (1.б) \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение.

1170. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2, & (1.а) \\ (a-1)x^3+y^3=1 & (1.б) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x и y — действительные числа).

1171. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a, & (1.а) \\ x^2+y^2=b & (1.б) \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа, $x>0$).

1172. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа).

1173. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2, \\ a+bxy+x^2y=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

1174. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа)

1175. Определить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} (|x|+1)a=y+\cos x, \\ \sin^4 x+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение.

1176. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x^y=a, \\ \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+y \qquad (x>0). \end{cases}$$

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение?

1177. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-ay^3=\frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3+ax^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x+y=0$ (a, x, y — действительные числа).

1178. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} (1+x)^y+(1+y)^x=a^2, \\ (b^2+1)^{x^2+y^2}=(b^4+1)^{xy} \end{cases}$$

имеет решение.

1179. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\sin x=a, \\ \frac{y}{x}+\sin y=a. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ и $0\leqslant y\leqslant 2\pi$?

1180. Дана система уравнений

$$\begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2} \\ x + y = b^2 + 1 \end{cases} \qquad (a > 0).$$

При каких значениях параметров a и b а) система имеет хотя бы одно решение? б) система имеет единственное решение? в) система имеет решение при любом значении b?

1181. Определить, при каких действительных значениях параметра a уравнение

$$a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1 \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x - \frac{1}{2}\sin 5x. \qquad (2)$$

1182. Определить, при каких действительных значениях параметра a уравнение

$$2\sin^7 x = (1 + \sin \pi a)\cdot \sin x + a\sin^3 x \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$(a-1)(1+\cos^2 x) + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x + 2(a-1)^3. \qquad (2)$$

1183. При каких значениях параметра a уравнения

$$(2a+1)\cos^3 x + (16a^3 - 4a + 1)\cos x - 2\cos^7 x = 0$$

и

$$\cos^6 x = (1+a)\cos^2 x + 8a^3 - 2a$$

равносильны?

1184. Найти, при каких значениях параметра a уравнения

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x - (a-4)(1+\cos 2x)$$

и

$$2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

равносильны.

1185. Определить, при каких действительных значениях параметра a уравнение

$$\sin 3x = a\sin x + (4 - 2|a|)\sin^2 x$$

равносильно уравнению

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cdot \cos 2x.$$

1186. Определить, при каких действительных значениях параметра a уравнение

$$2\sin^7 x-(1-a)\sin^3 x+(2a^3-2a-1)\sin x=0$$

равносильно уравнению

$$2\sin^6 x+\cos 2x=1+a-2a^3+a\cos^2 x.$$

1187. При каких действительных значениях параметра a уравнение

$$\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=|\cos ax|$$

имеет решение?

1188. При каких действительных значениях параметра a уравнение

$$1+\sin^2 ax=\cos x$$

имеет единственное решение?

1189. Определить, при каких действительных значениях x и α имеет место неравенство

$$\log_3 x+\log_x 3+2\cos\alpha\leqslant 0?$$

1190. При каких действительных значениях параметров a, b и c уравнения

$$xy-yz=1$$

и

$$axy+byz+c\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}$$

равносильны?

1191. Определить, при каких действительных значениях параметров a, b, c и d уравнение

$$xy=1$$

равносильно уравнению

$$axy+b\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=c+d\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

1192. Определить, при каких значениях параметра a для любого значения b найдется такое значение параметра c, что система

$$\begin{cases} bx-y=ac^2, \\ (b-6)\,y+2by=c+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1193. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = p \sin \alpha, \\ \cos x \cdot \cos y = p \cos \alpha. \end{cases}$$

Найти все значения параметра p, для которых

а) найдется такое значение α, при котором система имеет решение;

б) система имеет решение при любом значении α.

Часть V

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

§ I. АЛГЕБРА

1°. Действительные числа

1. c) $|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|$.

Заметив, что

$$A = \frac{|a+b+c|}{|a+b+c|+2} \leqslant \frac{|a|+|b|+|c|}{|a|+|b|+|c|+2},$$

так как

$$\frac{|a|+|b|+|c|}{|a|+|b|+|c|+2} - \frac{|a+b+c|}{|a+b+c|+2} =$$

$$= 2\,\frac{|a|+|b|+|c|-|a+b+c|}{(|a|+|b|+|c|+2)(|a+b+c|+2)} \geqslant 0,$$

имеем

$$A \leqslant \frac{|a|}{|a|+|b|+|c|+2} + \frac{|b|}{|a|+|b|+|c|+2} +$$

$$+ \frac{|c|}{|a|+|b|+|c|+2} \leqslant \frac{|a|}{|a|+2} + \frac{|b|}{|b|+2} + \frac{|c|}{|c|+2}.$$

2. a) Выражение $|x+1| = |x-(-1)|$ геометрически означает расстояние точки x от точки -1 на числовой оси. Поэтому решить уравнение — значит найти на числовой оси точки, удаленные от точки -1 на расстояние, равное 3. Таких точек, очевидно, две: 2 и -4 (рис. 1). Итак, ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

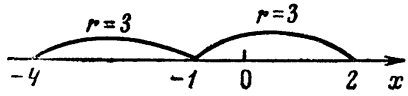


Рис. 1

b) $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

3. a) Так как $|a| = a$ при $a \geqslant 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$, то выражения $|x+1|$ и $|x+2|$ „раскрываются“ по-разному в зависимости от того, какой знак имеют выражения,

стоящие под знаком модуля. Разобьем поэтому все множество значений x на три интервала (границы интервалов суть точки, в которых одно из „подмодульных“ выражений обращается в нуль и меняет знак) (рис. 2): $x \geqslant -1$, $-2 < x < -1$, $x \leqslant -2$ и рассмотрим каждый из них отдельно.

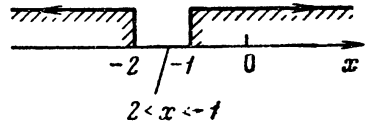


Рис. 2

1) $x \geqslant -1$. Для этих значений x имеем: $x+1 \geqslant 0$, $x+2>0$. Следовательно, $|x+1| = x+1$, $|x+2| = x+2$ и уравнение принимает вид $2x+3=2$; его корень $x=-\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $x \geqslant -1$ и, значит, является корнем исходного уравнения;

2) $-2 < x < -1$. В этом случае $x+1<0$, $x+2>0$; $|x+1| = -x-1$, $|x+2| = x+2$ и уравнение приобретает вид $1=2$, т. е. превращается в неверное числовое равенство. Это означает, что никакое число, заключенное между -2 и -1, не удовлетворяет данному уравнению.

3) $x \leqslant -2$. Имеем $x+1<0$, $x+2 \leqslant 0$; следовательно, $|x+1| = -x-1$, $|x+2| = -x-2$ и исходное уравнение имеет вид $-2x-3=2$, откуда $x=-\frac{5}{2} < -2$ есть решение. Ответ: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$.

b) Решением являются все значения $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

c) $x \geqslant 2$.

4. a) Заметив, что $|4-x| = |x-4|$, решаем задачу аналогично задаче 3а.

Ответ: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{9}{2}$.

b) Имеем: $\frac{5}{|x+2|} = \frac{10}{|x-1|}$, откуда $2|x+2| - |x-1| = 0$.

Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$.

c) Сделав замену неизвестного $y = x^2$ и использовав равенство $|9-x^2| = |x^2-9|$, приведем уравнение к уже известному виду $|y-4| - |y-9| = 5$. Ответ: $|x| \geqslant 3$ или $x \geqslant 3$, $x \leqslant -3$.

5. a) Запишем уравнение в виде

$$2\left|x+\frac{1}{2}\right| - |x-3| = |x-4|.$$

Указание: Разбейте числовую ось на четыре интервала точками $x=-\frac{1}{2}$, $x=3$, $x=4$ и решите уравнение в каждом из этих интервалов (рис. 3). Ответ: $x=\frac{3}{2}$.

b) $x_1=2$, $x_2={}^2/_5$. c) $x=-2$.

6. $|x|\geqslant 2$ или $x\geqslant 2$, $x\leqslant -2$.

7. Перепишите уравнение в виде

$$|2|x-\frac{3}{2}|-1|=2|x|.$$

Далее, последовательно освободитесь от знаков модуля, начиная с внутреннего. Для этого придется рассмотреть следующие случаи: 1) $x\geqslant\frac{3}{2}$; 2) $0\leqslant x<\frac{3}{2}$; 3) $x<0$. Внутри каждого из указанных интервалов задача сводится к решению простейшего уравнения с модулем.

Рис. 3

Ответ: уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}$.

8. Используйте геометрический смысл модуля разности: а) $-1\leqslant x\leqslant 3$, b) $x>\frac{21}{25}$, $x<\frac{19}{25}$, c) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$, $1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$. **9.** a) $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{3}<x<4$; c) $x>3$, $x<\frac{1}{3}$. **10.** $|x|<2$, $|x|>4$ или $x>4$, $-2<x<2$, $x<-4$.

11. а) Введите новое неизвестное $y=|x-2|$. Тогда задача сведется к решению неравенства $|y-3|\leqslant 1$, решив которое, легко вернуться к исходному неизвестному x.

Ответ: $-2\leqslant x\leqslant 0$, $4\leqslant x\leqslant 6$.

b) $x\leqslant 6$ (см. решение задачи № 7).

12. Решение неравенства ищется в каждом из следующих интервалов:

$$x\geqslant 1,\ 0\leqslant x<1,\ -\frac{3}{2}\leqslant x<0,\ x<-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x<-\frac{3}{2}$.

13. $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$, $x<-\frac{3}{2}$.

14. Легко видеть, что $x^2-2x+3>0$ при любых x (квадратный трехчлен имеет комплексные корни). Поэтому $|2x-x^2-3|=|x^2-2x+3|=x^2-2x+3$, и задача сводится к решению квадратного уравнения $x^2-2x+3=0$, которое не имеет действительных корней: Ответ: Решений нет.

15. $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{2,3}=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **16.** $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{5}\right)$. **17.** $x=-1$. **18.** $x_1=0$, $x_2=-1$.

19. Заметив, что $x^2-x+1>0$ при любых действительных x, приведем уравнение к виду

$$|x^2+2x-3|=x^2-x+1.$$

Далее $x^2+2x-3\geqslant 0$ при $x\geqslant 1$, $x\leqslant -3$; $x^2+2x-3<0$ при $-3<x<1$. Рассмотрим два случая.

1) $x\geqslant 1$, $x\leqslant -3$. Имеем $x^2+2x-3=x^2-x+1$, откуда $x=\frac{4}{3}>1$ и, следовательно, является решением исходного уравнения.

2) $-3<x<1$(*). Будем иметь: $-x^2-2x+3=x^2-$ $-x+1$, $2x^2+x-2=0$, $x=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{17})$. Найденные значения x лежат внутри интервала (*) и поэтому тоже являются корнями уравнения.

Ответ: $x=\frac{4}{3}$; $x=\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{17})$.

20. Разлагая квадратичные выражения под знаком модуля на линейные множители и используя свойства модуля $|ab|=|a|\cdot|b|$, $|a|=|-a|$, перепишем уравнение в виде

$$|x|(|x+2|-|x-1|)=|x-2|.$$

Далее, разобъем множество значений x на пять интервалов (как обычно, их границами являются точки, в которых одно из линейных выражений под знаком модуля обращается в нуль) (рис. 4) и в каждом из них ищем решения уравнения. Ответ: $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Рис. 4

21. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2-3\geqslant 0, \\ x^2+2x-2\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3<0, \\ x^2-2x-4\leqslant 0. \end{cases}$$

Решая каждое из четырех неравенств, придем к новым двум системам:

а) $\begin{cases} x \geqslant \sqrt{3},\ x \leqslant -\sqrt{3}, \\ x \geqslant -1+\sqrt{3},\ x \leqslant -1-\sqrt{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \\ 1-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{5}. \end{cases}$

Решения первой системы суть $x \leqslant -1-\sqrt{3}$, $x \geqslant \sqrt{3}$, решения второй системы $1-\sqrt{5} \leqslant x < \sqrt{3}$ (рис. 5).

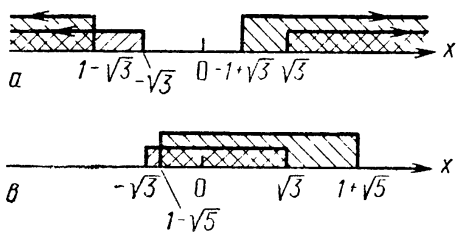


Рис. 5

Легко видеть, что в данном случае последние два интервала можно объединить в один $x \geqslant 1-\sqrt{5}$.

Итак, ответ: $x \leqslant -1-\sqrt{3}$, $x \geqslant 1-\sqrt{5}$.

22. Аналогично предыдущей задаче имеем две совокупности систем, равносильные исходному неравенству:

$$\begin{cases} 3+5x-2x^2 \geqslant 0, \\ 4x^2-11x-5 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3+5x-2x^2 < 0, \\ 4x^2-9x-7 < 0. \end{cases}$$

Решая каждое неравенство этих систем, получим

$$\text{(а)} \begin{cases} -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3, \\ x > \frac{11+\sqrt{201}}{8},\ x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}, \end{cases}$$

$$\text{(б)} \begin{cases} x < -\frac{1}{2},\ x > 3, \\ \frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < \frac{9+\sqrt{193}}{8}. \end{cases}$$

Решения последних систем представлены дважды заштрихованными интервалами на числовой оси (рис. 6):

(а) $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}$; (б) $\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{8}(9-\sqrt{193}) < x < \frac{1}{8}(11-\sqrt{201})$.

Замечание. Отметим, что при выполнении чертежей, подобных рис. 5, 6, самое важное состоит в пра-

вильной расстановке на числовой оси точек, соответствующих данным числам. Если рассматриваемые числа мало отличаются друг от друга и результат сравнения их не является очевидным, то приходится прибегать к прибли-

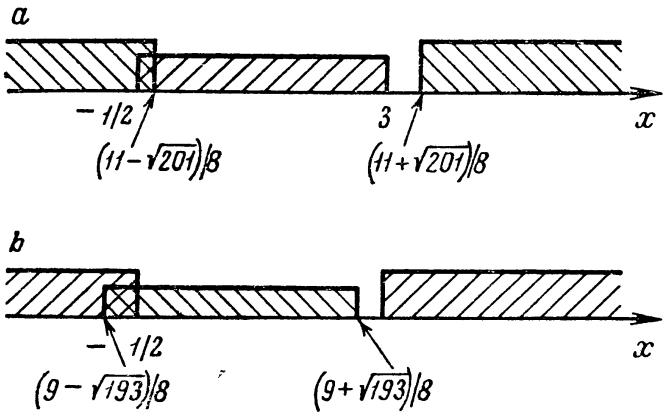


Рис. 6

женным вычислениям, а иногда даже специально доказывать числовые неравенства. Например, в последней задаче число $\frac{11-\sqrt{201}}{8}$ расположено на оси правее, чем $-\frac{1}{2}$. Это сразу следует из легко доказываемого неравенства $-\frac{1}{2}<\frac{11-\sqrt{201}}{8}$. Точно так же число $\frac{11+\sqrt{201}}{8}$ находится правее числа 3, поскольку $3<\frac{11+\sqrt{201}}{8}$ (очевидно, $\sqrt{201}>14$ и, следовательно, числитель дроби в правой части неравенства больше 25).

23. $x\geqslant 1+\sqrt{3}$, $x\leqslant -2-\sqrt{2}$. **24.** $x\geqslant\frac{1}{2}$, $x\leqslant -\frac{2}{3}$. **25.** $1-\sqrt{17}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}-1$. **26.** $2<x<5$. **27.** $x\leqslant 0$. **28.** $x<-3$, $-3<x<-2$, $x>0$. **29.** $1\leqslant x\leqslant 3$, $x=4$. **30.** $x<\frac{1}{5}(-2-\sqrt{79})$, $\frac{1}{5}(-\sqrt{34}-3)<x<\frac{1}{5}(\sqrt{34}-3)$, $x>\frac{1}{5}(\sqrt{79}-2)$. **31.** $x\leqslant\frac{3}{2}$. **32.** Имеем: $|x^3-1|=|x-1|\times$ $\times|x^2+x+1|=|x-1|(x^2+x+1)$, ибо $x^2+x+1>0$ при любых действительных x. Тогда получаем $|x-1|\leqslant 1$. Ответ: $0\leqslant x\leqslant 2$.

33. Исключая из системы $|x-1|$, получим уравнение

для определения y: $|y-5|+y-5=1$. Отсюда $y=\frac{11}{2}$. Тогда из второго уравнения системы имеем $|x-1|=\frac{1}{2}$, откуда $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. Ответ:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}, \\ y_1=\frac{11}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{3}{2}, \\ y_2=\frac{11}{2}. \end{cases}$$

34. $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-5, \\ y_2=2. \end{cases}$

35. Для решения задачи необходимо рассмотреть четыре случая:

1) если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то получим систему

$$\begin{cases} y-2x+3=0, \\ y+x-3=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1; \end{cases}$$

2) если $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, то

$$\begin{cases} y-2x+3=0, \\ -y+x-3=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=-3; \end{cases}$$

3) если $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, то

$$\begin{cases} y+2x+3=0, \\ y+x-3=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_3=-6, \\ y_3=9; \end{cases}$$

4) если $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, то

$$\begin{cases} y+2x+3=0, \\ -y+x-3=0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_4=0, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

Каждое из четырех решений удовлетворяет записанным ограничениям и, следовательно, является решением исходной системы.

36. Аналогично предыдущей задаче рассмотрите четыре случая:

1) $x^2-2x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; 2) $x^2-2x\geqslant 0$, $y<0$;

3) $x^2-2x<0$, $y\geqslant 0$; 4) $x^2-2x<0$, $y<0$.

Ответ: $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \\ y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=1, \\ y_3=0. \end{cases}$

37. 1 способ. Аналитическое решение.

1) Пусть $x \geqslant -1$. Тогда $|x+1| = x+1$ и уравнение принимает вид $f_1(x) = x^2 + x - a = 0$. Решения этого уравнения $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$ будут действительные, если $1 + 4a \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant -\frac{1}{4}$. Выясним, при каких значениях параметра a полученные решения (или хотя бы одно из них) удовлетворяют ограничению $x \geqslant -1$. Для этого необходимо и достаточно [1], чтобы были выполнены следующие условия:

а) $f_1(-1) = -a < 0$, т. е. $a > 0$. Тогда уравнение имеет одно решение $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$, расположенное на числовой оси правее -1 (рис. 7).

б) $\begin{cases} f_1(-1) = -a \geqslant 0, \\ D = 1 + 4a \geqslant 0, \end{cases}$ $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$.

В этом случае (рис. 8) оба корня $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$

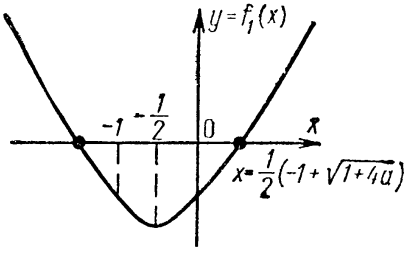


Рис. 7

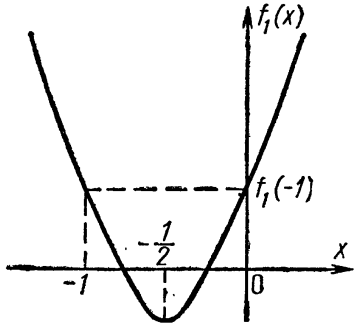


Рис. 8

не меньше -1 и, следовательно, являются решениями уравнения.

2) Пусть $x < -1$. Тогда задача сводится к решению уравнения

$$f_2(x) = x^2 + x + a = 0,$$

корни которого суть $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4a})$. Поскольку графиком квадратного трехчлена $y = f_2(x)$ является парабола, вершина которой имеет абсциссу $x_0 = -\frac{1}{2} > -1$ и ветви направлены вверх, то условию $x < -1$ может

[1] См. предварительные замечания § 3, ч. I.

удовлетворять лишь меньший корень $x=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1-4a})$ Он будет решением исходного уравнения тогда и только тогда, когда $f_2(-1)=a<0$ (рис. 9). Итак, мы получили, что

при $a>0$, $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4a})$,

при $a=0$, $x=0$ и $x_2=-1$,

при $-\frac{1}{4}\leqslant a<0$, $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4a})$, $x_3=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a})$,

при $a<-\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1-4a})$.

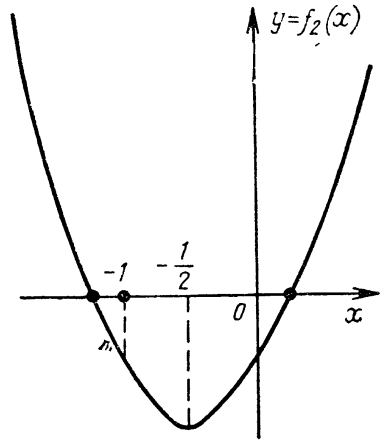


Рис. 9

II способ. Графическое решение.

Запишем уравнение в виде $x|x+1|=a$ (1) и будем искать его решение как ординаты точек пересечения графиков функции $y=f(x)=x|x+1|$ и семейства прямых $y=a$. График $y=f(x)$ при $x\geqslant-1$ совпадает с графиком функции $y_1=x^2+x$, а при $x<-1$ с графиком функции $y=-x^2-x$ (рис. 10). В зависимости от величины параметра исходное уравнение может иметь одно, два или три решения из числа a решений уравнений $x^2+x=a$ (2), $-x^2-x=a$ (3) (рис. 10).

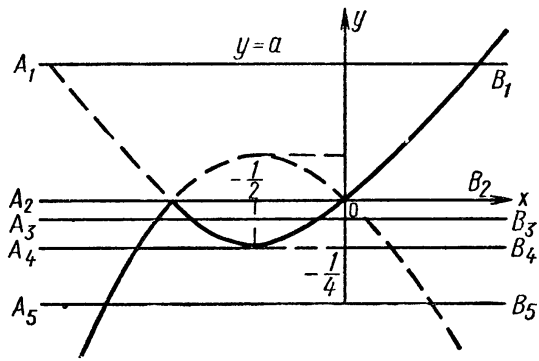


Рис. 10

а) Если $a>0$ (прямая A_1B_1), уравнению (1) удовлетворяет только больший корень уравнения (2) $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a})$.

б) Если $a=0$ (прямая A_2B_2), уравнение (1) имеет два решения $x_1=-1$, $x_2=0$.

в) Если $-\frac{1}{4}<a<0$ (прямая A_3B_3), уравнению (1)

удовлетворяют оба корня уравнения (2) $x_{1,2}=\frac{1}{2}\times$ $\times(-1\pm\sqrt{1+4a})$ и меньший корень уравнения (3) $x_3=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a})$.

г) Если $a=-\frac{1}{4}$ (прямая A_4B_4), уравнению (1) удовлетворяет меньший корень уравнения (3) и $x=-\frac{1}{2}$.

д) Если $a<-\frac{1}{4}$ (прямая A_5B_5), уравнению (1) удовлетворяет только меньший корень уравнения (3) $x=$ $=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4a})$.

Замечание. Отметим, что графический метод широко применяется при решении задач с параметрами и иногда ему отдается предпочтение по сравнению с методом аналитическим. Им часто пользуются как для установления числа решений уравнений, так и для выбора допустимых значений параметров, отбора решений, удовлетворяющих условию задачи, а также для решения неравенств.

38. Если решать уравнение аналогично уравнению задачи № 3 (т. е. стандартным методом), то необходимо разбить множество значений x на три отрезка. Для этого придется откладывать на числовой оси числа a и $-a-1$, но мы не можем этого сделать, так как не знаем «априори», как эти числа соотносятся между собой. Поэтому нужно будет отдельно рассматривать случаи $a\geqslant-a-1$ и $a<-a-1$.

Для каждого из них придется решать задачу обычными методами. При этом надо следить, попадают ли найденные решения в рассматриваемые интервалы.

Мы же предлагаем более эффективный, графический подход к решению этой задачи. Построим на плоскости с осями координат $(a,\ x)$ графики функций $x=a$ и $x=-a-1$. Эти прямые пересекаются в точке $P\left(-\frac{1}{2},\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\right)$ и разбивают плоскость на четыре области (рис. 11, a). Легко видеть, что в I области $x<a$ и $x>-a-1$ во II $x>a$ и $x>-a-1$, в III $x>a$ и $x<-a-1$, в IV $x<a$ и $x<-a-1$. Рассмотрим уравнение в каждой из этих областей.

I. $|x-a|=a-x$, $|x+a+1|=x+a+1$. Тогда имеем $2a+1=3$, $a=1$. Построим все точки, лежащие в рассматриваемой части плоскости (a, x), координаты кото-

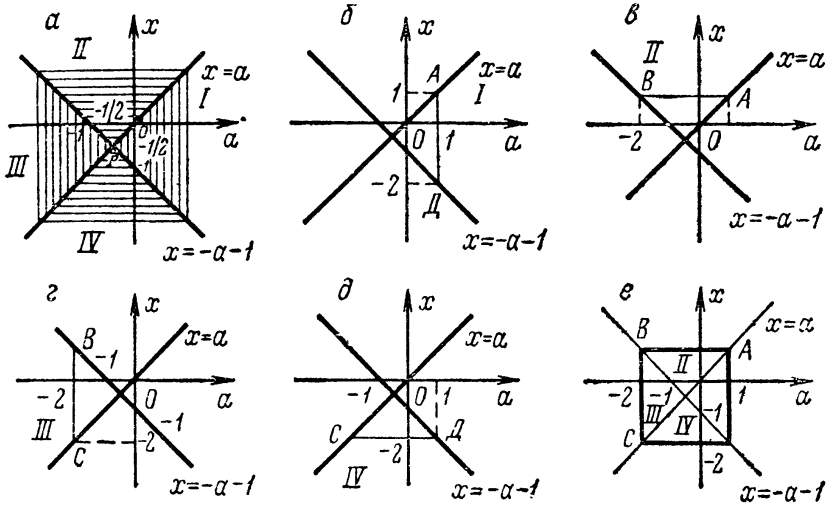


Рис. 11

рых удовлетворяют полученному соотношению $a=1$ (оно случайно не зависит от x). Для этого проведем в I области прямую $a=1$ (рис. 11, *б*), изображающую решение в рассматриваемом интервале. Она пересекает прямые, ограничивающие области, в точках $A(1, 1)$ и $D(1, -2)$.

II. $|x-a|=x-a$, $|x+a+1|=x+a+1$.

Исходное уравнение сводится к следующему $2x+1=3$, $x=1$. Проведем во II области прямую $x=1$ (рис. 11, *в*). Точки ее пересечения с прямыми $x=a$, $x=-a-1$ суть $A(1, 1)$ и $B(-2, 1)$.

III. $|x-a|=x-a$, $|x+a+1|=-x-a-1$.

Имеем $-2a-1=3$, $a=-2$. В III области проводим прямую $a=-2$, которая пересекает прямые $x=a$, $x=-a-1$ в точках $B(-2, 1)$ и $C(-2, -2)$ (рис. 11, *г*).

IV. $|x-a|=a-x$, $|x+a+1|=-x-a-1$.

Имеем: $-2x-1=3$, $x=-2$. Далее см. рис. 11, *д*. Объединим теперь все случаи (рис. 11, *е*). Отсюда видно, что при $a<-2$ решений нет;

при $a=-2$ и $a=1$ бесконечно много решений: x — любое число из отрезка $[-2, 1]$,

при $-2<a<1$ два решения $x_1=1$, $x_2=-2$,

при $a>1$ решений нет. Задача полностью решена.

39. При $a<\frac{2}{5}$ $x_1=-\frac{1}{3}(a+2)$, $x_2=3a-2$,

при $a=\frac{2}{5}$ $x=-\frac{4}{5}$,

при $\frac{2}{5}<a<2$ решений нет,

при $a=2$ $x=0$,

при $a>2$ $x_1=a-2$, $x_2=\frac{1}{3}(a-2)$.

40. Указание. Удобно применить графический метод, рассмотренный на примере задачи № 37. Запишите уравнение в виде $a=\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|+x^2+4x$. Для построения графика функции, стоящей в его правой части, представьте ее в явном виде, освободившись от знака модуля

$$y=f(x)=\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|+x^2+4x=$$

$$=\begin{cases}2\left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{57}{32}, & \text{если } x\geqslant 2,\ x\leqslant -\frac{1}{2}\\ \frac{11}{2}x+1, & \text{если } -\frac{1}{2}<x<2.\end{cases}$$

Ответ: при $a<-\frac{57}{32}$ решений нет,

при $a=-\frac{57}{32}$, $x=-\frac{5}{8}$ (единственное решение),

при $-\frac{57}{32}<a<-\frac{7}{4}$, $x_{1,2}=\frac{1}{8}(-5\pm\sqrt{57+32a})$,

при $a=-\frac{7}{4}$, $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=-\frac{1}{2}$,

при $-\frac{7}{4}<a<12$, $x_1=\frac{1}{8}(-5-\sqrt{57+32a})$, $x_2=\frac{2(a-1)}{11}$.

при $a=12$, $x_1=-\frac{13}{4}$, $x_2=2$,

при $a>12$, $x_{1,2}=\frac{1}{8}(-5\pm\sqrt{57+32a})$.

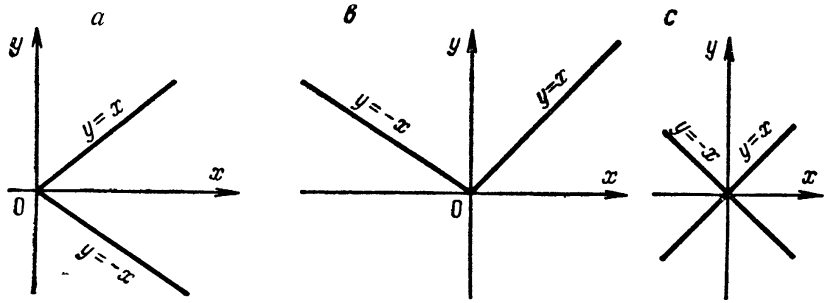


Рис. 12

41. а) Биссектрисы первого и четвертого координатных углов (рис. 12, *а*). в) Биссектрисы первого и второго

координатных углов (рис. 12, *в*). c) Пара взаимно перпендикулярных прямых $y=x$, $y=-x$ (рис. 12, *c*).

42. a) Область на плоскости, задаваемая соотношениями $x>0$, $y>0$ и $x<0$, $y<0$ (рис. 13, *a*).

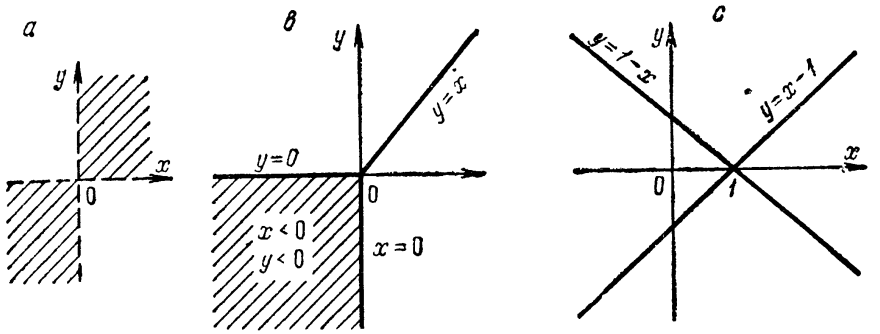


Рис. 13

b) Часть плоскости, задаваемая соотношениями $y=x$ при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$; $x=0$, $y<0$; $y=0$, $x<0$; $x<0$, $y<0$

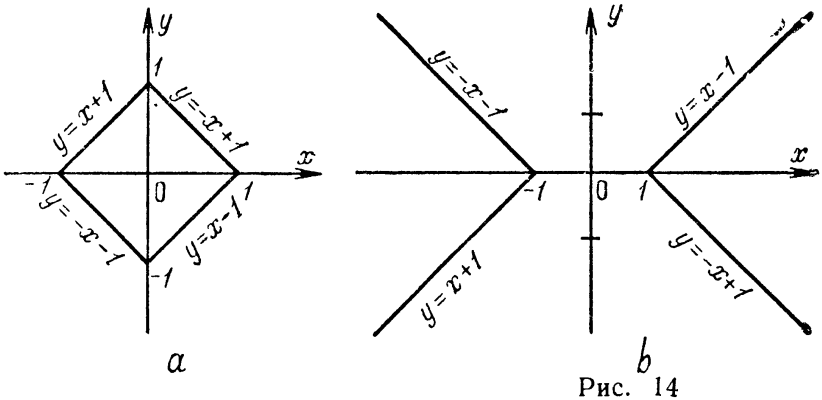
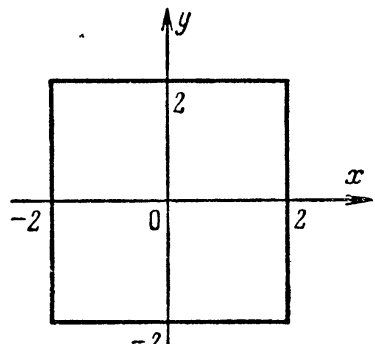


Рис. 14

(рис. 13, *в*). c) Две взаимно перпендикулярные прямые $y=x-1$, $y=1-x$ (рис. 13, *c*).

43. a) Точки, лежащие на сторонах квадрата, определяемых уравнениями $y=-x+1$, $y=x+1$, $y=-x-1$, $y=x-1$ (рис. 14, *a*). b) Стороны двух прямых углов с вершинами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ (рис. 14, *b*). c) Точки, лежащие на сторонах квадрата, которые параллельны координатным осям и имеют уравнения $x=\pm 2$, $y=\pm 2$ (рис. 14, *c*).



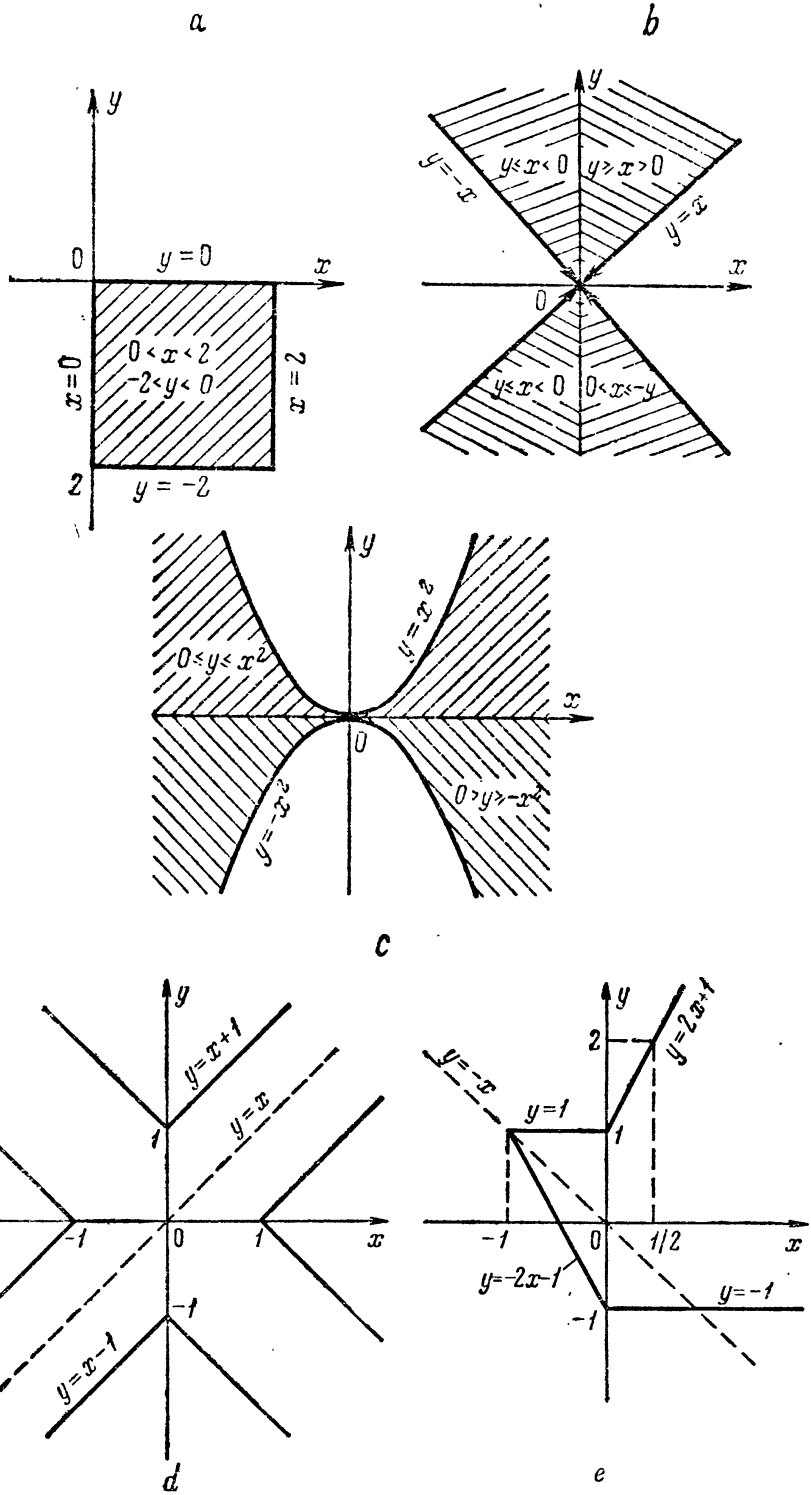

a
b
y
0
y = 0
x
x = 0
x = 2
0 < x < 2
−2 < y < 0
2
y = −2
y
y = −x
y ≤ x < 0
y ≥ x > 0
y = x
x
0
y ≤ x < 0
0 < x ≤ −y
y
0 ≤ y ≤ x²
y = x²
x
0
y = −x²
0 ≥ y ≥ −x²
c
y
y = x + 1
1
y = x
−1
0
1
x
−1
y = x − 1
d
y
2
y = 2x + 1
y = −x
y = 1
1
−1
0
1/2
x
y = −2x − 1
y = −1
−1
e

Рис. 15

44. а) Все точки, лежащие внутри квадрата и на его сторонах, задаваемых уравнениями $x=2$, $x=0$, $y=0$, $y=-2$ (рис. 15, *а*). в) Множество точек, лежащих внутри областей $|x|\leqslant y$ и $y\leqslant -|x|$ и на их границах, кроме начала координат 0 (рис. 15, *b*). с) Точки, лежащие на параболах $y=x^2$, $y=-x^2$ и вне их, включая и начало координат 0 (рис. 15, *с*).

45. а) Если искомому множеству точек принадлежит точка $M_0(x_0, y_0)$, то поскольку $|-x|=|x|$, $|-y|=|y|$, ему же принадлежат и точки $M_1(-x_0, y_0)$, $M_2(x_0, -y_0)$, $M_3(-x_0, -y_0)$, симметричные точке M_0 относительно оси Oy, оси Ox и начала координат 0 соответственно. Поэтому достаточно найти точки, удовлетворяющие заданному соотношению при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. В этом случае имеем $|y-x|=1$, откуда

$$y=x+1 \text{ при } y\geqslant x\geqslant 0,$$
$$y=x-1 \text{ при } 0\leqslant y<x.$$

Все остальные точки найдем, преобразуя найденное множество точек, симметрично относительно осей координат (рис. 15, *d*).

b) Освобождаясь последовательно от знаков модуля, получим:

$$y=\begin{cases} 2x+1, & \text{при } y>x\geqslant 0,\\ -1, & \text{при } y\leqslant x,\ x\geqslant 0,\\ 1, & \text{при } y\geqslant -x>0,\\ -2x-1, & \text{при } y<-x,\ x<0. \end{cases}$$

Множество точек, удовлетворяющих этим соотношениям, образует ломаную линию (рис. 15, *е*).

с) Заданное соотношение сводится к условию задачи № 43 а) (рис. 14, *а*).

46. а) Освободившись от знаков модуля, представим функцию в явном виде

$$y=\begin{cases} 4x+5, & \text{при } x\geqslant 3,\\ 2x+11, & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 11, & \text{при } -3\leqslant x\leqslant 0,\\ -2x+5, & \text{при } -5\leqslant x\leqslant -3,\\ -4x-5, & \text{при } x\leqslant -5. \end{cases}$$

Построив график функции (рис. 16), убедитесь, что она принимает наименьшее значение на целом отрезке. А именно наименьшее значение функции $y = y_{\min} = 11$ при $-3 \leqslant x \leqslant 0$.

b) Данная задача представляет обобщение предыдущей. Рассмотрим два способа ее решения.

I способ. Разобьем числовую ось на пять интервалов точками A, B, C и D, изображающими соответственно числа a, b, c и d (рис. 17, a). Точку с переменной абсциссой x будем обозначать через M. Рассмотрим заданную функцию в каждом из этих интервалов. При этом будем использовать геометрический смысл модуля разности как расстояния между соответствующими точками.

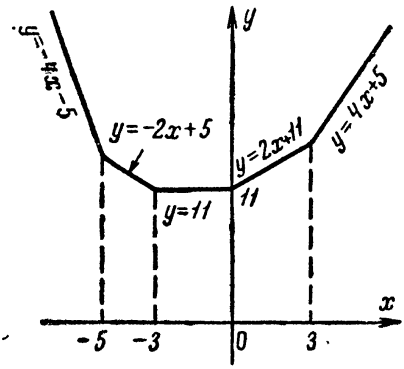


Рис. 16

1) $x \geqslant d$ (рис. 17, b). В этом случае

$$f(x) = MA + MB + MC + MD = AB + 2MB + 2MD + CD = \\ = AB + 2BC + 3CD + 4MD.$$

Очевидно, $f(x)$ принимает наименьшее значение, когда

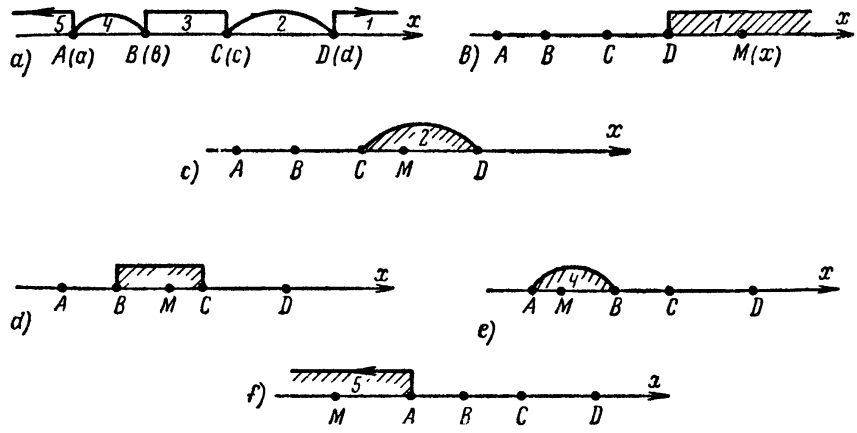


Рис. 17

точка M совпадает с точкой D (т. е. $x = d$, $MD = 0$); это значение равно

$$f^{(1)}_{\min} = AB + 2BC + 3CD. \qquad (1)$$

2) $c \leqslant x < d$ (рис. 17, *c*); тогда $f(x) = MA + MB + MC + MD = AB + 2MB + CD = AB + 2BC + 2MC + CD$. Отсюда видно, что наименьшего значения функция достигает при $MC = 0$ (т. е. точка M совпадает с точкой C, $x = c$), и

$$f_{\min}^{(2)} = AB + 2BC + CD. \tag{2}$$

3) $b \leqslant x \leqslant c$ (рис. 17, *d*); легко убедиться, что при этих значениях x функция $f(x)$ постоянна и равна

$$f^{(3)} = AB + 2BC + CD = f_{\min}^{(2)}. \tag{3}$$

4) $a < x \leqslant b$ (рис. 17, *e*). Здесь

$$f(x) = MA + MB + MC + MD = AB + (MB + BC) + (MB + BC + CD) = AB + 2MB + 2BC + CD.$$

Отсюда

$$f_{\min}^{(4)} = AB + 2BC + CD \tag{4}$$

(это значение принимается, когда точка M совпадает с точкой B, $x = b$).

5) $x \leqslant a$ (рис. 17, *f*). Аналогично предыдущему, найдем

$$f_{\min}^{(5)} = 3AB + 2BC + CD. \tag{5}$$

Сравнивая полученные выражения (1)—(5), видим, что наименьшее значение функции $f(x)$

$$f_{\min} = AB + 2BC + CD.$$

Это значение $f(x)$ принимает при $b \leqslant x \leqslant c$. Учитывая, что $AB = b - a$, $BC = c - b$, $CD = d - c$, найдем окончательный ответ:

$$f_{\min} = -a - b + c + d.$$

II способ — графический.

Решение получается аналогично предыдущей задаче № 46 а.

Замечание. Рассмотрим функцию более общего вида

$$y = f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|.$$

Для того чтобы найти наименьшее значение этой функции в случае нечетного числа n, можно воспользоваться следующим простым правилом: числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нужно выписать в возрастающем порядке. После этого x вы-

бирается равным числу, стоящему ровно в середине этой последовательности чисел (если n нечетно, такое число всегда найдется). При этом значении x функция принимает наименьшее значение. Нарисуйте график функции для этого случая.

Подумайте, как выглядит график $y=f(x)$ в случае четного n. Опираясь на решение задач № 46 (a, b), сформулируйте правило для нахождения наименьшего значения функции в этом случае (обратите внимание, что в этих задачах функция принимала наименьшее значение не в точке, а на целом отрезке).

47. Наименьшее значение функции зависит, очевидно, от взаимного расположения на числовой оси чисел a^2+a, 1 и -3 и принимается при x, равном одному из этих чисел[1]). В этих точках выражения под знаком модуля обращаются в нуль и меняют знак. Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть $a^2+a\leqslant -3$. Это неравенство ни при каких действительных значениях a не удовлетворяется, ибо квадратный трехчлен a^2+a+3 имеет комплексные корни.

2) $$-3<a^2+a\leqslant 1. \qquad (1)$$

Поскольку $a^2+a+3>0$ при любых действительных a, то решением системы (1) будут все решения неравенства

$$a^2+a\leqslant 1, \qquad (2)$$

которые имеют вид

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (3)$$

Подсчитаем значения функции $f(x)$ при x, равном -3, a^2+a и 1 соответственно (при вычислении модулей примем во внимание условие (1)). Имеем:

$$f(-3)=8-2\,|\,a^2+a+3\,|=-2a^2-2a+2, \qquad (а)$$

$$f(a^2+a)=2\,|\,a^2+a-1\,|+|\,a^2+a+3\,|=$$

$$=2(1-a^2-a)+a^2+a+3=-a^2-a+5, \qquad (б)$$

$$f(1)=4-2\,|\,a^2+a-1\,|=2a^2+2a+2. \qquad (в)$$

Поскольку наименьшее значение $f(x)$ равно одному из выписанных выражений (а) или (б), или (в) (заранее

[1]) Отметим, что правило, сформулированное в замечании к задаче № 46, здесь непосредственно неприменимо, поскольку коэффициенты при x в каждом слагаемом правой части $f(x)$ различны.

неизвестно, какому!), то с учетом неравенств (3) решение задачи в этом случае можно получить, потребовав, чтобы одновременно все выражения (a)—(b) были больше 1. Другими словами, в этом случае задача сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ f(-3) = -2a^2-2a+2 > 1, \\ f(a^2+a) = -a^2-a+5 > 1, \\ f(1) = 2a^2+2a+2 > 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \\ 2a^2+2a-1 < 0, \\ a^2+a-4 < 0, \\ 2a^2+2a+1 < 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

3) Пусть теперь $a^2+a > 1$, т. е. $a^2+a-1 > 0$,

$$a > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \; a < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Учитывая условие $a^2+a > 1$, находим

$$f(-3) = -2a^2-2a+2,$$

$$f(1) = -2a^2-2a+6,$$

$$f(a^2+a) = 2(a^2+a-1)-a^2+a+3 = 3a^2+3a+1.$$

Теперь задача сводится к решению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} a^2+a > 1 \\ f(-3) > 1 \\ f(1) > 1 \\ f(a^2+a) > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \; a < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ 2a^2+2a-1 < 0, \\ 2a^2+2a-5 < 0, \\ a^2+a > 0. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система несовместна (убедитесь в этом). Таким образом, окончательный ответ дается интервалом (4). Ответ: $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

48. а) Запишем функцию в виде

$$f(x) = 3|x-a| + |x-1| \cdot |x+2|.$$

Наименьшее значение функции будет зависеть от положения на числовой оси числа a относительно чисел 1 и -2. Возможны три различных случая: 1) $a \geqslant 1$; 2) $-2 < a < 1$; 3) $a \leqslant -2$. Проанализировав график $y = f(x)$ для каждого из этих случаев, докажите, что наименьшее значение функция принимает при x, равном среднему из чисел 1, -2, a, если их расположить в порядке возрастания. Тогда имеем

1) $a \geqslant 1$. Здесь $-2 < 1 \leqslant a$ и наименьшее значение функции

$$f_{\min} = f(1) = 3|1-a| = 3|a-1| = 3(a-1).$$

По условию $f_{\min} < 2$, $3a-3 < 2$, $a < \frac{5}{3}$. С учетом ограничения $a \geqslant 1$ окончательно имеем

$$1 \leqslant a < \frac{5}{3}. \qquad (1)$$

2) $$-2 < a < 1. \qquad (2)$$

В этом случае
$f_{\min} = f(a) = |a-1| \cdot |a+2| = (1-a)(a+2) = -a^2 - a + 2$.
Имеем: $-a^2 - a + 2 < 2$, $a(a+1) > 0$,

$$a > 0, \quad a < -1.$$

Учитывая ограничение (2), получим

$$0 < a < 1, \quad -2 < a < -1. \qquad (3)$$

3) $a \leqslant -2$. Здесь $a \leqslant -2 < 1$ и функция принимает наименьшее значение при $x = -2$, так что

$$f_{\min} = f(-2) = 3|-2-a| = 3|a+2| = 3(-a-2).$$

Имеем $-3a-6 < 2$, $a > -\frac{8}{3}$ и с учетом условия $a \leqslant -2$ получим

$$-\frac{8}{3} < a \leqslant -2. \qquad (4)$$

Объединяя полученные решения (1), (3), (4), можно записать ответ в виде

$$0 < a < \frac{5}{3}, \quad -\frac{8}{3} < a < -1.$$

48. б) $1 < a < 4 + 2\sqrt{2}$.

49. Освобождаясь последовательно от знаков модуля, легко получить

$$W = \begin{cases} 4x, \text{ если } x \geqslant y \text{ и } x \geqslant z, \\ 4y, \text{ если } y \geqslant x \text{ и } y \geqslant z, \\ 4z, \text{ если } z \geqslant x \text{ и } z \geqslant y. \end{cases}$$

Более компактно результат можно записать в виде $W = 4 \max(x, y, z)$, где $\max(x, y, z,)$ обозначает наибольшее из трех чисел x, y, z.

50.
$$y = \begin{cases} 1 + x^2, \text{ если } x > 0, \\ -1 - x^2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ функция не определена.

51. $y = |x+2| + |x-1| + |x-3| =$

$$= \begin{cases} 3x - 2, \text{ если } x \geqslant 3, \\ x + 4, \text{ если } 1 \leqslant x < 3, \\ -x + 6, \text{ если } -2 < x < 1, \\ -3x + 2, \text{ если } x \leqslant -2. \end{cases}$$

52. $\sqrt[3]{x^2}$. **53.** $(b \cdot \sqrt{a + bc^{mx}})^{-1}$.

54. $\lg x/(a + bx)^{1/2}$.

55. Легко видеть, что данное выражение имеет смысл, если $a^{2x} + 4a^x - 1 > 0$, т. е. $a^x > \sqrt{5} - 2$; при этом $a > 0$, $a \neq 1$.

После упрощений данное выражение приводится к виду $(a^{2x} + 4a^x - 1)^{1/2}$. Оно равно 2, если $a^{2x} + 4a^x - 1 = 4$, откуда $a^x = 1$, $x = 0$.

56. Имеем

$$1) \quad a + x = a + \frac{2ab}{b^2+1} = \frac{a}{b^2+1}(b+1)^2,$$

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{\frac{a}{b^2+1}} \cdot |b+1|;$$

$$2)\ a-x=a-\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{a}{b^2+1}(b-1)^2,$$

$$\sqrt{a-x}=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}\cdot|b-1|.$$

Эти предварительные вычисления позволяют найти область определения или область допустимых значений (ОДЗ) для параметров a и b, т. е. множество тех значений a и b, при которых выражения A и x имеют смысл. Для этого необходимо потребовать, чтобы $a+x\geqslant 0$, $a-x\geqslant 0$, знаменатель в выражении A не обращался в нуль, $b\neq 0$. С учетом проделанных вычислений ОДЗ для a и b будет иметь вид $a>0$, $b\neq 0$. Подставляя значения $\sqrt{a+x}$ и $\sqrt{a-x}$ в выражение A, получим

$$A=\frac{|b+1|-|b-1|}{|b+1|+|b-1|}.$$

Освобождаясь, далее, от знаков модуля и учитывая ОДЗ для a и b, найдем окончательный ответ:
при $a>0$, $b\neq 0$

$$A=\begin{cases} 1/b, & \text{если } b\geqslant 1,\ b\leqslant -1,\\ b & \text{если, } -1<b<0,\ 0<b<1.\end{cases}$$

57. $$B=\begin{cases} a-b, & \text{если } a\geqslant b>0,\\ \frac{b}{a}(b-a), & \text{если } 0<a<b.\end{cases}$$

58. Найдем область допустимых значений (ОДЗ) для параметров a и b. Для этого необходимо потребовать: а) $\frac{2a}{b}-1\geqslant 0$, т. е. $a/b\geqslant 1/2$ (отсюда видно, что параметры a и b имеют одинаковые знаки); б) $a\neq 0$, $b\neq 0$; в) $1-bx\neq 0$, $x\neq 1/b$, что равносильно требованию $a\neq b$ (проверьте!); г) $\frac{1+bx}{1-bx}>0$ [1],
последнее условие выполняется с учетом предыдущих

---

[1] Имеет место строгое неравенство, так как $1+bx\neq 0$. Последнее условие вместе с $1+ax\neq 0$ выполняется автоматически (проверьте!).

ограничений при любых a и b, так как оно эквивалентно следующей цепочке неравенств

$$(1+bx)(1-bx)>0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)<0,$$

$$x^2-\frac{1}{b^2}<0 \Longleftrightarrow -\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2<0,$$

что очевидно. Окончательно, ОДЗ имеет вид: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$, $a/b\geqslant 1/2$ или

$$0<b\leqslant 2a, \quad 2a\leqslant b<0.$$

Выполним некоторые подготовительные преобразования:

1) Упростим множитель перед радикалом в выражении S

$$\frac{1-ax}{1+ax}=\frac{1-\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{1+\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}=\frac{2\left(\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{2a}{b}-1}\right)}{2\left(1-\frac{a}{b}\right)}=\frac{a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{b-a}$$

(освободились от иррациональности в знаменателе).

2) Преобразуем подкоренное выражение

$$\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{a+b\sqrt{2a/b-1}}{a-b\sqrt{2a/b-1}}=\frac{(a-b)^2}{(a-b\sqrt{2a/b-1})^2}$$

(освободились от иррациональности в числителе), тогда

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{|a-b|}{|a-b\sqrt{2a/b-1}|}.$$

Теперь исходное выражение

$$S=\frac{|a-b|}{b-a}\cdot\frac{a-b\sqrt{2a/b-1}}{|a-b\sqrt{2a/b-1}|}.$$

Чтобы освободиться от модуля в знаменателе, исследуем знак „подмодульного“ выражения:

$$a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}>0, \quad a>b\sqrt{\frac{2a}{b}-1};$$

а) $b>0$; имеем:

$$\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{2a}{b}-1}, \quad \frac{a^2}{b^2}>\frac{2a}{b}-1, \quad \left(\frac{a}{b}-1\right)^2>0\ ^{1}),$$

что выполняется при любых a и b из ОДЗ.

---

[1]) О законности возведения в квадрат см. стр. 45.

б) $b<0$; тогда $a/b<\sqrt{2a/b-1}$, $(a/b-1)^2<0$,
что не имеет места ни при каких действительных a и b.

Таким образом, $a-b\sqrt{2a(b-1)}>0$ при $b>0$ или с учетом ОДЗ при $0<b<2a$.

Аналогично убеждаемся, что

$$a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}<0 \text{ при } 2a\leqslant b<0.$$

Теперь, освобождаясь от модуля в знаменателе в преобразованном выражении S, получим

$$S=\begin{cases}\dfrac{|a-b|}{b-a}, & \text{если } 0<b\leqslant 2a,\\ \dfrac{|a-b|}{a-b}, & \text{если } 2a\leqslant b<0.\end{cases}$$

Избавляясь, далее, от модуля в числителе и согласуя новые ограничения на параметры ($a>b$ и $a<b$) с полученными ранее и с ОДЗ, найдем окончательный ответ:

$$S=\begin{cases}1, & \text{если } 0<a<b\leqslant 2a,\ 2a\leqslant b<a<0,\\ -1, & \text{если } 0<b<a,\ a<b<0\ ^1).\end{cases}$$

2°. Комплексные числа

59. Согласно геометрической интерпретации модуля комплексного числа все точки, изображающие комплексные числа, у которых $|z|=2$ находятся на одном и том

---

[1]) Замечания к задачам № 52—58. При решении задач № 52—58 нужно иметь в виду следующее:

1) Если перед подстановкой явного выражения для x удобнее преобразовать исходное выражение, то все преобразования должны быть равносильны, т. е. $S\Leftrightarrow S_1\Leftrightarrow S_2\Leftrightarrow\ldots$ и т. д. Например, в задаче № 58 неверно подводить множитель $(1-ax)/(1+ax)$ под знак радикала, так как при некоторых a и b он отрицателен. Это приведет к неверному ответу.

2) Иногда удобнее освободиться от иррациональности в числителе, а не в знаменателе.

3) Основой правильного преобразования иррациональных алгебраических выражений является активное усвоение и свободное оперирование формулами, выписанными в пункте 2° предварительных замечаний к § 1, ч. I.

же расстоянии, равном двум, от начала координат, т. е. лежат на окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

a) Точка $-3z$ расположена на луче, диаметрально противоположном тому, на котором лежит точка z, и отстоит от начала координат на расстоянии в 3 раза большем, чем точка z. (Почему? Сделайте чертеж). Поэтому точки $-3z$, где $|z|=2$, расположены на окружности радиуса 6 с центром в начале координат[1]).

b) На окружности радиуса 2 с центром в точке (1, 0).

c) Все точки $2z$, где $|z|=2$, расположены на окружности радиуса 4 с центром в начале координат. Точка $-1+2z$ получается из точки $2z$ сдвигом влево на 1[2]). Поэтому точки $-1+2z$, где $|z|=2$, расположены на окружности радиуса 4 с центром в точке $(-1, 0)$ (рис. 18).

d) На окружности радиуса 8 с центром в точке (3, 0).

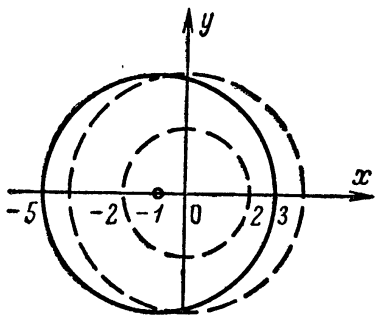


Рис. 18

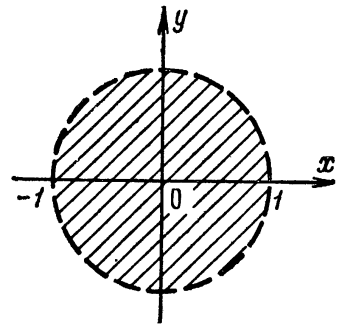


Рис. 19

60. Точки, удовлетворяющие условию $|z|=1$, расположены на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Точки же, для которых $|z|<1$, расположены внутри этой окружности (рис. 19).

61. Вне окружности радиуса 3 с центром в начале координат и на самой окружности.

62. Внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями с центром в начале координат и с радиу-

---

[1]) Отметим, что эта окружность повернута относительно окружности $|z|=2$ на 180°.

[2]) Действительно, если $2z=x+iy$, то $-1+2z=(x-1)+iy$, т. е. у точки, изображающей комплексное число $-1+2z$, ордината осталась прежней, а абсцисса уменьшилась на 1.

сами $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ и на самой окружности с радиусом $r_1 = 1$ (рис. 20).

63. Данное условие равносильно следующему: $3|z| < |z| + 6$, $|z| < 3$. А последнему условию удовлетворяют точки, расположенные внутри окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

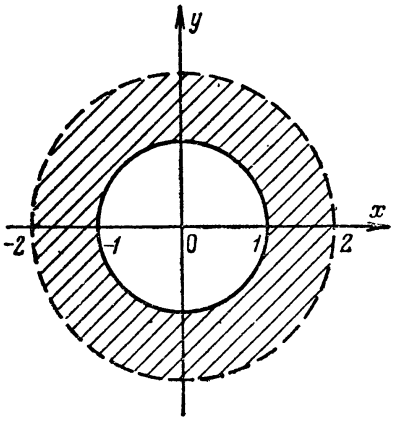


Рис. 20

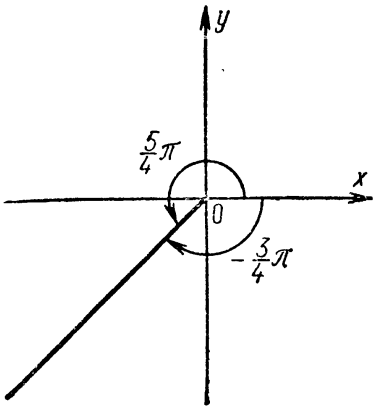


Рис. 21

64. a) На луче, выходящем из начала координат под углом $\pi/3$ к положительному направлению оси Ox.

b) На луче, выходящем из начала координат под углом $5\pi/4$ к положительному направлению оси Ox (рис. 21).

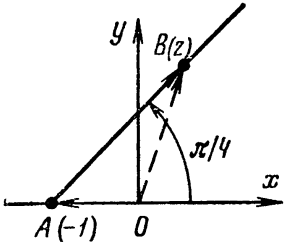


Рис. 22

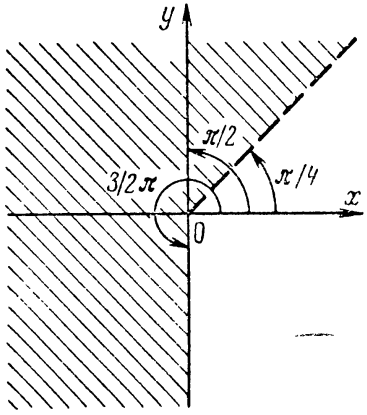


Рис. 23

65. Если z — искомая точка, то разность $z-(-1) = z+1$ изображается вектором $\overrightarrow{AB}$ (рис. 22). Поэтому

все точки, удовлетворяющие условию $\arg(z+1)=\pi/4$, лежат на луче, выходящем из точки $A(-1, 0)$ под углом $\pi/4$ к положительному направлению оси Ox.

66. Часть плоскости, содержащая 2-й и 3-й квадранты, включая ось Oy без начала координат, и часть первого квадранта, расположенная между лучами, выходящими из начала координат под углами $\pi/4$ и $\pi/2$ (рис. 23).

67. Часть OA луча, выходящего из начала координат под углом π к положительному направлению оси Ox, лежащую внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 24).

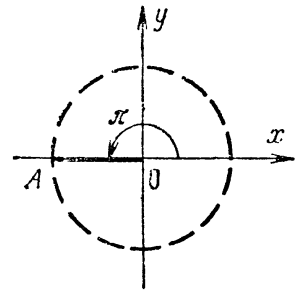


Рис. 24

68. Вспоминая геометрический смысл модуля разности комплексных чисел, данное условие можно перефразировать следующим образом: найти множество точек z, которые удалены от точки 1 на расстояние, равное двум. Множество таких точек z образует окружность радиуса 2 с центром в точке (1,0) (рис. 25).

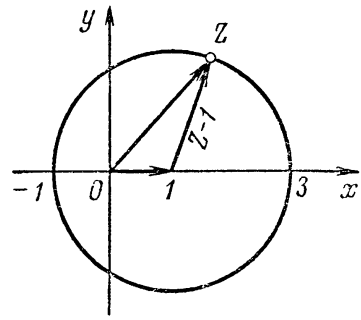


Рис. 25

69. Указание. Представьте $|z+2|$ в виде

$$|z+2|=|z-(-2)|.$$

Ответ. Окружность радиуса 1 с центром в точке $(-2, 0)$.

70. Перепишем данное условие в виде $|z-i|<1$. Значит расстояние от точек z до точки i меньше 1, т. е. все точки, удовлетворяющие этому условию, будут лежать внутри круга радиуса 1 с центром в точке (0,1), изображающей число i (рис. 26).

71. Записав левую часть данного условия в виде $|z-(-1+i)|$, можно истолковать этот модуль как расстояние между искомыми точками z и точкой $z_0=-1+i$. Тогда данное условие можно сформулировать так: найти все точки z, которые удалены от точки $z_0=-1+i$ на расстояния меньшие или равные 1. Все такие точки z расположены внутри круга и на самой окружности с центром в точке $z_0(-1, 1)$ и радиусом $r=1$.

72. Кольцо между двумя концентрическими окружностями с центром в точке $C(0, -1/3)$ и радиусами $r_1 = 5/2$, $r_2 = 1$ (рис. 27).

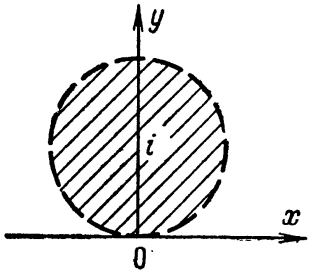


Рис. 26

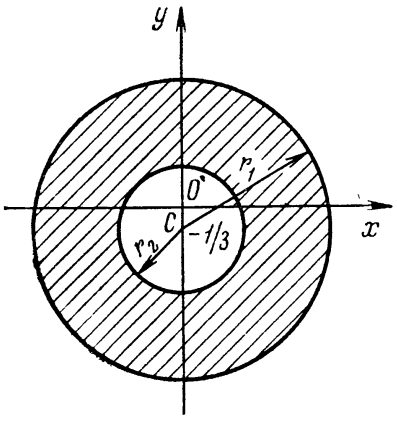


Рис. 27

73. Кольцо, ограниченное окружностями с центром в точке $(0, -4)$ и радиусами $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, и сами окружности.

74. Указание. Перепишите данное условие в виде

$$|3z - 2i| < \frac{1}{2}, \quad 3\left|z - \frac{2}{3}i\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|z - \frac{2}{3}i\right| < \frac{1}{6}.$$

Ответ: Точки, лежащие внутри круга радиуса $r = 1/6$ с центром в точке $(0, 2/3)$.

75. Точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке $(3/2, 0)$.

76. Окружность радиуса 1 с центром в точке $(-3, 2)$.

77. Окружность радиуса $\sqrt{7}$ с центром в точке $(1, -2)$.

78. Все точки, расположенные вне круга с центром в точке $(-1/2, 1/2)$ и радиусом $r = 9/2$.

79. Кольцо, ограниченное окружностями с центром в точке $(-3, 2)$ и радиусами $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

80. Пользуясь тем, что модуль частного двух комплексных чисел равен отношению их модулей, перепишем данное условие в виде $|z + i| = |z - 1|$, $z \neq 1$. Модуль $|z + i| = |z - (-i)|$ есть расстояние от искомых точек z до фиксированной точки $A(0, -1)$, изображающей число $-i$.

Модуль $|z - 1|$ есть расстояние от точек z до фиксированной точки $B(1, 0)$, изображающей число 1.

По условию требуется найти точки, для которых эти расстояния равны.

Из геометрии известно, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти две точки и проходящая через его середину. Значит, искомые точки лежат на прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину (рис. 28), т. е. на биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов.

81. Нижняя полуплоскость и ось Ox.

82. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z-1|=|z+1|$, есть прямая, проходящая через середину отрезка AB, где $A(1, 0)$ и $B(-1, 0)$, перпендикулярно

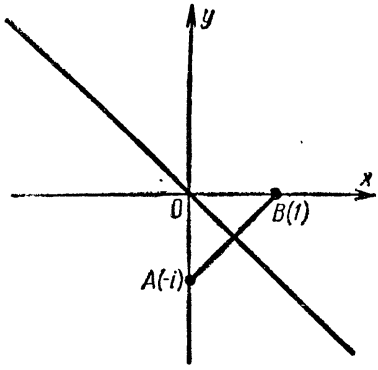


Рис. 28

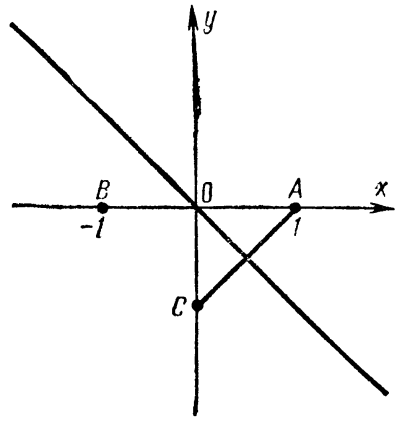


Рис. 29

к этому отрезку, т. е. ось Oy. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z-1|=|z+i|$, есть прямая, проходящая через середину отрезка AC, где $C(0, -1)$, перпендикулярно к этому отрезку, т. е. биссектриса 2-го и 4-го, координатных углов (рис. 29). Отсюда ясно, что исходному условию удовлетворяет лишь одна точка 0, лежащая на пересечении этих двух прямых. Итак, условию задачи отвечает лишь одно комплексное число $z=0$.

83. Точка $(0, -2)$. **84.** Таких точек нет. **85.** Перепишем данные равенства в виде

$$3|z-12|=5|z-8i|, \tag{1}$$

$$|z-4|=|z-8|. \tag{2}$$

Пусть $z=x+iy$ — искомое комплексное число. Тогда соотношение (1) запишется в виде

$$3|(x-12)+iy|=5|x+i(y-8)|.$$

Вычисляя модули комплексных чисел, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, и возводя обе его части в квадрат (это равносильное преобразование. Почему?!), получим

$$9(x-12)^2+9y^2=25x^2+25(y-8)^2.$$

После упрощений это соотношение примет вид

$$x^2+y^2+\frac{27}{2}x-25y+19=0. \qquad (1')$$

Далее, множество точек z, удовлетворяющих условию (2), есть прямая, проходящая через середину отрезка AB, где $A(4, 0)$, $B(8, 0)$, перпендикулярно к нему. Поскольку серединой отрезка AB является точка $C(6,0)$, то уравнение этой прямой $x=6$ (сделайте чертеж).

Тогда искомые комплексные числа имеют вид $z=6+iy$. Подставляя $x=6$ в соотношение (1'), получим квадратное уравнение для определения y:

$$y^2-25y+136=0,$$

корни которого суть $y_1=17$, $y_2=8$. Итак, искомых комплексных числа два $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$.

86. Указание. Исходите из представления комплексных чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме.

Ответ: Либо $|z_2|=0$, z_1 — любое комплексное число, либо $|z_1|\geqslant|z_2|>0$, $\arg z_1=\arg z_2+\pi$.

Общие указания к задачам № 87—98. Представить комплексное число в тригонометрической форме — это значит найти модуль r и аргумент φ по формулам, приведенным в пункте 2° предварительных замечаний к § 2, ч. I. Иногда при нахождении φ (особенно если угол φ не является „табличным“) возникают трудности. Чтобы не делать ошибок при решении задач, полезно пользоваться геометрическим изображением комплексных чисел.

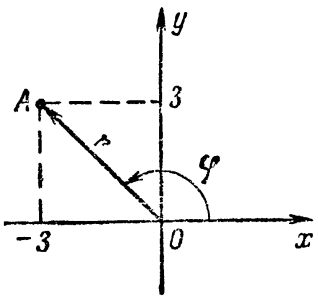


Рис. 30

Иногда удобно не находить r и φ непосредственно по формулам, а воспользоваться некоторыми тригонометрическими преобразованиями (задачи № 93—98).

87. Данному комплексному числу $z=-3+3i$ соответствует на плоскости точка $A(-3, 3)$ или вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 30). Имеем: $r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$; аргумент φ — угол,

лежащий во II четверти, причем $\sin\varphi = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -1/\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = 1/\sqrt{2}$, следовательно, $\varphi = \arg z = 3\pi/4$. А тогда тригонометрическая форма имеет вид

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

88. В данном случае $r = |z| = 5$, аргумент $\varphi = \pi + \alpha$ (рис. 31), где α — острый угол, такой, что $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$. По-

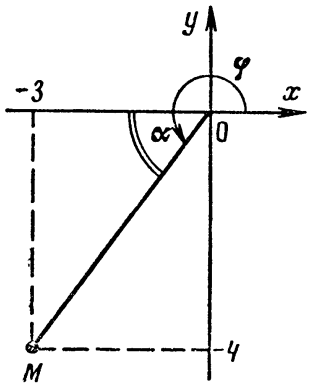


Рис. 31

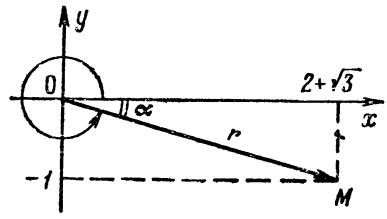


Рис. 32

этому $\alpha = \operatorname{arctg} 4/3$, т. е. $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} 4/3$, и тригонометрическая форма имеет вид

$$z = 5\left[\cos(\pi + \operatorname{arctg} 4/3) + i\sin(\pi + \operatorname{arctg} 4/3)\right].$$

89. $z = 2(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3)$.

90. $z = \sqrt{13}\left[\cos(\operatorname{arctg} 2/3) + i\sin(\operatorname{arctg} 2/3)\right]$.

91. $z = \sqrt{13}\left[\cos(\pi + \operatorname{arctg} 2/3) + i\sin(\pi + \operatorname{arctg} 2/3)\right]$.

92. Модуль $|z| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$; аргумент φ — угол, лежащий в IV четверти (рис. 32). Из рисунка видно, что $\varphi = \arg z = 2\pi - \alpha$, где α — острый угол, такой, что $\sin\alpha = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-1}$. По данному синусу угол α легко подсчитать, выполнив простые преобразования:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{12}} = \sin\frac{\pi}{12}\ ^{1}).$$

[1]) Здесь использована формула $\sin^2(\alpha/2) = (1/2)(1 - \cos\alpha)$. В этой формуле был взят знак „плюс“, так как угол α — острый.

Отсюда находим, что $\alpha = \pi/12$; тогда $\varphi = 2\pi - \pi/12 = 23\pi/12$, и тригонометрическая форма имеет вид

$$z = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi\right).$$

93. Используя формулы приведения, легко преобразовать данное число к тригонометрической форме, не вычисляя r и φ. Имеем: $z = -\cos 30° + i\sin 30° = \cos(180°-30°) + i\sin(180°-30°) = \cos 150° + i\sin 150°$.

94. $z = \cos 300° + i\sin 300°$.

95. Применяя формулы „косинус и синус двойного угла", получим

$$z = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Утверждение, что это выражение представляет тригонометрическую форму z, является грубой ошибкой.

Если $\cos(\alpha/2) > 0$, т. е. $-\pi + 4\pi n < \alpha < \pi + 4\pi n$ (n — любое целое число), то последнее выражение действительно есть тригонометрическая форма z с модулем $|z| = 2\cos(\alpha/2)$ и аргументом $\operatorname{Arg} z = \frac{\alpha}{2} + 2\pi n$.

Если же $\cos(\alpha/2) < 0$, что имеет место при $\pi + 4\pi n < \alpha < 3\pi + 4\pi n$, то написанное выше равенство представим в виде

$$z = -2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= -2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)\right].$$

Последнее выражение и является тригонометрической формой числа z для рассматриваемого случая с модулем $|z| = -2\cos\frac{\alpha}{2} > 0$ и аргументом $\operatorname{Arg} z = \frac{\alpha}{2} - \pi + 2\pi n$.

Если $\alpha = \pi + 2\pi n$, то $\cos(\alpha/2) = 0$, т. е. $|z| = 0$ и в этом случае тригонометрическая форма не определена.

Итак, окончательно тригонометрическая форма имеет вид:

$$z = \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right), \text{ если } -\pi + 4\pi n < \alpha < \pi + 4\pi n, \\ -2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)\right], \\ \qquad\qquad \text{если } \pi + 4\pi n < \alpha < 3\pi + 4\pi n \end{cases}$$

(здесь n — любое целое число).

96. $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right]$.

97. $z=\begin{cases}\cos^{-1}\alpha\,(\cos\alpha+i\sin\alpha), & \text{если } -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\\ -\cos^{-1}\alpha\,[\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)], & \\ \qquad\text{если } -\pi<\alpha<-\pi/2 \text{ и } \pi/2<\alpha<\pi.\end{cases}$

98.

$$z=\begin{cases}\cos^{-1}\alpha\,[\cos(3\pi/2+\alpha)+i\sin(3\pi/2+\alpha)], \text{ если } 0\leqslant\alpha<\pi/2,\\ -\cos^{-1}\alpha\,[\cos(\pi/2+\alpha)+i\sin(\pi/2+\alpha)], \text{ если } \pi/2<\alpha<\pi.\end{cases}$$

Замечание к задачам № 93—98. Отметим, что указанные задачи можно, конечно, решать и по общему правилу нахождения тригонометрической формы, т. е. вычислять модуль и аргумент числа z. Однако изложенный способ решения является более удобным и быстрее ведет к цели.

99. Представим основание степени в тригонометрической форме. Имеем

$$1+i\sqrt{3}=2\,(\cos\pi/3+i\sin\pi/3),$$
$$1-i=\sqrt{2}\,(\cos 7\pi/4+i\sin 7\pi/4).$$

Тогда по правилу деления комплексных чисел получим

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2\,(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)}{\sqrt{2}\,(\cos 7\pi/4+i\sin 7\pi/4)}=$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{7}{4}\pi\right)\right]=$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17}{12}\pi\right)\right].$$

Используя, далее, формулу Муавра, окончательно найдем

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=(\sqrt{2})^{20}\left[\cos\left(-\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17}{12}\pi\right)\right]^{20}=$$
$$=2^{10}\left[\cos\left(-\frac{17\cdot 20}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17\cdot 20}{12}\pi\right)\right]=$$
$$=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^9\,(1-\sqrt{3}i).$$

100. $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$. **101.** 1.

102. $\frac{44-5i}{318}$. **103.** $-\frac{1+32i}{25}$. **104.** $2i^{n-1}$.

105. Указание. Из условия задачи $z+1/z=1$ следует, что $z=\cos(\pi/3)\pm i\sin(\pi/3)$. Далее, используйте формулу Муавра. Ответ: $z^{1970}+\frac{1}{z^{1970}}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1970\right)=-1$.

Замечание. Эту задачу можно обобщить. Совершенно аналогично легко подсчитать, что $z^n+z^{-n}=2\cos(\pi n/3)$ (n — любое целое число), если $z+z^{-1}=1$.

106. Пусть $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ — два комплексных числа. Тогда

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i,$$
$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\,i.$$

Докажем справедливость данного равенства непосредственным подсчетом выражений, стоящих в его левой и правой частях. Имеем:

$$|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2,\ |z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$
$$|z_1|^2=x_1^2+y_1^2,\quad |z_2|^2=x_2^2+y_2^2.$$

Подставляя эти выражения в данное равенство и выполняя простые алгебраические преобразования, убедимся, что оно тождественно удовлетворяется для любых x_1, y_1, x_2, y_2, т. е. для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2.

Геометрическая интерпретация этого равенства понятна из рис. 33. Если точка A изображает число z_1, точка B — число z_2 и $OACB$ — параллелограмм, то $OC=|z_1+z_2|$, $BA=|z_1-z_2|$, $OA=|z_1|$, $OB=|z_2|$, и данное равенство выражает известную из геометрии теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

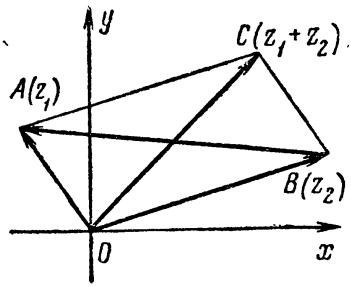


Рис. 33

107. Поскольку $\log_a x$ при $0<a<1$ монотонно убывает, то из данного неравенства следует[1])

$$0<\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\leqslant 1,$$

откуда

$$0<|z+i|\leqslant|z-i|.$$

Последнему соотношению удовлетворяют все точки нижней полуплоскости, включая и точки на оси Ox (см. задачи № 80—81) за исключением точки $z=-i$.

108. Из данного неравенства следует

$$0<|z-2|<|z|.$$

[1]) См. предварительные замечания к § 7, ч. I.

Этому соотношению удовлетворяют все точки части плоскости, расположенной правее прямой $x=1$ (рис. 34),

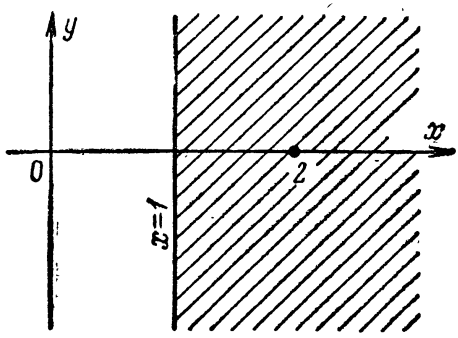


Рис. 34

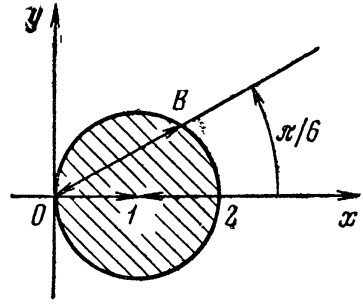


Рис. 35

кроме точки (2,0), так как при $z=2$ логарифм в левой части данного неравенства неопределен.

109. Данное условие равносильно следующему

$$\begin{cases} 0<|z-1|<1, \\ \arg z=\pi/6. \end{cases}$$

Одновременно последним двум условиям удовлетворяют точки, лежащие на отрезке OB (исключая концевые точки O и B) (рис. 35).

110. Таких комплексных чисел не существует.

111. Истолкуем данное равенство геометрически. Пусть точка M, изображающая число z,— любая точка, принадлежащая искомому множеству точек, лежащая в верхней полуплоскости. Тогда (рис. 36) угол $\varphi_1 = \arg(z-1)$, а угол $\varphi_2 = \arg(z+1)$. По условию $\varphi_1-\varphi_2=\pi/2$; с другой стороны, по теореме о внешнем угле треугольника $\varphi_1 = \varphi_2+\alpha$, так что для всех искомых чисел z угол $\alpha = \varphi_1-\varphi_2=\pi/2$. Итак, требуется найти геометрическое место точек, для которых данный отрезок AB виден под углом $\pi/2$. Из геометрии известно, что таким геометрическим местом точек является окружность с диаметром AB.

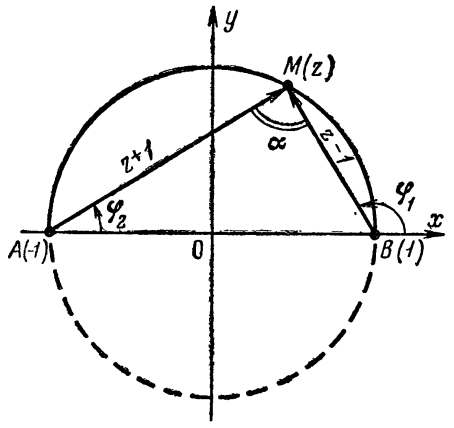


Рис. 36

Мы показали что, все точки верхней полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат, исключая точки $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, являются искомыми. В точках A и B, т. е. при $z=-1$ и $z=1$, не определена левая часть исходного равенства.

Проведя аналогичные рассуждения, убедитесь, что ни одна точка нижней полуплоскости не удовлетворяет данному условию.

112. Все точки, расположенные вне окружности радиуса 10 с центром в точке (1, 0).

113. Все точки, лежащие внутри окружности радиуса 5 с центром в начале координат.

114. Все точки внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

115. Указание. Пусть точка $z_3=x+yi$ задает положение третьей вершины.

Используя геометрический смысл модуля разности, условие задачи можно записать в виде

$$|z_3-z_1|=|z_3-z_2|=|z_2-z_1|,$$

причем

$$|z_2-z_1|=|1+i|=\sqrt{2}.$$

Ответ: $z_3'=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i]$,

$z_3''=\frac{1}{2}[(3-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i]$.

116. $z_1-z_2+z_3$.

117. Указание. Предварительно докажите, что геометрическим местом точек $z=\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2$, где $\alpha_1+\alpha_2=1$ ($\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$), является отрезок, соединяющий точки, изображающие числа z_1 и z_2. Ответ: Точки, лежащие внутри данного четырехугольника.

118. При решении используйте геометрический смысл значений $\sqrt[n]{z}$.

119. Легко подсчитать, что

$$W=\frac{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}=-i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда следует, что W — чисто мнимое число.

120. Пусть $z=x+yi$ — произвольная точка искомого геометрического места точек. Тогда

$$\frac{z-i}{z-1}=\frac{x+(y-1)\,i}{(x-1)+yi}=\frac{[x+(y-1)\,i]\,[(x-1)-yi]}{[(x-1)+yi]\,[(x-1)-yi]}=$$

$$=\frac{(x^2-x+y^2-y)+(1-x-y)\,i}{(x-1)^2+y^2}.$$

a) Для того чтобы это число было действительным, необходимо и достаточно, чтобы его мнимая часть была равна нулю, т. е. $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=\frac{1-x-y}{(x-1)^2+y^2}=0$, откуда

$$1-x-y=0, \quad y=1-x.$$

Последнее соотношение между координатами точек задает прямую (рис. 37, *a*). Все точки этой прямой, кроме точки $A(1,\ 0)$, являются искомыми.

В точке A, т. е. при $z=1$, число $\frac{z-i}{z-1}$ не определено.

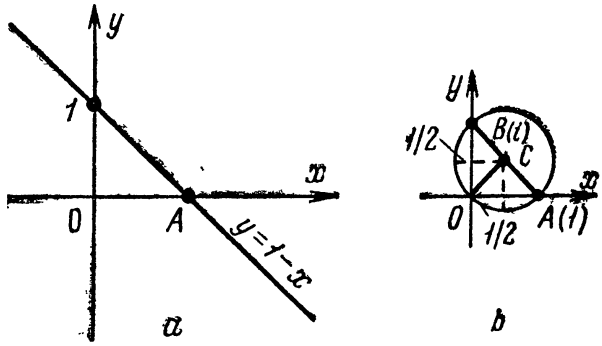


Рис. 37

b) Данное число будет чисто мнимым тогда и только тогда, когда его действительная часть

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=\frac{x^2-x+y^2-y}{(x-1)^2+y^2}=0,$$

откуда

$$x^2-x+y^2-y=0 \quad (x\neq 1,\ y\neq 0).$$

Выделяя полный квадрат, последнее соотношение преобразуем к виду

$$(x^2-x)+(y^2-y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

А это есть уравнение окружности[1] с центром в точке $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $r = 1/\sqrt{2}$.

Таким образом, искомым геометрическим местом точек являются все точки окружности радиуса $1/\sqrt{2}$ с центром $C(1/2, 1/2)$, кроме точки $A(1, 0)$ (рис. 37, *б*).

121. а) Приведем два способа решения этой задачи.

I. Геометрическое решение. По формуле Муавра $z^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$.

1) Если $0 \leqslant \varphi < \pi$, то $0 \leqslant 2\varphi < 2\pi$; следовательно, 2φ является главным значением аргумента z^2. Итак, имеем два комплексных числа z и z^2 с модулями, равными 1, и аргументами φ и 2φ. Требуется найти аргумент суммы этих чисел.

Пусть вектор $\overrightarrow{OM}$ изображает комплексное число z, вектор $\overrightarrow{ON}$ — число z^2. Тогда сумма $z^2 + z$ изображается диагональю $\overrightarrow{OP}$ параллелограмма $OMPN$ (рис. 38, *а*). Но этот параллелограмм есть ромб, поскольку $OM = |z| = ON = |z^2| = 1$, а значит OP — его биссектриса.

Тогда

$$\angle xOP = \arg(z^2 + z) = \arg z + \frac{\angle MON}{2} = \varphi + \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{2}\varphi.$$

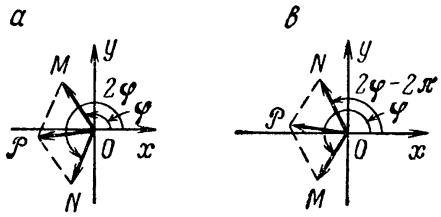


Рис. 38

2) Если $\varphi = \pi$, то $z = -1$, $z^2 + z = 0$, и аргумент $\arg(z^2 + z)$ неопределен.

3) Если $\pi < \varphi < 2\pi$, то $2\pi < 2\varphi < 4\pi$, и угол 2φ уже не является главным значением аргумента z^2. В этом случае главным значением аргумента z^2 будет угол $0 < 2\varphi - 2\pi < 2\pi$, т. е. $\arg z^2 = 2\varphi - 2\pi$.

---

[1] Вы знаете (см. предварительные замечания к § 2, ч. I), что точки, изображающие комплексные числа $z = x + yi$, для которых $|z - z_0| = r$ ($z_0 = x_0 + y_0 i$ — заданное число), лежат на окружности с центром $C(x_0, y_0)$ и радиусом r. Соотношение $|z - z_0| = r$, записанное в явном виде как соотношение между координатами (x, y), называют уравнением окружности. Подсчитав $|z - z_0|$ и возведя обе части равенства $|z - z_0| = r$ в квадрат, получим уравнение окружности в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В нашем случае $x_0 = y_0 = 1/2$, а радиус $r = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2}$.

Тогда, как видно из рис. 38, *в*,

$$\arg(z^2+z)=\angle xOP=\arg z^2+\frac{\angle NOM}{2}=$$

$$=\arg z^2+\frac{1}{2}(\arg z-\arg z^2)=$$

$$=2\varphi-2\pi+\frac{1}{2}[\varphi-(2\varphi-2\pi)]=\frac{3}{2}\varphi-\pi.$$

Ответ: $\arg(z^2+z)=\begin{cases}3\varphi/2, & \text{если } 0\leqslant\varphi<\pi,\\ \text{неопределен}, & \text{если } \varphi=\pi,\\ 3\varphi/2-\pi, & \text{если } \pi<\varphi<2\pi.\end{cases}$

II. Аналитическое решение. Для решения задачи достаточно найти тригонометрическую формулу комплексного числа z^2+z.
Имеем

$$z^2+z=(\cos 2\varphi+\cos\varphi)+i(\sin 2\varphi+\sin\varphi)=$$

$$=2\cos\frac{3}{2}\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}+i2\sin\frac{3}{2}\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi+i\sin\frac{3}{2}\varphi\right).$$

1) Это выражение будет тригонометрической формой числа z^2+z при условии $\cos(\varphi/2)>0$, т. е. $0\leqslant\varphi<\pi$. В этом случае $|z^2+z|=2\cos(\varphi/2)$, а $\arg(z^2+z)=3\varphi/2$.

2) Если $\cos(\varphi/2)<0$, т. е. $\pi<\varphi<2\pi$, то $-\cos\frac{\varphi}{2}>0$ и тригонометрическую форму найдем следующим образом:

$$z^2+z=-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(-\cos\frac{3}{2}\varphi-i\sin\frac{3}{2}\varphi\right)=$$

$$=-2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\varphi-\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\varphi-\pi\right)\right].$$

Здесь $|z^2+z|=-2\cos(\varphi/2)$, а искомый аргумент $\arg(z^2+z)=3\varphi/2-\pi$. Отметим, что тригонометрические функции нужно при этом приводить к тем углам, которые лежат в пределах от 0 до 2π. Например, в данном случае можно также записать, что

$$z^2+z=-2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{3}{2}\varphi\right)+i\sin\left(\pi+\frac{3}{2}\varphi\right)\right].$$

Последнее равенство также является тригонометрической формой числа z^2+z, но при $\pi<\varphi<2\pi$ угол $\pi+3\varphi/2$ не является главным значением аргумента z^2+z.

b) $\arg w_2=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi+3\varphi), & \text{если } 0<\varphi<\pi,\\ \frac{1}{2}(3\varphi-3\pi), & \text{если } \pi\leqslant\varphi<2\pi.\end{cases}$

При $\varphi=0$ аргумент $\arg w_2$ неопределен.

c) $\arg w_3=\begin{cases}\varphi/2, \text{ если } 0\leqslant\varphi<\pi/3 \text{ или } \pi<\varphi<5\pi/3,\\ \varphi/2+\pi, \text{ если } \pi/3<\varphi<\pi \text{ или } 5\pi/3<\varphi<2\pi.\end{cases}$

При $\varphi=\pi/3$, $\varphi=\pi$ и $\varphi=5\pi/3$ аргумент $\arg w_3$ неопределен.

122. a) Пусть некоторое целое число $x=n$ есть решение данного уравнения. Тогда из равенства комплексных чисел $(1-i)^n=2^n$ следует равенство их модулей, т. е. $|(1-i)^n|=2^n$. Учитывая, что $|1-i|=\sqrt{2}$, имеем

$$|(1-i)^n|=|1-i|^n=(\sqrt{2})^n=2^{n/2}.$$

Итак, если $x=n$ есть решение исходного уравнения, то $2^{n/2}=2^n$, что возможно лишь при $n=0$. Проверим теперь подстановкой, является ли число $x=0$ решением исходного уравнения. Поскольку любое комплексное число, отличное от нуля, в нулевой степени равно 1, мы видим, что $x=0$ есть корень исходного уравнения.

b) Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^x=1.$$

Произведя деление комплексных чисел в левой части этого уравнения, получим

$$\left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^x=1,\ \left(\frac{2i}{2}\right)^x=1,\ i^x=1,\ x=4n,$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Общие указания к задачам № 123—141. Основная идея решения уравнений, где неизвестными являются комплексные числа, состоит в следующем. В зависимости от вида уравнения ищут решение в виде $z=x+yi$ или $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Обычно его удобно искать в тригонометрической форме, если в уравнение входят произведение комплексных неизвестных или их степени. Для чего,

подставляя в уравнение неизвестное z в той или другой форме и рассматривая уравнение как равенство нулю некоторого комплексного числа, записывают условия равенства нулю и тем самым сводят его к системе двух уравнений с действительными неизвестными x, y или r, φ.

123. Пусть $z=x+yi$, тогда $\bar{z}=x-yi$, и уравнение принимает вид

$$x-yi=x+yi, \text{ откуда } y=0.$$

Ответ: решением уравнения являются все действительные числа.

124. Все чисто мнимые числа.

125. Все комплексные числа, у которых действительная часть равна 1, т. е. числа вида $z=1+yi$, где y — любое действительное число.

126. $z=0$.

127. Пусть $z=x+yi$, тогда $\bar{z}=x-yi$, $z^2=x^2-y^2+i2xy$, и уравнение принимает вид

$$(x^2-y^2+x)+i(2xy-y)=0,$$

откуда

$$\begin{cases} x^2-y^2+x=0, \\ 2xy-y=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим

1) $y=0$ либо 2) $x=1/2$.

Тогда первое уравнение системы соответственно дает

1) $x(x+1)=0$, $x=0$ или $x=-1$,

2) $y^2=3/4$, $y=\pm\sqrt{3}/2$.

Ответ: $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$.

128. 0, $\pm i$.

129. $z=ia$, где a — любое действительное число.

130. Будем искать решение в виде $z=x+yi$, тогда имеем $|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$. Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим

$$(x+yi)\sqrt{x^2+y^2}+2(x+yi)+i=0,$$

$$(x\sqrt{x^2+y^2}+2x)+(y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1)i=0.$$

Отсюда получаем систему двух уравнений с двумя действительными неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}+2x=0, \\ y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы имеем

$$x\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right)=0,$$

откуда либо $x=0$, либо $(x^2+y^2)^{1/2}+2=0$. Последнее равенство ни при каких действительных x и y не удовлетворяется (левая его часть всегда больше нуля); следовательно, $x=0$. Тогда из второго уравнения системы получим уравнение для определения y

$$y\sqrt{y^2}+2y+1=0,$$
$$y|y|+2y+1=0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $y=1-\sqrt{2}$ (убедитесь в этом!).

Итак, система (*) имеет одно действительное решение $x=0$, $y=1-\sqrt{2}$. А значит и исходное уравнение имеет единственное решение $z=(1-\sqrt{2})\,i$.

131. Решение данного уравнения удобно искать в тригонометрической форме в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда $\bar{z}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$, а $z^{n-1}=r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi]$. Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим

$$r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]=r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi].$$

Записывая далее условия равенства двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме, получим систему двух уравнений с неизвестными r и φ:

$$\begin{cases} r=r^{n-1}, \\ (n-1)\varphi=-\varphi+2\pi k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем

$$r(r^{n-2}-1)=0,$$

откуда либо $r=0$ (аргумент φ не определен), либо $r=1$. При $r=1$ из второго уравнения системы найдем аргумент $\varphi=2\pi k/n$, где k — любое целое число.

Итак, решения исходного уравнения имеют вид

$$z'=0,\quad z_k''=\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Легко показать, что из бесконечного множества решений вида z_k'' имеется только n различных, а именно те, которые получаются при значениях $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ (убедитесь в этом!).

Ответ: Уравнение имеет $(n+1)$ различное решение.

$$z_k=\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k,\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$z_n=0.$$

132. Указание. Заметим, что поскольку правая часть данного уравнения есть действительное положительное число при любых z, то уравнению могут удовлетворять лишь те z, при которых и левая его часть действительна и положительна. Таким образом, z^2 должно быть действительным числом, большим нуля. Ответ: $z=\frac{1}{4}(5+\sqrt{33})$.

133. $z=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{41}}{2}}i.$

134. $z=0$ и $z=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})r$, где r — любое действительное положительное число.

Указание. Решение уравнения удобно искать в тригонометрической форме.

135. Пусть $z=x+yi$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$x^2+y^2-2i(x+yi)+2a+2ai=0.$$

Отсюда

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y+2a=0,\\ -2x+2a=0\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases}x=a,\\ y^2+2y+a^2+2a=0.\end{cases}$$

Так как y — действительное число, то дискриминант последнего квадратного уравнения

$$D=1-a^2-2a\geqslant0,$$

$$a^2+2a-1\leqslant0,$$

$$-1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}-1.$$

Но по условию $a \geqslant 0$, следовательно,

$$0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2} - 1.$$

Итак, если $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2} - 1$, то

$$z = a + i\left(-1 \pm \sqrt{1 - a^2 - 2a}\right);$$

при $a > \sqrt{2} - 1$ уравнение не имеет решений.

136. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид

$$2|z| + 1 = 0,$$

что не удовлетворяется ни при одном значении z.

Пусть $a > 0$. Полагая $z = x + yi$, будем иметь

$$2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 - 4ax + ia(1 - 4y) = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 - 4ax = 0, \\ 1 - 4y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

и, следовательно, $y = 1/4$. Тогда первое уравнение системы (1) принимает вид

$$2\sqrt{x^2 + 1/16} = 4ax - 1. \tag{2}$$

Это уравнение может иметь только корни, удовлетворяющие условию

$$x > 1/4a > 0.$$

Таким образом, уравнение (2) равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 4(x^2 + 1/16) = 16a^2x^2 - 8ax + 1, \\ x > 1/4a > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4(4a^2 - 1)x^2 - 8ax + \frac{3}{4} = 0, & (3) \\ x > 1/4a > 0. & (4) \end{cases}$$

Если $4a^2 - 1 = 0$ $(a = 1/2)$, то $x = 3/16 < 1/2$, а должно быть $x > 1/2$; значит, при $a = 1/2$ уравнение не имеет решений. Поэтому далее будем предполагать, что $a \neq 1/2$. Дискриминант уравнения (3) положителен при любых a

$$D = 16a^2 - 3(4a^2 - 1) = 4a^2 + 3 > 0,$$

следовательно, корни уравнения (3) действительны и различны. Перепишем уравнение (3) в виде

$$f(x)=x^2-\frac{2a}{4a^2-1}x+\frac{3}{16(4a^2-1)}=0. \qquad (5)$$

Итак, задача сводится к тому, чтобы установить, при каких положительных значениях параметра a ($a\neq 1/2$) хотя бы один из корней уравнения (5) удовлетворяет условию (4), и найти этот корень.

Для решения этой задачи подсчитаем величины, определяющие положение параболы $y=f(x)$ относительно точки $1/4a$; абсцисса вершины параболы $x_0=a/(4a^2-1)$;

$$f\left(\frac{1}{4a}\right)=\frac{1}{16a^2}-\frac{2a}{4a^2-1}\cdot\frac{1}{4a}+\frac{3}{16(4a^2-1)}=-\frac{a^2+1}{16a^2(4a^2-1)}.$$

С учетом вышесказанного возможны два случая расположения корней $f(x)$ относительно точки $1/4a$ [1].

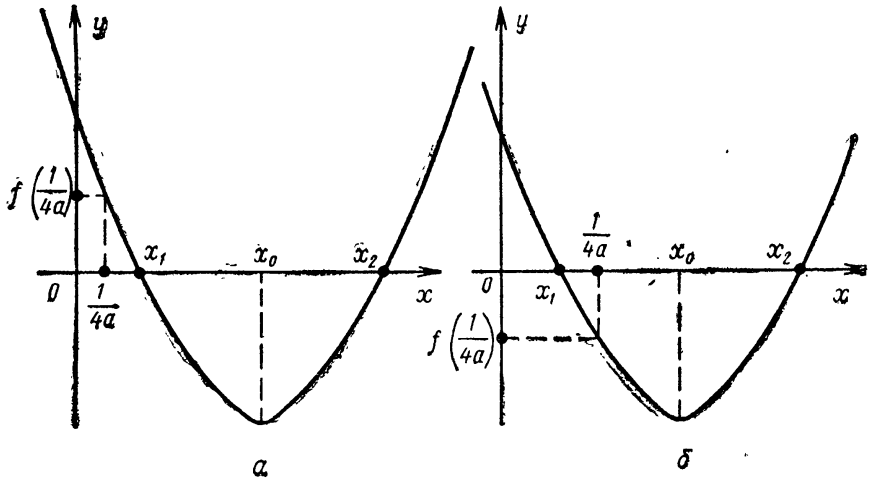


Рис. 39

1) Для того чтобы оба корня уравнения (5) удовлетворяли условию (4), необходимо и достаточно выполнение следующих условий (рис. 39, *а*):

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{a}{4a^2-1}>\dfrac{1}{4a}, \\ f\left(\dfrac{1}{4a}\right)=-\dfrac{a^2+1}{16a^2(4a^2-1)}>0. \end{cases}$$

[1] См. предварительные замечания к § 3, ч. I.

Эта система неравенств несовместна (убедитесь в этом). Значит, рассматриваемый случай не имеет места.

2) Чтобы бóльший корень $x_2 = (4a + \sqrt{4a^2+3})/4(4a^2-1)$ уравнения (5) удовлетворял условию (4), необходимо и достаточно (с учетом того, что дискриминант $D > 0$ при любых a) выполнение неравенства (рис. 39, *б*)

$$f\left(\frac{1}{4a}\right) = -\frac{a^2+1}{16a^2(4a^2-1)} < 0,$$

откуда $a > 1/2$.

Ответ: Если $0 \leqslant a \leqslant 1/2$, то данное уравнение не имеет решений; если $a > 1/2$, то оно имеет одно решение

$$z = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} + \frac{1}{4}i.$$

137. При $a = 1$ $z = -1-i$;

при $1 < a \leqslant \sqrt{2}$ $z = \dfrac{-a^2 \pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} - i$;

при $a > \sqrt{2}$ нет решений.

138. Указание. Число $|z| + a$ — действительное. Значит, для того чтобы выполнялось неравенство $z|z| + az + i = 0$ или $z(|z| + a) + i = 0$, число z должно быть чисто мнимым.

Ответ: При $a \leqslant -2$ $z = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2-4})i$;

при $-2 < a < 0$ решений нет;

при $a \geqslant 0$ $z = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2+4})i$.

139. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} z^3 = -\bar{w}^7, \\ z^5 = w^{-11} \end{cases} \qquad (1)$$

и возведем обе части первого уравнения в пятую степень, а обе части второго — в куб[1]:

$$z^{15} = -\bar{w}^{35},$$
$$z^{15} = -w^{-33}.$$

Исключая z из последней системы, которая является следствием исходной, получим уравнение для определения w:

$$\bar{w}^{35} \cdot w^{33} = -1. \qquad (2)$$

[1] Понятно, что такое преобразование не является равносильным и может дать посторонние решения. Поэтому проверка полученных решений здесь принципиально необходима как критерий для отбора корней.

Принимая во внимание, что $\bar{w}\cdot w=|w|^2$, найдем

$$(\bar{w}w)^{33}\bar{w}^2=-1,\ |w|^{66}w^2=-1. \qquad (2')$$

Далее из равенства (2) следует:

$$|\bar{w}^{35}w^{33}|=1,\ |\bar{w}|^{35}\cdot|w|^{33}=1,\ |w|^{68}=1$$

(ибо $|\bar{w}|=|w|$), откуда $|w|=1$. Тогда уравнение (2′) дает $\bar{w}^2=-1$, т. е. $\bar{w}_1=-i$, $\bar{w}_2=i$, откуда $w_1=i$, $w_2=-i$. Подставляя найденные значения w в систему уравнений (1), найдем z. Если $w=i$, то $\bar{w}^7=i$, $w^{-11}=i$, и из системы (1) найдем

$$\begin{cases} z^3=-i, \\ z^5=i. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получим равносильное соотношение $z^2=-1$, и поскольку $z^3=-i$, то $z=i$.

Совершенно аналогично находим, что если $w=-i$, то $z=-i$.

Подставляя найденные пары решений в уравнения исходной системы, убеждаемся, что данная система имеет два решения. Ответ:

$$\begin{cases} z_1=i, \\ w_1=i; \end{cases} \quad \begin{cases} z_2=-i, \\ w_2=-i. \end{cases}$$

140. $z_1=1$, $w_1=-1$; $z_2=-1$, $w_2=1$.

141. Возведя обе части второго уравнения в куб и разделив результат на первое уравнение, получим, что $z^2w^2=1$. Но отсюда $z^6w^6=1$, и, разделив это равенство на второе уравнение, получим $z=w$. Теперь из третьего уравнения находим, что $w^2=-1$, откуда $w_1=i$, $w_2=-i$, а тогда и $z_1=i$, $z_2=-i$.

Необходимо еще сделать проверку. Она проводится непосредственно, и оказывается, что обе полученные пары являются решениями исходной системы.

142. Сначала найдем геометрическое место точек z, удовлетворяющих заданному условию

$$|z-1|=2|z-2|. \qquad (а)$$

Покажем, что точки $z=x+yi$, координаты которых (x, y) удовлетворяют этому условию, расположены на окружности. Подставляя $z=x+yi$ в равенство (а), вычисляя модули

и возводя обе части равенства (а) в квадрат, получим

$$(x-1)^2+y^2=4\,[(x-2)^2+y^2],$$
$$3x^2-14x+3y^2+15=0,$$
$$(x-7/3)^2+y^2=4/9.$$

Вспоминая уравнение окружности (см. сноску на стр. 219), заключаем, что искомые точки z лежат на окружности с центром $C(7/3,\ 0)$ и радиусом $r=2/3$ (рис. 40). Если $A(z)$ — произвольная точка, принадлежащая этой окружности, то площадь $\triangle Az_1z_2$ с фиксированным основанием $\overline{z_1z_2}=1$ будет, очевидно, наибольшей при наибольшей высоте, т. е. при $h=r=2/3$ (этому соответствуют точки A_1 и A_2 на рис. 40; искомые треугольники заштрихованы). Таким образом, окончательно находим $S=S_{\max}=1/3$ при $z'=7/3+i\cdot 2/3$ и $z''=7/3-i\cdot 2/3$.

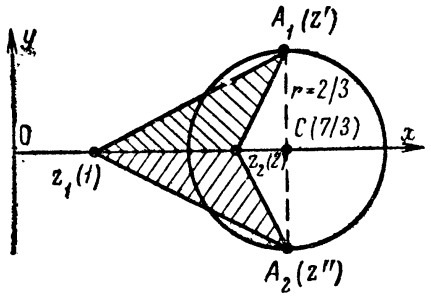


Рис. 40

143. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

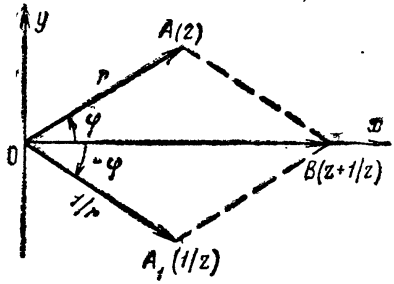


Рис. 41

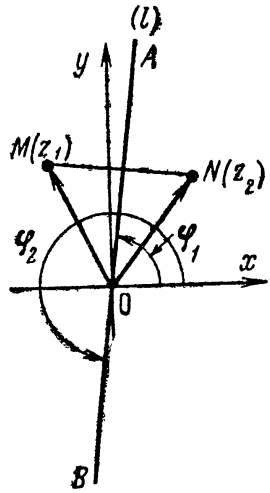


Рис. 42

тогда

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)].$$

Пусть, далее, точка A изображает комплексное число z (согласно условию $\arg z\neq 0$, следовательно, эта точка не лежит на оси Ox), а точка A_1 — число $1/z$ (рис. 41). Усло-

вие $\arg(z+1/z)=0$ означает, что число $(z+1/z)$ — действительное и положительное, и, следовательно, точка B, изображающая сумму $z+1/z$, расположена на положительной полуоси Ox. А тогда параллелограмм $OABA_1$ является ромбом (почему?). И, значит, $r=1/r$, откуда $r=1$. Далее имеем:

$$z+1/z=2\cos\varphi>0,\quad z-1/z=2i\sin\varphi.$$

Теперь выражение w принимает вид

$$w=\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot\left|z-\frac{1}{z}\right|=2\cos\varphi\cdot 2\,|\,i\sin\varphi\,|=2\,|\sin 2\varphi\,|.$$

Отсюда видно, что w принимает наибольшее значение, равное 2, при $|\sin 2\varphi|=1$, т. е. $\varphi=\pm\pi/4+2\pi n$, так как $\cos\varphi>0$.

144. Пусть точки M и N изображают заданные комплексные числа z_1 и z_2 (рис. 42). Геометрическим местом точек z, удовлетворяющих условию $|z-z_1|=|z-z_2|$, является прямая (l), перпендикулярная к отрезку MN и проходящая через его середину (см. задачу № 80). Так как $|z_1|=|z_2|$ по условию, то $\triangle MON$ — равнобедренный, и эта прямая (l) является биссектрисой угла $\angle MON$ и проходит через начало координат. Тогда имеем: 1) для всех точек z, лежащих на луче OA, расположенном в верхней полуплоскости (рис. 42),

$$\arg z=\varphi_1=\frac{1}{2}\angle MON+\angle NOx=$$

$$=\frac{1}{2}(\arg z_1-\arg z_2)+\arg z_2=\frac{1}{2}(\arg z_1+\arg z_2);$$

2) при $z=0$ $\arg z$ неопределен; 3) для всех точек z, лежащих на луче OB (части прямой (l), расположенной в нижней полуплоскости), $\arg z=\varphi_2=\varphi_1+\pi$. Итак, при $z\neq 0$ аргумент z равен либо $\frac{1}{2}(\arg z_1+\arg z_2)$, либо $\frac{1}{2}(\arg z_1+\arg z_2)+\pi$ (при этом $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$); при $z=0$ аргумент $\arg z$ неопределен; при $z_1=z_2=0$ и $z\neq 0$ аргумент z — любое число, такое, что $0\leqslant\arg z<2\pi$.

145. Заметим прежде всего, что числа z вида $z=x+3xi$ изображаются точками прямой $y=3x$. Числа $z_1=1+2i$ и $z_2=2+i$ изображаются точками $M(1, 2)$ и $N(2, 1)$

соответственно (рис. 43). Тогда $w=||z-z_1|-|z-z_2||\leqslant$ $\leqslant|z_2-z_1|$ (см. неравенства (*) в пункте 2° предварительных замечаний к § 2, ч. I). Отсюда видно, что выражение w принимает наибольшее значение $w_{\max}=|z_2-z_1|=$ $=|2+i-1-2i|=|1-i|=$ $=\sqrt{2}$, когда точка z лежит на продолжении прямой MN, т. е. треугольник $\triangle AMN$ (рис. 43) вырождается в прямую A_0N. Координаты точки A_0 пересечения прямых $y=3x$ и MN легко подсчитать (точка A_0 изображает искомое число z_0). Уравнение прямой MN имеет вид $y=-x+3$ [1]. С другой стороны, точка $A_0(z_0)$ лежит на прямой $y=3x$; тогда $-x+3=3x$, $x=3/4$.

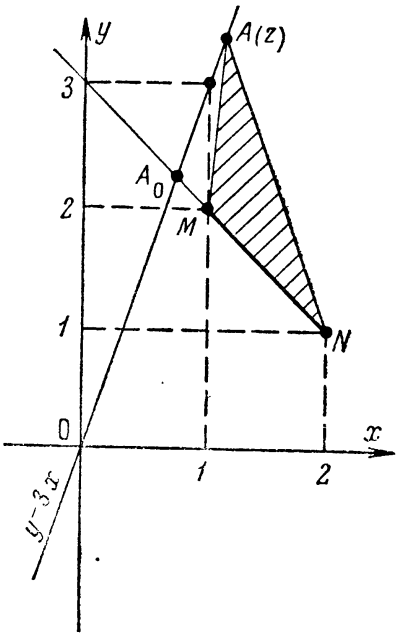


Рис. 43

Итак, $w=w_{\max}=\sqrt{2}$ при $z=$ $=z_0=3/4+i\cdot 9/4$.

146. Для того чтобы хотя бы одно комплексное число z удовлетворяло равенству

$$|z+\sqrt{2}|=a^2-3a+2, \qquad (1)$$

необходимо потребовать, чтобы $a^2-3a+2\geqslant 0$, т. е. $a\geqslant 2$, $a\leqslant 1$. Кроме того, $a\neq 0$, так как при $a=0$ неравенство

$$|z+i\sqrt{2}|<a^2 \qquad (2)$$

не выполняется ни при каком z. Итак, допустимыми для параметра a являются значения

$$a\geqslant 2,\ a\leqslant 1,\ a\neq 0. \qquad (3)$$

Геометрическим местом точек z, удовлетворяющих равенству (1), является окружность C_1 с центром в точке $C_1(-\sqrt{2},\ 0)$ и радиусом $r_1=a^2-3a+2$ [2].

Все точки, удовлетворяющие неравенству (2) ($a\neq 0$), лежат внутри круга C_2 с центром $C_2(0,\ -\sqrt{2})$ и радиусом

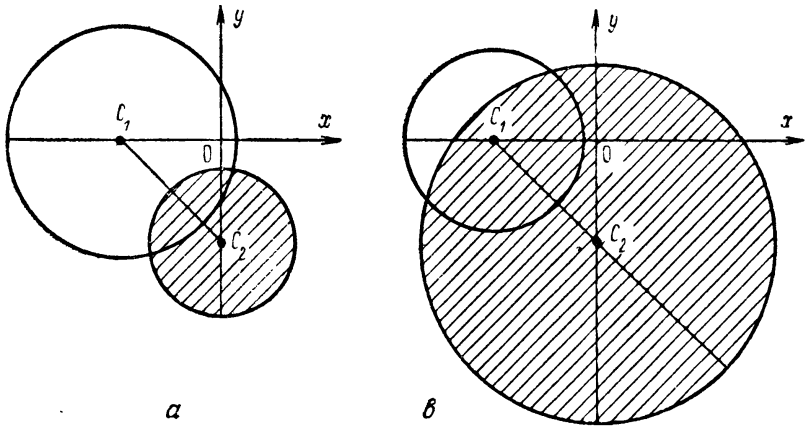
[1] Действительно, $y=kx+b$ — общее уравнение прямой. Потребовав, чтобы прямая проходила через точки M (1, 2) и N (2, 1), получим два соотношения для определения k и b и найдем, что $k=-1$, $b=3$.

[2] При $a=2$ и $a=1$ окружность вырождается в точку $z=-\sqrt{2}$.

$r_2 = a^2$. Требуется найти те значения a, при которых хотя бы одна точка окружности C_1 лежала внутри круга C_2. Легко сообразить, что это возможно в двух случаях взаимного расположения окружностей C_1 и C_2 друг относительно друга.

В первом случае (рис. 44, *а*) имеем

$$C_1C_2 - r_2 < r_1 < C_1C_2 + r_2.$$



а *в*

Рис. 44

Учитывая, что расстояние между центрами $C_1C_2 = \sqrt{4} = 2$, получим

$$2 - a^2 < a^2 - 3a + 2 < 2 + a^2,$$

откуда

$$\begin{cases} a > 0, \\ 2a^2 - 3a > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a > 3/2, \ a < 0, \end{cases} \Rightarrow a > 3/2.$$

С учетом ОДЗ (3), окончательно получаем $a \geqslant 2$.

Во втором случае (рис. 44, *в*) имеем

$$0 < C_1C_2 - r_1 < r_2 < C_1C_2 + r_1,$$

откуда

$$0 < 2 - a^2 + 3a - 2 < a^2 < 2 + a^2 - 3a + 2$$

$$\begin{cases} -3a + 4 > 0, & a < 4/3, \\ -a^2 + 3a > 0, & 0 < a < 3, \\ 2a^2 - 3a > 0, & a < 0, \ a > 3/2. \end{cases}$$

Система несовместна. Ответ: $a \geqslant 2$.

147. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих равенству $|z - i\sqrt{2}| = (a+1)^2$, является окружность[1] (C_1) с центром $C_1(0, \sqrt{2})$ и радиусом $r_1 = (a+1)^2$.

[1] При $a = -1$ окружность вырождается в точку $z = i\sqrt{2}$.

1) Если $a^2-4a<0$, т. е. $0<a<4$, то неравенству $|z-\sqrt{2}|>a^2-4a$ (1) удовлетворяют все точки комплексной плоскости и, в частности, любая точка окружности (C_1). Следовательно, все значения a из интервала (0,4) дают решение задачи.

2) Если $a^2-4a=0$, т. е. $a=0$ или $a=4$, то неравенству (1) удовлетворяют все точки комплексной плоскости, кроме $z=\sqrt{2}$. Поскольку при этих значениях a точка $z=\sqrt{2}$ не лежит на окружности (C_1) (равенство $|z-i\sqrt{2}|=(a+1)^2$ не удовлетворяется — проверьте!), то значения $a=0$ и $a=4$ также дают решение.

3) Пусть теперь $a^2-4a>0$, т. е.

$$a>4,\ a<0. \tag{2}$$

В этом случае все точки, удовлетворяющие неравенству (1), лежат вне круга (C_2) с центром $C_2(\sqrt{2},\ 0)$ и радиусом $r_2=a^2-4a$. Требуется найти все значения a, при которых

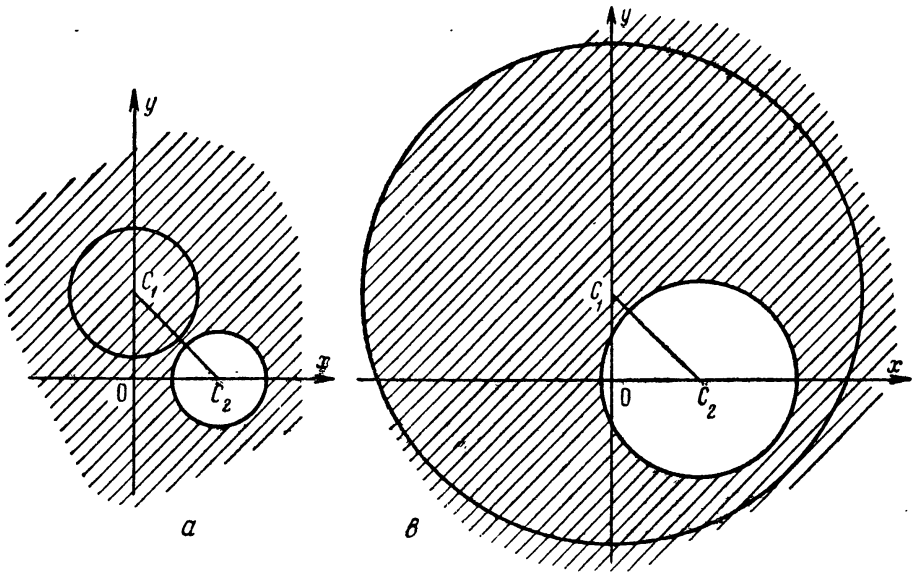


Рис. 45

окружность (C_1) расположена вне круга (C_2). Последнее имеет место тогда и только тогда, когда

а) (рис. 45, *а*) $C_1C_2>r_1+r_2$

или $2>a^2+2a+1+a^2-4a$,

$$2a^2-2a-1<0,\quad \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})<a<\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}).$$

С учетом (2) находим

$$\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})<a<0.$$

в) (рис. 45, *b*)

$$r_1>C_1C_2+r_2$$

или $a^2+2a+1>2+a^2-4a$, $a>1/6$.

С учетом (2) отсюда находим $a>4$.

Объединяя результаты исследований, получим окончательный Ответ: $a>\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$.

148. $-21/10<a<-5/6$. **149.** $0\leqslant a<\frac{1}{6}(\sqrt{13}-2)$, $a>\frac{1}{6}(\sqrt{13}+2)$.

3°. Исследование квадратного трехчлена

150. a) $|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, b) $-2<x<-1$, $1<x<2$, c) $|x|\geqslant\sqrt{6}$, $|x|\leqslant 1$, d) $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, e) $x>1+\sqrt{14}$, $-1<x<3$, f) $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{2,3}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, g) $2<x<5$.

152. Согласно теореме Виета $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$. Тогда

$$y_1=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c,$$

$y_2=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=-b(b^2-3c)=3bc-b^3$.

Искомое уравнение

$$x^2-[b^2-2c+3bc-b^3]x+(b^2-2c)(3bc-b^3)=0.$$

153. Решается аналогично предыдущей задаче ($a\neq 0$, $c\neq 0$)

$$cx^2+bx+a=0.$$

154. $a=\pm 0{,}5$.

155. Имеем

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}>1.$$

По теореме Виета

$$x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=1.$$

Значит, $x_1^4+x_2^4>1$. Поскольку

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)-2x_1^2x_2^2=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2,$$

то $x_1^4+x_2^4=[a^2-2]^2-2>1$ или $a^4-4a^2+1>0$.
Отсюда находим

$$|a|>\sqrt{2+\sqrt{3}};\ |a|<\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

156. При $a>\frac{1}{4}$ — любое действительное число;

при $a=\frac{1}{4}$, $x<-2$, $x>-2$,

при $0<a<\frac{1}{4}$, $x>\frac{1}{2a}[-1+\sqrt{1-4a}]$,

$$x<\frac{1}{2a}[-1-\sqrt{1-4a}],$$

при $a=0$, $x>-1$,

при $a<0$, $\frac{1}{2a}[-1+\sqrt{1-4a}]<x<\frac{1}{2a}[-1-\sqrt{1-4a}]$.

157. При $|a|\geqslant\frac{1}{2}$, $x>\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4})$,

$x<\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4})$, при $|a|<2$ — любое действительное число.

158. При $a\leqslant\frac{1}{4}$, $x>\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$,

$x<\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1-4a})$, при $a>\frac{1}{4}$, x — любое действительное число.

159. Представим это уравнение в виде $x^2+|x|=-a$ и построим график функции $y=x^2+|x|$ (рис. 46) и решение уравнения для различных значений параметра a представляются абсциссами точек пересечения графика этой функции и прямых $y=-a$.

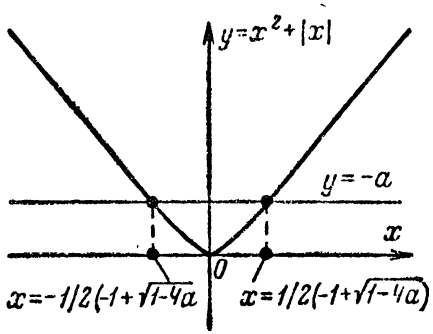


Рис. 46

Отсюда при $a<0$ получаем две системы

$$\begin{cases} x^2+x=-a, \\ x>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x=-a, \\ x<0. \end{cases}$$

Ответ: При $a<0$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$,

при $a=0$, $x=0$,
при $a>0$ уравнение не имеет решений.

160. При любом $a\neq 0$ корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, равны $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{a}$.

1) Рассмотрим случай $a>0$. Здесь нужно различать подслучаи

а) $a>1$, т. е. $x_1<x_2$, и тогда решения

$$x>-\frac{1}{a},\quad x<-1,$$

b) $a=1$, т. е. $x_1=x_2$, и тогда решением неравенства является любое $x\neq -1$,

c) $0<a<1$, т. е. $x_2<x_1$,

в этом случае решения такие: $x>-1$, $x<-\frac{1}{a}$;

2) $a=0$, тогда $x>-1$;

3) $a<0$. Здесь решения $-1<x<-\frac{1}{a}$.

161. Если $a^2-1=0$, т. е. $a=\pm 1$, то неравенство является линейным. При $a=1$, очевидно, условие задачи выполняется.

Случай $a=-1$ не подходит. При $a^2\neq 1$ необходимо и достаточно выполнения системы условий

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ D=(a-1)^2-(a^2-1)<0. \end{cases}$$

Отсюда находим $a>1$. Ответ: $a\geqslant 1$.

162. Поскольку уравнение считается квадратным, $m\neq 1$.

1) Для действительности корней необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения D был больше или равен нулю.

$$D=(2m-1)^2-4(m-1)(m+5)\geqslant 0,$$

отсюда $m<1$ (так как $m\neq 1$).

2) Согласно теореме Виета, корни x_1 и x_2 этого уравнения удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m-1}{m-1}, \\ x_1x_2=\dfrac{m+5}{m-1}. \end{cases}$$

Оба корня положительны при тех $m<1$; для которых выполняются неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{2m-1}{m-1}>0, \\ \dfrac{m+5}{m-1}>0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $m<-5$.

Оба корня были бы отрицательными, если бы при $m<1$ выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{2m-1}{m-1}<0, \\ \dfrac{m+5}{m-1}>0. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Корни имеют различные знаки при $m<1$, если

$$\frac{m+5}{m-1}<0,$$

т. е. $-5<m<1$ при $m=-5$ — один из корней равен нулю.

163. Аналогично предыдущей задаче получаем: корни действительны при $-6\leqslant m\leqslant 4$ $(m\neq 3)$. При $-6\leqslant m\leqslant -5$ оба корня отрицательны; при $-5<m<3$ корни имеют различные знаки, при $3<m\leqslant 4$ оба корня положительны. При $m=-5$ один из корней равен нулю.

164. Аналогично предыдущим задачам получаем: корни действительны при $1\leqslant a\leqslant 6$; при $1\leqslant a<\frac{3}{2}$ оба корня отрицательны; при $2<a\leqslant 6$ оба корня положительны; при $\frac{3}{2}<a<2$ и корни имеют разные знаки. При $a=2$ $x=1/4$. При $a=3/2$ один из корней равен нулю.

165. Корни действительны при любом m $(m\neq 0)$. При $m>0$ и $m<-\frac{1}{2}$ оба корня положительны. При $-1/2<m<0$ корни имеют различные знаки. При $m=-1/2$ один из корней равен нулю.

166. Согласно теореме Виета $x_1+x_2=m$; $x_1x_2=m-1$. Отсюда $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(m-1)=m^2-2m+2=(m-1)^2+1$. Сумма квадратов корней уравнения будет наименьшей при $m=1$.

167. Если все корни данных уравнений совпадают, то равны коэффициенты этих трехчленов. Отсюда находим $a=1$. Рассмотрим теперь $a\neq 1$. Заметим, что если число x_0

является корнем уравнения $f(x)=0$ и одновременно—корнем уравнения $g(x)=0$, то это число будет также корнем уравнений $f(x)\pm g(x)=0$. Обратное, в общем случае, неверно. Поэтому мы имеем лишь необходимое условие для нахождения общего корня. Вычитая одно уравнение из другого, находим

$$\begin{cases} (x^2+ax+1)-(x^2+x+a)=0, \\ x(a-1)-(a-1)=0. \end{cases}$$

Так как $a\neq 1$, то $x=1$. Значит, если уравнения имеют один общий корень, то он равен 1. Найдем соответствующее a. Подставим $x=1$ в уравнения

$$1+a+1=0,$$
$$1+1+a=0.$$

Отсюда $a=-2$. Ответ: $a=1$ и $a=2$.

168. Применяя теорему 3 из предварительных замечаний, получаем две системы неравенств:

$$\begin{cases} 2-a>0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geqslant 0, \\ \frac{3a}{2(2-a)}>\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}(2-a)-3a\cdot\frac{1}{2}+2a>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2-a<0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geqslant 0, \\ \frac{3a}{2(2-a)}>\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}(2-a)-3a\cdot\frac{1}{2}+2a<0. \end{cases}$$

Из первой системы находим $\frac{16}{17}\leqslant a<2$. Вторая система решений не имеет. Ответ: $\frac{16}{17}\leqslant a<2$.

169. Указание. Использовать теорему Виета. Ответ: $-3\leqslant a<-2$.

170. Применяя теорему 3, из предварительных указаний получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 9\alpha^2-(2-2\alpha+9\alpha^2)\geqslant 0, \\ 3\alpha>3, \\ 9-18\alpha+2-2\alpha+9\alpha^2>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\alpha>{}^{11}/_{9}$. Ответ: $\alpha>{}^{11}/_{9}$.

171. Используем теорему 1. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} 4c^2-(1-2c+4c^2)\geqslant 0, \\ -2c<-1, \\ 1-4c+(1-2c+4c^2)>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $c > 1$. Ответ: $c > 1$.

172. Согласно теореме 3, запишем систему неравенств

$$\begin{cases} (2a+6)^2 - 4(4a+12) \geqslant 0, \\ -(a+3) > -1, \\ 1-(2a+6)+4a+12 > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $-3{,}5 < a \leqslant -3$. Ответ: $-3{,}5 < a \leqslant -3$.

173. Согласно теореме 3 имеем две системы неравенств

$$\begin{cases} 1+a > 0, \\ 9a^2 - 16a(1+a) \geqslant 0, \\ \frac{3a}{1+a} > 1, \\ 1+a-3a+4a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+a < 0, \\ 9a^2 - 16a(1+a) \geqslant 0, \\ \frac{3a}{1+a} > 1, \\ 1+a-3a+4a < 0. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Решая вторую систему, находим $-\frac{16}{7} \leqslant a < -1$. Ответ: $\frac{16}{7} \leqslant a < -1$.

174. Отметим, прежде всего, что $a^2+a+1 > 0$ при всех a. Тогда согласно теореме 2 получаем условие

$$\begin{cases} a^2+a+1+2a-3+a-5 < 0, \\ a^2+4a-7 < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-2-\sqrt{11} < a < -2+\sqrt{11}$.

175. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были заключены между -1 и 1, необходимо также, чтобы и среднее арифметическое этих корней было заключено между этими числами, т. е.

$$-1 < \frac{x_1+x_2}{2} < 1.$$

Но согласно теореме Виета для нашего уравнения

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -1.$$

Следовательно, значений a, требуемых в условии, не существует.

176. Корни уравнения должны быть действительными и удовлетворять неравенствам $-1 < x_1 < 1$ и $-1 < x_2 < 1$.

Согласно следствию I получаем две системы неравенств для определения k.

$$\begin{cases} k>0, \\ (k+1)^2-8k\geqslant 0, \\ -1<\frac{k+1}{2k}<1, \\ k-(k+1)+2>0, \\ k+(k+1)+2>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} k<0, \\ (k+1)^2-8k\geqslant 0, \\ -1<\frac{k+1}{2k}<1, \\ k-(k+1)+2<0, \\ k+(k+1)+2<0. \end{cases}$$

Решив системы, находим $k\geqslant 3+\sqrt{8}$. Ответ: $k\geqslant 3+\sqrt{8}$.

177. Ответ: $2\sqrt{2}\leqslant a<{}^{11}/_{3}$.

178. Указание. Применить следствие I.

Ответ: $-\frac{3}{4}\leqslant b\leqslant\frac{3}{4}$.

179. $-2<a\leqslant\frac{1}{4}$.

180. Для того чтобы неравенство выполнялось при всех $1<x<2$, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $f(x)=x^2+mx+m^2+6m$, представляемый параболой, направленной ветвями вверх, при всех указанных x был отрицателен. Для этого нужно, чтобы интервал (1,2) целиком лежал между корнями параболы (следствие 4). Имеем

$$f(1)=1+m+m^2+6m\leqslant 0,$$
$$f(2)=4+2m+m^2+6m\leqslant 0.$$

Ответ: $\frac{-7-\sqrt{45}}{2}\leqslant m\leqslant -4+2\sqrt{3}$.

181. Понятно, что m должно быть больше 0, так как в противном случае всегда найдутся такие x, при которых функция $y=mx^2-4x+3m+1$ принимает отрицательные значения (парабола при $m<0$ направлена ветвями вниз; случай $m=0$ также не подходит). При $m>0$ имеется два случая, удовлетворяющих условию:

а) квадратный трехчлен не имеет действительных корней, если

$$\begin{cases} m>0, \\ 4-m(3m+1)<0. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $m>1$.

В этом случае неравенство выполнено всеобще при всех x;

б) корни квадратного трехчлена действительны, но оба меньше (или равны) нуля ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$). Согласно теореме I

$$\begin{cases} m > 0, \\ 4 - m(3m+1) \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{m} \leqslant 0, \\ 3m + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система несовместна. Итак, случай а) исчерпывает все решения задачи. Ответ: $m > 1$.

182. Обозначим $\log_{1/2} y^2$ через m и запишем неравенство в другом виде:

$$x^2 - 2mx + 3 - 2m < 0.$$

Левая часть этого неравенства определяет параболу, направленную ветвями вверх. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы хотя бы при одном x эта функция была строго меньше нуля, заключается в положительности дискриминанта D

$$D = m^2 - 3 + 2m > 0.$$

Это условие приводит к логарифмическому неравенству

$$\log^2_{1/2} y^2 + 2\log_{1/2} y^2 - 3 > 0.$$

Решая его, получаем $1 < \log_{1/2} y^2$, $\log_{1/2} y^2 < -3$.

1) $\log_{1/2} y^2 > 1$, $y^2 < {}^1/_2$,

$$0 < |y| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } -\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 0;$$

2) $\log_{1/2} y^2 < -3$, $y^2 > 8$,

$$|y| > 2\sqrt{2}, \text{ т. е. } y < -2\sqrt{2} \text{ и } y > 2\sqrt{2}.$$

Ответ: 1) $|y| > 2\sqrt{2}$; 2) $0 < |y| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (отметим формулу $\log_a y^2 = 2\log_a |y|$).

183. Обозначим $1 + \log_2 \dfrac{y}{y+1}$ через m и запишем неравенство в следующем виде:

$$x^2(3 - m) + 2mx - 2m > 0.$$

а) При значениях m, для которых $3 - m > 0$, график квадратного трехчлена, выражение которого представляет левая часть неравенства, направлен ветвями вверх. Необхо-

димое и достаточное условие, при котором этот трехчлен положителен для всякого x, заключается в отрицательности его дискриминанта.

$$\begin{cases} 3-m>0, \\ D=m^2+2m(3-m)<0. \end{cases}$$

Отсюда находим условие $m<0$.

б) Если $3-m\leqslant 0$, т. е. $m\geqslant 3$, то всегда найдутся значения x, при которых функция, стоящая в левой части неравенства, отрицательна. При $m=3$ имеем

$$6x-6>0,$$

т. е. неравенство выполняется не при всех x, а только при $x>1$; при $m<3$ график квадратного трехчлена $x^2(3-m)+2mx-2m$ направлен ветвями вниз и, значит, существуют такие x, для которых он отрицателен. Неравенство $m<0$ приводит к логарифмическому неравенству

$$1+\log_2\frac{y}{y+1}<0,$$

$$\log_2\frac{y}{y+1}<-1.$$

Откуда находим

$$0<\frac{y}{y+1}<\frac{1}{2}.$$

Неравенство $\frac{y}{y+1}>0$ имеет решения: $y>0$ и $y<-1$.

Неравенство $\frac{y}{y+1}<\frac{1}{2}$ имеет решения: $y>1$ и $y<-1$. Сравнивая эти результаты, находим ответ задачи. Ответ: 1) $y<-1$; 2) $y>1$.

184. $a>{}^3/_4$. **185.** Таких a нет.

186. Указание. Используйте теорему III. Ответ: $a<-2$.

187. $m\leqslant 0$.

188. Ответ: ни при каких. Отметим, что условие задачи требует найти такие числа m, при которых любое x, удовлетворяющее неравенству $x^2-(3m+1)x+m>0$, удовлетворяло бы и неравенству $x>1$, т. е. последнее неравенство являлось бы необходимым условием (следствием) для первого.

189. Запишем это уравнение в виде

$$\sin^2 x + p \sin x + 1 - p^2 = 0.$$

Это уравнение квадратное относительно $\sin x$, и для того чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти значения p, при которых корни уравнения

$$t^2 + pt + 1 - p^2 = 0 \qquad (1)$$

действительны и хотя бы один корень удовлетворял условию $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Левая часть уравнения (1) является квадратным трехчленом $f(t) = t^2 + pt + 1 - p^2$, график которого направлен ветвями вверх. Ясно и на рис. 47 наглядно показано, что условию задачи удовлетворяют те значения параметра p, при которых выполняется один из четырех случаев.

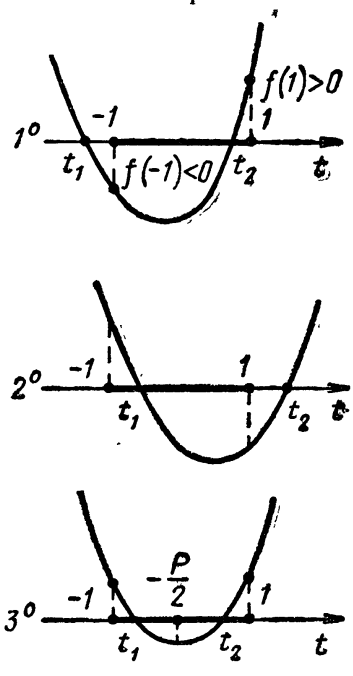


Рис. 47

1°. Только больший корень трехчлена лежит в интервале

$$-1 < t < 1.$$

2°. Только меньший корень трехчлена лежит в интервале

$$-1 < t < 1.$$

3°. Оба корня трехчлена лежат в интервале $-1 < t < 1$.

4°. Один из корней трехчлена равен $+1$ или -1.

Первый случай определяется системой неравенств (следствие II предварительных замечаний)

$$\begin{cases} f(1) = 1 + p + 1 - p^2 > 0, \\ f(-1) = 1 - p + 1 - p^2 < 0. \end{cases}$$

Решения этой системы: $1 < p < 2$.

Второй случай определяется системой неравенств (следствие III предварительных замечаний)

$$\begin{cases} f(1) = 1 + p + 1 - p^2 < 0, \\ f(-1) = 1 - p + 1 - p^2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $-2 < p < -1$.

Третий случай определяется системой неравенств (следствие I предварительных замечаний)

$$\begin{cases} D = 5p^2 - 4 \geqslant 0, \\ -1 < -\frac{p}{2} < 1, \\ f(1) = 1 + p + 1 - p^2 > 0, \\ f(-1) = 1 - p + 1 - p^2 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |p| \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ |p| > 2, \\ p^2 + p - 2 < 0, \\ p^2 - p - 2 < 0. \end{cases}$$

Решение этой системы состоит из двух интервалов

$$-1 < p \leqslant -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant p < 1.$$

Четвертый случай. Число $t = 1$ является корнем трехчлена, если $f(1) = 0$, т. е. если $p = 2$ и $p = -1$. Число $t = -1$ будет корнем трехчлена, если $p = 1$ и $p = -2$. Эти четыре значения p также удовлетворяют требуемым условиям. Итак, все значения p, при которых данное уравнение имеет решение, определяются неравенством

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant |p| \leqslant 2.$$

190. Обозначим $2^{\sin x}$ через t и запишем уравнение в виде

$$t^2 + mt + m^2 - 1 = 0.$$

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти значения m, при которых корни этого уравнения действительны и хотя бы один из них заключен на отрезке $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$ (так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то $1/2 \leqslant 2^{\sin x} \leqslant 2$). Дальнейшее решение этой задачи полностью аналогично решению предыдущей.

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}} < m \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{4}$.

191. Если x — любое действительное число, то $|\cos x|$ может принимать любое значение от 0 до 1, а выражение $2^{|\cos x|}$ — любое значение от 1 до 2. Обозначим $2^{|\cos x|}$ через t и запишем неравенство в виде квадратного

$$t^2+2(2a+1)t+4a^2-3<0. \qquad (1)$$

Теперь задача свелась к следующей: найти все действительные значения a, при которых неравенство (1) выполняется при всех t из отрезка $1\leqslant t\leqslant 2$. Последнее означает, что для любого t, лежащего на отрезке [1, 2] функция

$$f(t)=t^2+2(2a+1)t+4a^2-3$$

должна быть отрицательной, т. е. график трехчлена $f(t)$ должен «огибать» отрезок [1, 2] рис. (48). Необходимые и достаточные условия для этого даются следствием 4 предварительных замечаний

$$\begin{cases} f(1)=1+2(2a+1)+4a^2-3<0, \\ f(2)=4+4(2a+1)+4a^2-3<0. \end{cases}$$

Эта система квадратных неравенств для a несовместна. Следовательно, значений a, при которых неравенство задачи выполняется при всех x, нет.

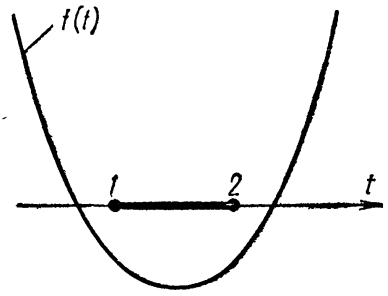


Рис. 48

192. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant 1.$

193. Условие задачи требует следующее: найти все a, при которых любое число x, удовлетворяющее неравенству

$$f(x)=ax^2-x+1-a<0, \qquad (1)$$

удовлетворяет также и неравенству

$$0<x<1, \qquad (2)$$

т. е. неравенство (1) достаточно для выполнения (2), а (2) необходимо для выполнения (1).

Прежде всего отметим, что a должно быть положительным числом. Действительно, при $a<0$ квадратное неравенство (1) выполняется либо для всех x, либо для тех x, которые лежат вне корней квадратного трехчлена $ax^2-x+1-a$. В каждом из этих случаев обязательно найдутся значения x, удовлетворяющие неравенству (1), но не подчиняющиеся условию (2), а значит, условие (2)

не следует с необходимостью из (1). (Нарисуйте соответствующие чертежи.) При $a=0$ неравенство (1) дает условие $x>1$, что противоречит (2).

Итак, $a>0$. Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2-x+1-a$ отрицателен или равен нулю, то неравенство (1) решений не имеет и, значит, (2) не следует из него. Если дискриминант положителен, как в данном случае, то решения неравенства (1) заключены между его корнями. Поэтому для выполнения условия задачи нужно, чтобы весь интервал между корнями трехчлена лежал на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ (очевидно, если корни трехчлена совпадают с точками 0 или 1, то тем не менее внутренние точки интервала между корнями удовлетворяют неравенству $0<x<1$). Для этого необходимо и достаточно (следствие I предварительных замечаний):

$$\begin{cases} a>0, \\ D=1-4a(1-a)>0, \\ 0<\frac{1}{2a}<1, \\ f(0)=1-a\geqslant 0, \\ f(1)=a-1+1-a\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда находим $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$. Ответ: $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$.

194. Решается аналогично предыдущей задаче. Ответ: $-2\leqslant a\leqslant -0{,}5$.

195. 1) $a>-1$, 2) $a<-3$.

196. Уравнение удобнее всего решить следующим образом. Обозначим $x+3=u$, $x+1=v$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^4+v^4=20, \\ u-v=2. \end{cases}$$

Эту систему уравнений нетрудно решить. Действительно,

$$\begin{cases} (u^2+v^2)^2=20+2u^2v^2, \\ u^2+v^2=4+2uv. \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения системы с помощью второго уравнения сумму квадратов неизвестных, получаем квадратное уравнение для определения произведения uv

$$(uv)^2+8uv-2=0,$$
$$uv=-4\pm 3\sqrt{2}.$$

Так как $u=v+2$, то получим уравнение

$$v^2+2v+(4+3\sqrt{2})=0.$$

Отсюда находим четыре значения для v и соответственно четыре значения для u:

$$v_{1,2}=-1\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3},\quad u_{1,2}=1\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3};$$

$$v_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3\sqrt{2}+3},\quad u_{3,4}=1\pm i\sqrt{3\sqrt{2}+3}.$$

Очевидно, что все найденные решения удовлетворяют исходной системе уравнений. Окончательно находим значения x

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3},$$

$$x_{3,4}=-2\pm i\sqrt{3\sqrt{2}+3}.$$

197. Нетрудно заметить, что $x=-1$ является решением уравнения ($x=-1$ есть корень многочлена, стоящего в левой части уравнения). Разделив кубический многочлен на $(x+1)$, найдем

$$2x^3-3x^2+4x+9=(x+1)(2x^2-5x+9).$$

Остальные решения находятся из уравнения

$$2x^2-5x+9=0.$$

Эти решения оказываются комплексными:

$$x_{2,3}=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{47}}{4}i.$$

198. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x=1$ и $x=2$ являются корнями уравнения. Поэтому уравнение можно представить в следующем виде:

$$(x-1)(x-2)(2x^2+3x+7)=0.$$

Отсюда находятся два оставшихся решения

$$x_{3,4}=-\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{47}}{4}i.$$

199. Остаток от деления данного многочлена на квадратный трехчлен $x^2-1=(x-1)(x+1)$ есть линейный многочлен, который можно представить как $ax+b$, т. е.

$$x^{100}-x^{50}+2x^{25}-4=(x-1)(x+1)S_{98}(x)+ax+b.$$

$S_{98}(x)$ — частное от деления. Подставляя в это равенство значения x, равные 1 и -1, получим систему уравнений для определения коэффициентов a и b:

$$\begin{cases} -2 = a + b, \\ -6 = -a + b. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a = 2$, $b = -4$. Итак, остаток от деления есть $(2x - 4)$.

200. Задача решается аналогично предыдущей, с той лишь разницей, что в многочлен нужно подставлять значения i и $-i$. Ответ: $-3x - 1$.

201. Если многочлен $P_4(x)$ делится на $(x-1)^2$, то его можно представить в виде

$$P_4(x) = ax^4 + bx^3 + 1 = (x-1)^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Выражение $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ есть частное от деления многочленов. Отсюда ясно, что $x = 1$ есть, по крайней мере, двукратный корень многочлена $(ax^4 + bx^3 + 1)$. Для того чтобы $x = 1$ было просто корнем многочлена $P_4(x)$, необходимо и достаточно выполнения равенства $P_4(1) = 0$. Значит, $P_4(1) = a + b + 1 = 0$, т. е. $a = -1 - b$. Итак, имеем многочлен $-(1 + b)x^4 + bx^3 + 1$. Разделив его на двучлен $(x - 1)$, найдем частное от деления $P_3(x)$

$$P_3(x) = -[(1 + b)x^3 + x^2 + x + 1].$$

Для того чтобы $x = 1$ было двукратным корнем исходного многочлена, нужно, чтобы многочлен $P_3(x)$ в свою очередь имел своим корнем $x = 1$. Для этого необходимо и достаточно равенство $P_3(1) = 0$.

$$P_3(1) = -(1 + b) - 1 - 1 - 1 = 0, \quad b = -4.$$

Затем находим, что $a = 3$.

Разделив многочлен $(3x^4 - 4x^3 + 1)$ на $(x-1)^2$, найдем частное от деления

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 3x^2 + 2x + 1.$$

Оставшиеся корни уравнения $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ находятся из уравнения

$$3x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $a=3$, $b=-4$. Корни уравнения $x_1=1$, $x_2=1$, $x_{3,4}=-\frac{1}{3}\pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$.

202. Решается аналогично предыдущей задаче. Для того чтобы исходный многочлен $P_{10}(x)$ делился на $x^2-1=(x-1)(x+1)$, необходимо и достаточно, чтобы $x=1$ и $x=-1$ были его корнями. Это приводит к двум соотношениям:

$$P_{10}(1)=1+\alpha+\beta+1=0, \qquad P_{10}(-1)=1+\alpha-\beta+1=0.$$

Отсюда находим $\alpha=-2$, $\beta=0$.

203. Если многочлен x^4+1 делится на трехчлен x^2+ax+b, то имеет место его тождественное представление в виде

$$x^4+1\equiv(x^2+ax+b)(x^2+mx+n),$$

или в развернутом виде

$$x^4+1\equiv x^4+x^3(a+m)+x^2(b+am+n)+x(bm+an)+bn.$$

Если два многочлена тождественно (т. е. при всех x) равны друг другу, то доказывается, что у них равны все коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного. Отсюда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a+m=0, \\ b+am+n=0, \\ bm+an=0, \\ bn=1. \end{cases}$$

Четвертое уравнение системы показывает, что $n\neq 0$. Тогда, умножая первое уравнение на n и сравнивая с третьим уравнением, находим

$$m(b-n)=0.$$

Отсюда I. $m=0$. Тогда

$$\begin{cases} a=0, \\ b+n=0, \\ bn=1. \end{cases}$$

Действительных значений для b нет.

II. $b=n\neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} a+m=0, \\ am=-2b, \\ b^2=1. \end{cases}$$

Если $b=1$, то $a=\pm\sqrt{2}$. Если $b=-1$, то нет действительных значений для a. Итак, все пары чисел a и b суть следующие: $(\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1)$.

204. 1) $a=-12$, $b=-2$; 2) $a=-7$, $b=-1$.

205. Необходимыми и достаточными условиями, чтобы многочлен $P_n(x)$ $(n\geqslant 2)$ имел число x_0 своим двукратным (но не более чем двукратным) корнем являются следующие:

1) $P_n(x_0)=0$;

2) частное $P_{n-1}(x)$ от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-x_0)$ имеет число x_0 своим корнем: $P_{n-1}(x_0)=0$;

3) частное $P_{n-2}(x)$ от деления многочлена $P_{n-1}(x)$ на $(x-x_0)$ не имеет число x_0 своим корнем: $P_{n-2}(x_0)\neq 0$.

Отсюда получаем набор условий:

1) $P_5(1)=3-4+a+b=0$, т. е. $b=1-a$;

2) $P_4(x)=\dfrac{3x^5-4x^2+ax+(1-a)}{x-1}=3x^4+3x^3+3x^2-x+$

$+(a-1)$, $P_4(1)=3+3+3-1+a-1=0$, $a=-7$ $(b=8)$;

3) $P_3(x)=\dfrac{P_4(x)}{x-1}=\dfrac{3x^4+3x^3+3x^2-x-8}{x-1}=3x^3+6x^2+9x+8$;

$P_3(1)=3+6+9+8=26\neq 0$.

Ответ: $a=-7$, $b=8$.

206. Для решения задачи используем обобщенную теорему Виета (см. предварительные замечания).

Предположим сначала, что многочлен имеет три одинаковых корня $x_1=x_2=x_3$. Тогда согласно теореме Виета имеем

$$\begin{cases} 3x_1=-2, \\ 3x_1^2=0, \\ x_1^3=-a. \end{cases}$$

Система несовместна; такой случай невозможен ни при каких a. Пусть теперь многочлен имеет двукратный корень $x_1=x_2$. Из теоремы Виета получаем

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=-2, \\ x_1^2+2x_1x_3=0, \\ x_1^2x_3=-a. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы видим, что либо $x_1=0$, либо $x_1+2x_3=0$. В первом случае находим $x_3=-2$, $a=0$. Во втором случае получаем $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_3=\dfrac{2}{3}$, $a=-\dfrac{32}{27}$.

Ответ: Многочлен x^3+2x^2+a имеет кратные корни при $a=0$ (корни $x_1=x_2=0$, $x_3=-2$) и при $a=-32/27$ $\left(\text{корни } x_1=x_2=-\frac{4}{3},\ x_3=\frac{2}{3}\right)$.

207. Задача решается аналогично предыдущей. Ответ: $a=\pm 2\sqrt{2}$ (корни $x_1=x_2=\mp\sqrt{2}$, $x_3=0$).

208. Если остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-2)$ равен 5, то имеет место тождество

$$P_n(x)=(x-2)\,S^1_{n-1}(x)+5, \tag{1}$$

где $S^{(1)}_{n-1}(x)$ — частное. Второе условие приводит к аналогичному представлению для многочлена $P_n(x)$

$$P_n(x)=(x-3)\,S^{(2)}_{n-1}(x)+7, \tag{2}$$

где $S^{(2)}_{n-1}(x)$ — частное. При делении многочлена $P_n(x)$ на квадратный трехчлен $(x-2)\cdot(x-3)$, т. е. многочлен второй степени, остатком в общем случае является уже не число, а линейный многочлен $\alpha x+\beta$, так что

$$P_n(x)=(x-2)(x-3)\,S_{n-2}(x)+\alpha x+\beta, \tag{3}$$

где S_{n-2} — частное.

Из равенства (1) имеем $P_n(2)=5$, а из равенства (2) $P_n(3)=7$. Подставляя $x=2$ и $x=3$ в соотношение (3), получим

$$\begin{aligned} P_n(2)&=2\alpha+\beta=5,\\ P_n(3)&=3\alpha+\beta=7. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассматривая (4) как систему уравнений для определения коэффициентов α и β, находим $\alpha=2$, $\beta=1$. Итак, искомый остаток от деления многочленов есть многочлен первой степени $2x+1$.

209. Условие задачи приводит к системе соотношений

$$\begin{aligned} P_n(x)&=(x-a)\,S_1(x)+A,\\ P_n(x)&=(x-b)\,S_2(x)+B,\\ P_n(x)&=(x-c)\,S_3(x)+C. \end{aligned} \tag{1}$$

Кроме того,

$$P_n(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,S_4(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma. \tag{2}$$

Подставляя в равенство (2) $x=a$, $x=b$, $x=c$ и учитывая, что из (1) следуют соотношения $P_n(a)=A$, $P_n(b)=B$,

$P_n(c)=C$, получаем систему уравнений для определения α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha a^2+\beta a+\gamma=A, \\ \alpha b^2+\beta b+\gamma=B, \\ \alpha c^2+\beta c+\gamma=C. \end{cases}$$

При ограничениях, сформулированных в условии, находим единственное решение:

Ответ: $\alpha=\dfrac{A(c-b)+B(c-a)+C(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$,

$$\beta=\frac{A(b^2-c^2)+B(c^2-a^2)+C(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\gamma=\frac{Aa(c-b)+Bb(c-a)+Cc(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

210. Для того чтобы многочлен x^3+ax+1 делился без остатка на $(x-b)$, необходимо и достаточно, чтобы число b было его корнем, т. е.

$$b^3+ab+1=0. \tag{1}$$

Это — одно соотношение, связывающее a и b. Делением находим частное. Оно имеет вид квадратного трехчлена

$$x^2+bx+b^2+a.$$

Чтобы это выражение было больше нуля при всех x, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был отрицательным. Имеем

$$D=b^2-4b^2-4a<0,$$

или

$$3b^2+4a>0. \tag{2}$$

С помощью (1) условие (2) можно преобразовать следующим образом:

$$3b^2+4\frac{-1-b^3}{b}>0,\quad \frac{b^3+4}{b}<0.$$

Отсюда видно, что параметр b должен быть отрицательным. Имея это ввиду, получаем

$$b^3+4>0,\quad b>-\sqrt[3]{4}.$$

Итак, $0>b>-\sqrt[3]{4}$; $a=-\dfrac{b^3+1}{b}$.

211. Для того чтобы многочлен $P_3(x)=3x^3+ax^2+bx+12$, стоящий в левой части уравнения, имел своим корнем число $1+\sqrt{3}$, необходимо и достаточно условие

$$P_3(1+\sqrt{3})=0, \text{ т. е.}$$

$$3(1+\sqrt{3})^3+a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})+12=0.$$

Отсюда получаем

$$(4a+b+42)+\sqrt{3}(2a+b+18)=0,$$

$$(4a+b+42)=-\sqrt{3}(2a+b+18).$$

Поскольку a и b — целые числа, то целыми числами будут также выражения, стоящие в круглых скобках последнего равенства. Если эти выражения отличны от нуля, то приходим к противоречию: целое число равно иррациональному числу. Итак, необходимо, чтобы

$$4a+b+42=0,$$
$$2a+b+18=0.$$

Отсюда находим $a=-12$, $b=6$.

212. Если число $\sqrt{3}+1$ есть корень многочлена $P_4(x)=x^4+ax^3+bx^2+6x+2$, то

$$P_4(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^4+a(1+\sqrt{3})^3+$$
$$+b(1+\sqrt{3})^2+6(1+\sqrt{3})+2=0.$$

Отсюда получаем равенство

$$(18+5a+2b)=-\sqrt{3}(11+3a+b).$$

Поскольку a и b — рациональные числа, то рациональными будут также выражения, стоящие в круглых скобках последнего равенства. Если эти выражения отличны от нуля, то приходим к противоречию: рациональное число равно иррациональному числу. Итак, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} 5a+2b+18=0, \\ 3a+b+11=0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $a=-4$; $b=1$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что число $(1-\sqrt{3})$ также является корнем многочлена $P_4(x)$.

Здесь уместно отметить более общее утверждение, если многочлен с рациональными коэффициентами имеет своим корнем иррациональ-

ное число вида $p+\sqrt{q}$, где p и q — рациональные числа, то этот же многочлен имеет своим корнем и число $p-\sqrt{q}$. Докажем это. Пусть многочлен $P_n(x)$ имеет вид

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

(a_0, a_1, ..., a_n — рациональные числа). Подставляя $x=p+\sqrt{q}$, получим, используя формулу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}P_n(p+\sqrt{q})=a_0(p^n+C_n^1p^{n-1}\sqrt{q}+C_n^2p^{n-2}q+\ldots)+\\+a_1(p^{n-1}+C_{n-1}^1p^{n-2}\sqrt{q}+C_{n-1}^2p^{n-3}q+\ldots)+\\+\ldots\ldots\ldots+a_0=0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь C_k^m — биномиальные коэффициенты. Собирая члены, содержащие сомножитель $\sqrt{q}$ и не содержащие его, и учитывая, что p, q, a_0, a_1, ..., a_n — рациональные числа, получим необходимые и достаточные условия равенства нулю выражения (2)

а) $a_0(p^n+C_n^2p^{n-2}q+\ldots)+a_1(p^{n-1}+C_{n-1}^2p^{n-3}q+\ldots)+$

$$+\ldots+a_n=0. \qquad (3)$$

б) $a_0(C_n^1p^{n-1}+C_n^3p^{n-3}q+\ldots)+a_1(C_{n-1}^1p^{n-2}+\ldots)+\ldots=a.$

Если теперь в выражение для $P_n(x)$, формулу (1), подставить $x=p-\sqrt{q}$, то получим

$$\begin{aligned}P_n(p-\sqrt{q})=a_0(p^n-C_n^1p^{n-1}\sqrt{q}+C_n^2p^{n-2}q-\\-C_n^3p^{n-3}q\sqrt{q}+\ldots)+\ldots+a_n=\\=[a_0(p^n+C_n^2p^{n-2}q+\ldots)+a_1(p^{n-1}+C_{n-1}^2p^{n-3}q+\ldots)+\\+\ldots+a_n]-\sqrt{q}[a_0(C_n^1p^{n-1}+C_n^3p^{n-3}q+\ldots)+\\+a_1(C_{n-1}^1p^{n-2}+\ldots+)+\ldots].\end{aligned} \qquad (4)$$

Согласно равенствам а) и б) из (3) это выражение обращается в нуль, т. е. $P_n(p-\sqrt{q})=0$, а значит, число $p-\sqrt{q}$ есть корень многочлена. Утверждение доказано.

Возвратимся теперь к нашей задаче. Согласно вышесказанному многочлен имеет еще один корень $1-\sqrt{3}$. Таким образом, многочлен $P_4(x)=x^4-4x^3+x^2+6x+2$ должен делиться на трехчлен $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$, т. е. $x^4-4x^3+x^2+6x+2=(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x^2-2x-1)$. Остальные корни многочлена находятся из уравнения

$$x^2-2x-1=0,$$

$$x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}.$$

Ответ: $a=-4$, $b=1$. Корни $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$; $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

213. Утверждение этой задачи хорошо известно в теории многочленов. Доказать его можно различными способами. Приведем доказательство, основанное на свойствах операции „сопряжения“ для комплексных чисел (см. § 2). Напомним эти свойства:

1°. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

2°. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Здесь z_1 и z_2 — произвольные комплексные числа.

Пусть число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, т. е.

$$P_n(z_0) = a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0. \qquad (1)$$

Очевидно, что $\overline{P_n(z_0)} = 0$ (сопряженное нулю число есть нуль). Значит,

$$\overline{a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + a_2 z_0^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z_0 + a_n} = 0.$$

Учитывая свойства операции сопряжения 1° и 2°, а также то, что число, сопряженное действительному, есть само это число, получаем

$$a_0 \bar{z}_0^n + a_1 \bar{z}_0^{n-1} + a_2 \bar{z}_0^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \bar{z}_0 + a_n = 0. \qquad (2)$$

Равенство (2) выражает тот факт, что $\bar{z}_0$ есть корень того же уравнения, что и число z_0, т. е. корень многочлена $P_n(z)$.

214. Это утверждение легко следует из теоремы, доказанной в предыдущей задаче. Для каждого комплексного корня у многочлена с действительными коэффициентами должен быть сопряженный, всего же многочлен имеет нечетное количество корней: значит, хотя бы один из корней есть действительное число.

215. Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь (p и q взаимно простые целые числа), представляющая собой рациональный корень данного многочлена. Тогда имеем

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0$$

или

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0.$$

Теперь можно написать

$$p^n = -q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \ldots + a_n q^{n-1}).$$

Поскольку все коэффициенты многочлена — целые числа, то выражение, стоящее в круглых скобках, есть целое число. Если $q \neq 1$, то эта формула означает, что p^n делится на q. Поскольку p и q взаимно простые числа, то это невозможно. Значит $q = 1$, т. е. корень многочлена есть целое число.

216. Доказательство проводится аналогично предыдущей задаче, утверждение которой является частным случаем данного.

217. Не нарушая общности, можно считать коэффициент при старшей степени многочлена $P_n(x)$ равным единице. Если бы он равнялся -1, мы бы рассмотрели многочлен $-P_n(x)$, корни которого, очевидно, те же самые, что и у многочлена $P_n(x)$. Итак,

$$P_n(x) = x^n + \ldots + x^k + \ldots - x^s + \ldots, \qquad (1)$$

где $n > k > s \ldots$. Докажем, что все действительные корни этого многочлена меньше чем 2. Для этого покажем, что при $x \geqslant 2$ многочлен сохраняет знак, $P_n(x) > 0$. Очевидно, что для положительных x справедливо неравенство

$$P_n(x) > x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1. \qquad (2)$$

Здесь члены, входящие в выражение (1) со знаком плюс или отсутствующие в (1), заменены членами со знаком минус, отчего значения всего выражения могли только уменьшиться. Преобразуем правую часть неравенства (2):

$$x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) = \\ = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^n(x-2) + 1}{x - 1}. \qquad (3)$$

Здесь применена формула для суммы членов геометрической прогрессии. При $x \geqslant 2$ числитель и знаменатель дроби (3) положительны. Следовательно, при $x \geqslant 2$

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 > 0,$$

а значит,

$$P_n(x) > 0,$$

что и доказывает утверждение.

Если x заменить на $-x$, отчего положительные и отрицательные корни многочлена $P_n(x)$ поменяются местами, то станет ясно, что и при $x \leqslant -2$ многочлен сохраняет знак. Значит все действительные корни многочлена (если они есть) могут находиться только на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

218. Допустим противное: имеется рациональный корень $x_1 = \frac{p}{q}$ (где p и q взаимно простые числа). Из предыдущей задачи следует, что p является делителем коэффициента c, а q — делителем коэффициента a. Из того, что a и c нечетные числа, следует, что p и q также нечетные числа. По теореме Виета находим второй корень уравнения $x_2 = \frac{cq}{ap}$ и, далее,

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = \frac{ap^2 + cq^2}{apq},$$

или

$$-bpq = ap^2 + cq^2.$$

Последняя формула противоречива. Можно заметить, что все числа bpq, ap^2, cq^2 — нечетные. Следовательно, слева стоит нечетное число, а справа — четное число (сумма двух нечетных чисел). Пришли к противоречию; значит, уравнение не имеет рациональных решений.

4°. Системы рациональных алгебраических уравнений

220. Выполняя подстановку из первого уравнения системы во второе, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2y^2}{y} = \frac{22}{3}, \\ 484 = 6y^2 - 22y + 9x + 478, \end{cases}$$

равносильную заданной системе.

Из первого уравнения находим

$$6y^2 - 22y = -3x^2.$$

Подставляя значение $6y^2 - 22y$ во второе уравнение, получаем квадратное уравнение для нахождения x

$$3x^2 - 9x + 6 = 0,$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Находя соответствующие значения y, получаем ответ.

Ответ: $(2, 3), \left(2, \frac{2}{3}\right), \left(1, \frac{11 + \sqrt{103}}{6}\right), \left(1, \frac{11 - \sqrt{103}}{6}\right)$.

221. Исходная система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x + y + z = 9, \\ xy + xz + yz = 23, \\ xyz = 15. \end{cases}$$

Применяя формулу Виета для уравнения третьей степени, получим уравнение

$$t^3 - 9t^2 + 23t - 15 = 0,$$

правая часть которого легко разлагается на множители

$$(t-1)(t^2-8t+15) = 0.$$

Откуда получаем

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3, \quad t_3 = 5.$$

Учитывая симметрию исходной системы, получаем Ответ: (1, 3, 5), (1, 5, 3), (5, 1, 3), (5, 3, 1), (3, 1, 5), (3, 5, 1).

222. Заметим, что левую часть третьего уравнения заданной системы можно представить в следующем виде:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz.$$

Воспользовавшись подстановкой

$$x+y+z = t, \quad xy+yz+zx = u, \quad xyz = v,$$

запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} t = 1, \\ u = -4, \\ t^3 - 3ut + 3v. \end{cases}$$

Откуда находим $v = -4$.

Итак,

$$\begin{cases} x+y+z = 1, \\ xy+yz+zx = -4, \\ xyz = -4. \end{cases}$$

По теореме Виета получаем:

$$m^3 - m^2 - 4m - 4 = 0$$

или

$$(m-1)(m+2)(m-2) = 0.$$

Откуда получаем решения исходной системы:

$$(-2, 1, 2), (-2, 2, 1), (1, -2, 2),$$
$$(1, 2, -2), (2, 1, -2), (2, -2, 1).$$

223. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то, разделив первое уравнение на xy и введя подстановку $\frac{x}{y} = t$, получим уравнение

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

корни которого $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Таким образом, заданная система равносильна совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 4, \\ 2x^2 - y^2 = 31. \end{cases}$

Решая эти системы, получим Ответ: $(\sqrt{31}, \sqrt{31})$, $(-\sqrt{31}, -\sqrt{31})$, $(4, 1)$, $(-4, -1)$.

224. Исходная система эквивалентна совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$.

225. Разложим на множители многочлен $x^2 + 3xy + 2y^2$, решая относительно x уравнение $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$. Получим $x_1 = -2y$ и $x_2 = -y$. Второе уравнение системы можно записать следующим образом:

$$(x + 2y)(x + y + 2) = 0.$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$

Решая каждую из них методом исключения неизвестных, находим решения.

Ответ: $(0, 0)$, $(2, -1)$, $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

226. Введем новое неизвестное, положив

$$x + 3z = t.$$

Принимая во внимание, что $3xy = 4y^2$, можем исходную систему записать в виде системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} t - 2y = 9, \\ t^2 + 4y^2 - 8y^2 = 189 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} t - 2y = 9, \\ t + 2y = 21. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$t = 15, \quad y = 3.$$

И исходная система примет вид

$$\begin{cases} x + 3z = 15, \\ x \cdot 3z = 36. \end{cases}$$

Эта система имеет корни:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 3,$$
$$z_1 = 1; \quad z_2 = 4.$$

Ответ: (12, 3, 1), (3, 3, 4).

227. Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 = 17(x+y)^2, \\ xy = 2(x+y). \end{cases}$$

Введем новые вспомогательные неизвестные

$$x + y = z, \quad xy = t.$$

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} z^4 - 4z^2t + 2t^2 - 17z^2 = 0, \\ t = 2z. \end{cases}$$

Последняя система имеет решения:

$$z_1 = 0, \ t_1 = 0; \ z_2 = -1, \ t_2 = -2; \ z_3 = 9, \ t_3 = 18.$$

Таким образом, исходная система эквивалентна совокупности трех систем:

а) $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 18, \end{cases}$

решая которые, получим Ответ: (0, 0), (—2, 1), (1, —2), (3, 6), (6, 3).

228. См. предыдущую задачу. Ответ: (0, 0); (1, 1).

229. Из третьего уравнения исходной системы вытекает, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Поделив первое уравнение на x, а второе на y, получим

$$\begin{cases} x+y+4z-4\dfrac{z^2}{x}=0, \\ y+x+4z-8\dfrac{z^2}{y}=0. \end{cases}$$

Вычитая эти два уравнения, получим

$$y=2x.$$

Таким образом, исходная система будет равносильна системе

$$\begin{cases} x^2+xy+4xy-4z^2=0, \\ xyz=8, \\ y=2x. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим решения заданной системы.

Ответ: $(-2, -4, 1)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}, 2\sqrt[3]{\frac{8}{3}}, \frac{3}{2}\right)$.

230. Перепишем заданную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x+y-z=\dfrac{4}{x+y+z}, \\ y+z-x=\dfrac{2}{x+y+z}, \\ z+x-y=\dfrac{3}{x+y+z}. \end{cases}$$

Введя подстановку $x+y+z=t$ и складывая попарно первое уравнение последней системы с третьим, первое со вторым и второе с третьим, получим

$$x=\frac{7}{2t},\ y=\frac{3}{t},\ z=\frac{5}{2t}.$$

Подставляя полученные значения x, y и z в первое уравнение заданной системы, получим уравнение для t

$$\left(\frac{7}{2t}+\frac{3}{t}\right)^2-\left(\frac{5}{2t}\right)^2=4.$$

Откуда получим $t_1=3$, $t_2=-3$.
Исходная система имеет решения.

Ответ: $\left(\frac{7}{6},\ 1,\ \frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{7}{6},\ -1,\ -\frac{5}{6}\right)$.

231. Запишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} xy(x^2+y^2)=\frac{10}{9}(x+y)^2, \\ xy(x^3+y^3)=\frac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} xy[(x+y)^2-2xy]=\frac{10}{9}(x+y)^2, \\ xy\{(x+y)[(x+y)^2-3xy]\}=\frac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$$

Введем подстановки $x+y=z$, $xy=t$, получим

$$\begin{cases} z^2t-2t^2-\frac{10}{9}z^2=0, \\ z^3t-3zt^2-\frac{2}{3}z^3=0 \end{cases} \qquad (*)$$

или

$$\begin{cases} t(z^2-2t)=\frac{10}{9}z^2, \\ tz(z^2-2t)=\frac{2}{3}z^3. \end{cases}$$

Эти системы равносильны совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} z=0, \\ t(z^2-2t)=\frac{10}{9}z^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} t(z^2-2t)=\frac{2}{3}z^2, \\ t(z^2-2t)=\frac{10}{9}z^2. \end{cases}$

Решения систем:

а) $z_1=0$, $t_1=0$ и б) $\frac{z^2-2t}{z^2-3t}=\frac{5}{3}$,

$$t=\frac{2}{9}z^2.$$

Подставляя значение t в уравнение (*), получим уравнение относительно z

$$\frac{10}{81}z^4-\frac{10}{9}z^2=0.$$

Откуда найдем

$$z_2=-3,\ z_3=3,$$
$$t_2=2;\quad t_3=2.$$

Относительно x и y получаем системы:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ xy=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$

Ответ: $(0, 0)$; $(-2, -1)$, $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$.

232. Введем подстановки

$$xy=z, \quad \frac{x}{y}=t.$$

Выполняя почленное деление этих равенств, получим

$$y^2=\frac{z}{t} \quad \text{и} \quad x^2=zt.$$

Тогда исходная система перепишется в таком виде

$$\begin{cases} z+24=t^2z, \\ zt^2-6t^2=z. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} t_1=-2, \\ z_1=8; \end{cases} \quad \begin{cases} t_2=2, \\ z_2=8; \end{cases}$$

t_1 и z_1 вещественных решений не дают.

Воспользовавшись значениями $t_2=2$ и $z_2=8$, получим относительно x и y систему

$$\begin{cases} xy=8, \\ \frac{x}{y}=2, \end{cases}$$

которая выполняется при $x_1=-4$, $y_1=-2$, $x_2=4$, $y_2=2$.

Ответ: $(-4, -2)$, $(4, 2)$.

233. Представим заданную систему в таком виде:

$$\begin{cases} xy+xz=\frac{2}{z}, \\ xy+2xz=-z, \\ (xz)(yz)=-15 \end{cases}$$

($z\neq 0$, что следует из третьего уравнения заданной системы). Или, произведя вычитание и сложение первого и второго уравнений, получим

$$\begin{cases} xz=-z-\frac{2}{z}, \\ xy=\frac{4}{z}+z, \\ (xz)(xy)=-15. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно z, подставляя из первого и второго уравнений значения xz и xy в третье уравнение. Получим

$$\left(-z-\frac{2}{z}\right)\left(\frac{4}{z}+z\right)=-15,$$

или

$$z^4-9z+8=0.$$

Корни этого уравнения

$$z_1=-1,\ z_2=1,\ z_3=-\sqrt{8},\ z_4=\sqrt{8},$$

x и y находим соответственно из первого и второго уравнений последней системы.

Ответ: $\left(-3, \frac{15}{9}, -1\right)$, $\left(-3, -\frac{15}{9}, 1\right)$, $\left(-\frac{5}{4}, \frac{12\sqrt{2}}{5}, -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{4}, \frac{-12\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

234. Введем новые вспомогательные неизвестные

$$\frac{x+2y}{xy}=z,\ \frac{x-2y}{xy}=t.$$

И заменим данную систему системой

$$\begin{cases} z^2-2z+1=0, \\ t^2-4t+1=0. \end{cases}$$

Находим

$$z_{1,2}=1,\ t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Далее для получения x и y решим системы:

а) $\begin{cases} \frac{x+2y}{xy}=1, \\ \frac{x-2y}{xy}=2-\sqrt{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+2y}{xy}=1, \\ \frac{x-2y}{xy}=2+\sqrt{3}. \end{cases}$

Ответ: $\left[2(\sqrt{3}+1), \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[-2(\sqrt{3}-1), \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right]$.

235. Вычтем из первого уравнения третье

$$(x-z)(x+z-2y)=0.$$

Тогда можно получить две системы эквивалентные заданной:

а) $\begin{cases} x-z=0, \\ y^2-2zx=2, \\ z^2+2xy=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+z-2y=0, \\ y^2-2zx=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$

Решая последние системы, получим

Ответ: $\left(-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{7}}, \frac{2\sqrt{2}-6}{\sqrt{28\sqrt{2}-35}}, -\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{7}}\right)$;

$\left(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{7}}, \frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{28\sqrt{2}-35}}, \sqrt{\frac{4\sqrt{2}-5}{7}}\right)$,

$(1, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$.

236. $(0, a)$, $(a, 0)$. **237.** $(3, 2)$, $(-3, -2)$. **238.** $(-2, -2)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **239.** $(1, 2, -2)$, $(1, -2, 2)$, $(2, 1, -2)$, $(2, -2, 1)$, $(-2, 1, 2)$, $(-2, 2, 1)$. **240.** $(0, -1, 3)$, $(0, 3, -1)$, $(-1, 0, 3)$, $(-1, 3, 0)$, $(3, 0, -1)$, $(3, -1, 0)$. **241.** При $a=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$. **242.** $(0, 0)$. **243.** $(4, 1)$, $(1, 4)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$. **244.** $(3, 1)$ $(1, 3)$. **245.** $(1, -2)$, $(-2, 1)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$.

5°. Иррациональные уравнения и неравенства

246. Допустимые значения неизвестного удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 5x-1 \geqslant 0, \\ 3x-2 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \end{cases} \text{ т. е. } x \geqslant 1.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$(\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2})^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

или

$$5x-1-2\sqrt{(5x-1)(3x-2)}+3x-2=x-1,$$

откуда после упрощения получим

$$7x-2=2\sqrt{(5x-1)(3x-2)}.$$

Возводя снова это уравнение в квадрат, приходим к уравнению

$$49x^2-28x+4=4(5x-1)(3x-2)$$

или

$$11x^2-24x+4=0,$$

откуда

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{2}{11}.$$

Число $x = 2$ принадлежит ОДЗ уравнения; непосредственной подстановкой этого числа в уравнение убеждаемся, что оно является его корнем. Число $x = \frac{2}{11}$ не удовлетворяет условию $x \geqslant 1$ и, следовательно, не принадлежит ОДЗ данного уравнения, а потому не может быть его корнем.

Ответ: $x = 2$.

247. Данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 5x - 2\sqrt{6x^2 + 5x - 25} = 4, \\ 2x + 5 > 3x - 5 \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\sqrt{6x^2 + 5x - 25} = 5x - 4, \\ \frac{5}{3} \leqslant x < 10. \end{cases}$$

Так как при $x \geqslant \frac{5}{3}$, $5x - 4 > 0$, то последняя смешанная система эквивалентна такой:

$$\begin{cases} 4(6x^2 + 5x - 25) = 25x^2 - 40x + 16, \\ \frac{5}{3} \leqslant x < 10 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 - 60x + 116 = 0, \\ \frac{5}{3} \leqslant x < 10. \end{cases}$$

Решая уравнение, находим $x_1 = 58$ и $x_2 = 2$. Так как только $x = 2$ удовлетворяет условию $\frac{5}{3} \leqslant x < 10$, то данное уравнение имеет только один корень.

248. $x = 5$. **249.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. **250.** $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. **251.** $x = 8$. **252.** $x = 7$. **253.** $x = 2$. **254.** $x = \frac{14 + 2\sqrt{15}}{3}$. **255.** $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 2$. **256.** Нет корней. **257.** $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{9}{2}$.

258. Для этого уравнения ОДЗ будет $2 \leqslant x \leqslant 6$. Перепишем уравнение в виде

$$(\sqrt[4]{6-x}+\sqrt[4]{x-2})^2=2,$$

откуда

$$\sqrt[4]{6-x}+\sqrt[4]{x-2}=\sqrt{2}.$$

Положим $\sqrt[4]{6-x}=u$, $\sqrt[4]{x-2}=v$.
Тогда последнее уравнение сводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} u+v=\sqrt{2}, \\ u^4+v^4=4. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $u^2+v^2=2-2uv$.
Преобразуя второе уравнение с учетом первого, имеем

$$(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=4$$

или

$$(2-2uv)^2-2u^2v^2=4,$$

наконец

$$(uv)^2-4uv=0.$$

Решив это уравнение, придем к двум системам:

$$\begin{cases} uv=0, \\ u+v=\sqrt{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} uv=4, \\ u+v=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решаем первую систему. Находим $v_1=0$, $u_1=\sqrt{2}$, $v_2=\sqrt{2}$, $u_2=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=6$. Проверка показывает, что x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

Вторая система в области действительных значений решения не имеет.

259. $x=\frac{5}{3}$. **260.** $x_1=\dfrac{1+(2+\sqrt{3})^4}{-1+(2+\sqrt{3})^4}$,

$x_2=\dfrac{1+(2-\sqrt{3})^4}{-1+(2-\sqrt{3})^4}$.

261. Исключим радикалы введением вспомогательных неизвестных

$$\sqrt[3]{13-x}=v, \quad \sqrt[3]{22+x}=u.$$

Получим уравнение $v+u=5$. Кроме того, по определению корня из предыдущих равенств имеем

$$v^3=13-x, \quad u^3=22+x.$$

Остается решить систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} v+u=5, \\ v^3=13-x, \\ u^3=22+x. \end{cases}$$

Складывая второе и третье уравнения, получим

$$v^3+u^3=35.$$

Упростим это уравнение с учетом первого уравнения системы

$$(u+v)(u^2-uv+v^2)=35; \quad u^2-uv+v^2=7;$$
$$(u+v)^2-3uv=7; \qquad uv=6.$$

Получим систему

$$\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$u_1=2, \quad v_1=3,$$
$$u_2=3, \quad v_2=2$$

и, наконец, $x_1=-14$, $x_2=5$.
Проверка показывает, что x_1 и x_2 являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1=-14$, $x_2=5$.

262. Указание. Обозначим

$$\sqrt[3]{x+2}=u, \quad \sqrt{x+1}=v.$$

Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} u+v=3, \\ v^2-u^3=3, \\ v\geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x=3$.

263. Указание.

$$\sqrt{x}=u\geqslant 0, \quad \sqrt{1-x}=v\geqslant 0, \quad \sqrt{x-\sqrt{1-x}}=w\geqslant 0.$$

Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} u+w=1, \\ v^2=1-u^2, \\ w^2=u^2-v. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{16}{25}$.

264. Указание. Обозначить $2x-5=z^2$, тогда уравнение принимает вид

$\sqrt{z^2+2z+1}+\sqrt{z^2+6z+9}=14$ или $|z+1|+|z+3|=14$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=15$.

265. $x_1=-1$, $x_2=7$.

266. Положим

$$\sqrt[4]{77+x}=u, \quad \sqrt[4]{20-x}=v.$$

Уравнение сводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$u^2+v^2=25-2uv.$$

Преобразуем второе уравнение с учетом первого. Имеем

$$(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=97,$$

$(25-2uv)^2-2u^2v^2=97$, наконец, $(uv)^2-50uv+264=0$.

Решив это уравнение, придем к двум системам:

$$1)\ \begin{cases} u+v=5, \\ uv=6; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} u+v=5, \\ uv=44. \end{cases}$$

Решаем первую систему. Используя теорему Виета, заключаем, что u и v являются корнями уравнения $t^2-5t+6=0$, т. е. $u_1=3$ $v_1=2$, $u_2=2$ $v_2=3$, откуда $x_1=4$, $x_2=-61$. Проверка показывает, что x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

Вторая система в области действительных значений решения не имеет.

Ответ: $x_1=4$, $x_2=-61$.

267. $x_1=16$, $x_2=81$. **268.** $x_1=4$, $x_2=548$. **269.** $x=4416$. **270.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$. **271.** $x_1=3\sqrt{21}$, $x_2=-3\sqrt{21}$. **272.** $x_1=1$, $x_2=32$. **273.** $x_1=3$, $x_2=-24$, $x_3=-88$. **274.** $x_1=1$, $x_2=2$.

275. Полагая $\sqrt{1-x^2}=y$, получим

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=1, \\ y\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим систему (1); имеем

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

так, что эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ a^2-2xy=1, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$$

т. е. x и y корни уравнения

$$\lambda^2-a\lambda+\frac{a^2-1}{2}=0$$

при условии, что оба корня действительны и по крайней мере один из них не отрицателен.
Дискриминант этого уравнения

$$D=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2-1}{2}=\frac{2-a^2}{4};$$

корни действительны, если $|a|\leqslant\sqrt{2}$. Они будут оба отрицательны, если $a^2-1>0$, $a<0$, т. е. если $-\sqrt{2}\leqslant a<-1$. При этом условии данное уравнение не имеет корней. Если $a=-1$, то $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ и, значит, x — отрицательный корень, т. е.

$$x=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Если $a=1$, то $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, и уравнение имеет два корня: $x_1=0$ $x_2=1$.

Если $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то $a^2-1>0$, $a>0$—оба корня положительны, и уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Ответ: если $a<-1$, решений нет; если $a=-1$, $x=-1$; если $-1<a<0$, $x=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$; если $a=1$, $x_1=0$, $x_2=1$; если $1<a\leqslant\sqrt{2}$, $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$; если $a>2$, решений нет.

276. Так как $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}>0$ при всех значениях x, то данное уравнение не имеет решения, если $a\leqslant 0$. Будем считать, что $a>0$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{|x|+1}=\sqrt{|x|}+a.$$

Так как при любом значении $x\,(a>0)$ левая и правая части — положительные числа, то это уравнение эквивалентно тому, которое получим, возводя обе части последнего уравнения в квадрат $|x|+1=|x|+2a\sqrt{|x|}+a^2$ или

$$2a\sqrt{|x|}=1-a^2.$$

Так как при любом значении x (и $a>0$) левая часть неотрицательна, то уравнение не имеет решения, если $a>1$. Будем считать $0<a\leqslant 1$. Тогда последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$4a^2|x|=(1-a^2)^2,$$

откуда

$$|x|=\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$$

и, следовательно,

$$x_{1,2}=\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}. \qquad (1)$$

Итак, если $0<a<1$, то данное уравнение имеет 2 решения.

Если $a=1$, то уравнение имеет корень $x_3=0$.

277. Полагая $\sqrt{x^2-1}=u$, $\sqrt{x^2-2}=v$, получим

$$\begin{cases} u+v=a, \\ u^2-v^2=1, \\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0. \end{cases}$$

Если $a=0$, то эта система несовместна.

Считая $a\neq 0$, находим

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{1}{a}, \\ u=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right), \\ v=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right). \end{cases}$$

Решая систему неравенств

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 0,\quad a-\frac{1}{a}\geqslant 0,$$

находим

$$a \geqslant 1.$$

При этих значениях a

$$x^2 - 1 = u^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2,$$

$$x^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2,$$

$$x = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}.$$

278. Если $-1 \leqslant a < 0$ и $a \geqslant 1$,

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

для всех других значений a уравнение не имеет корней.

279. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$.

Указание. Освободившись от иррациональности, свести данное уравнение к квадратному относительно параметра a. Решая это уравнение, получаем $a = x^2 - x$, $a = x^2 + x + 1$.

Замечание. Условия разрешимости уравнения для различных значений параметра a предлагается найти читателю.

280. Полагая $\sqrt{x} = u$, $a - \sqrt{x} = v$, получим

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 1, \\ u + v = a, \\ u \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Имеем

$u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2(uv)^2 = [(u + v)^2 - 2uv]^2 - 2(uv)]^2 = 1$

и система (1) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (a^2 - 2uv)^2 - 2(uv)^2 = 1, \\ u + v = a, \\ u \geqslant 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(uv)^2 - 4a^2uv + a^4 - 1 = 0, \\ u + v = a, \\ u \geqslant 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения относительно uv равен

$$D = (2a^2)^2 - 2(a^4 - 1) = 2a^4 + 2 > 0.$$

Значит, это уравнение всегда имеет действительные корни:

$$uv=\frac{2a^2\pm\sqrt{2a^4+2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}\pm\sqrt{a^4+1}}{\sqrt{2}}=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+1}{2}};$$

u и v являются корнями одного из квадратных уравнений:

$$z^2-az+a^2+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=0, \tag{2}$$

$$z^2-az+a^2-\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}=0. \tag{3}$$

Корни первого уравнения — мнимые. Остается исследовать корни второго. Его дискриминант

$$D=\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}$$

будет неотрицателен, если $a^4\leqslant 8$, т. е. $|a|\leqslant\sqrt[4]{8}$. При этом свободный член уравнения будет положителен тогда и только тогда, когда $a^2-\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}>0$,

$$|a|>1.$$

Итак,

1) Если $-\sqrt[4]{8}\leqslant a<-1$, то корни уравнения (3) действительны, одного знака, но оба отрицательны и, значит, данное уравнение не имеет корней.

2) Если $a=-1$, то $\sqrt{x}=0$, $x=0$.

3) Если $-1<a<1$, то корни разных знаков; u — положительный корень:

$$u=\frac{a}{2}+\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}},$$

$$x=\left[\frac{a}{2}+\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}}\right]^2.$$

4) Если $a=1$, то $\sqrt{x}=0$ $x_1=0$, $\sqrt{x}=1$, $x_2=1$.

5) Если $1<a\leqslant\sqrt[4]{8}$, то оба корня уравнения (3) положительны.

$$\sqrt{x}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}}$$

$$x_{1,2}=\left[\frac{a}{2}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}-\frac{3a^2}{4}}\right]^2.$$

281. Если $|a| \geqslant 2\sqrt{2}$, то

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4-4\sqrt{1+a^2}}}{2},$$

если $|a| < 2\sqrt{2}$, то корней нет.

282. $x = \frac{25}{16}$.

283. Для этого уравнения ОДЗ будет: $x \geqslant 1$. Возведем в квадрат правую и левую части уравнения

$$x-1+x^2-1+2\sqrt{(x-1)(x^2-1)} = x^3,$$

или

$$2\sqrt{(x-1)(x^2-1)} = x^3-x^2-x+1+1 = x^2(x-1)-$$
$$-(x-1)+1 = (x-1)(x^2-1)+1.$$

Введем обозначение

$$\sqrt{(x-1)(x^2-1)} = t > 0.$$

Тогда

$$t^2-2t+1=0 \text{ и } t=1.$$

Откуда

$$(x-1)(x^2-1) = 1$$

или

$$x^3-x^2-x+1=1.$$

Значит

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

x_1 и x_3 не удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

284. Указание. Ввести обозначение $\sqrt{\frac{7-x}{x-5}} = u$.

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 7$.

285. Указание.

$$\frac{5x^2-10x+1}{x^2+6x+11} = \frac{5(x-2)^2+10(x-2)+1}{(x-2)^2+10(x-2)+5}.$$

Обозначить $\sqrt{x-2} = y$.

Тогда

$$y = \frac{5y^4+10y^2+1}{y^4+10y^2+5};$$

или

$$(y-1)^5 = 0, \quad y=1 \text{ и } x=3.$$

286. $-1 < x < 15$. **287.** $-2\sqrt{13} \leqslant x < -4$; $2 < x \leqslant 2\sqrt{13}$. **288.** $-5 \leqslant x < -1$, $x > 1$. **289.** $-6 \leqslant x < 0$, $3 < x \leqslant 4$.

290. Перепишем неравенство так: $\sqrt{x^2-3x+2} > 3+x$. Это неравенство эквивалентно 2-м системам неравенств:

1) $\begin{cases} x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ 3+x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3x+2 > (3+x)^2, \\ 3+x \geqslant 0. \end{cases}$

Для второй системы нет необходимости писать условие положительности выражения под знаком радикала (ОДЗ), так как $x^2-3x+2 > (3+x)^2 > 0$ и это требование выполняется автоматически.

Решаем систему (1). Решением квадратного неравенства системы являются значения x: $-\infty < x \leqslant 1$; $2 \leqslant x < \infty$. Решением второго неравенства системы является $x < -3$. Общее решение системы есть $-\infty < x < -3$.

Решаем систему (2). Решением первого неравенства системы является $-\infty < x < -\frac{7}{9}$. Решением второго неравенства системы является $-3 \leqslant x < \infty$. Общее решение второй системы есть

$$-3 \leqslant x < -\frac{7}{9}.$$

Решение системы (1) и (2) можно объединить и получить общее решение исходного неравенства.

Ответ: $-\infty < x < -\frac{7}{9}$.

291. Нет решения. **292.** $-\sqrt{13} < x \leqslant 1$, $2 \leqslant x < \sqrt{13}$.

293. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1}$$

или

$$x(\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1) < 0.$$

Отметим, что радикалы будут действительными числами тогда и только тогда, когда $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Рассмотрим два случая:

1) $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$, тогда $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1 > 0$;

2) $x > 0$, тогда $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1 < 0$.

1) Решим неравенство $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1>0$, или

$$\sqrt{1+2x}+1>\sqrt{2x+9}.$$

Оно эквивалентно следующему:

$$1+2x+2\sqrt{1+2x}+1>2x+9$$

или

$$2\sqrt{1+2x}>7,$$

отсюда

$$x>\frac{45}{8},$$

а это противоречит условию

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<0.$$

2) Решая неравенство $\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x+9}+1<0$, получим $x<\frac{45}{8}$, но так как во втором случае мы считаем, что $x>0$, то все решения данного неравенства

$$0<x<\frac{45}{8}.$$

294. $-1\leqslant x\leqslant 3$.

295. Данное неравенство эквивалентно следующему: $\sqrt{x-5}\geqslant 1+\sqrt{9-x}$ или следующей системе:

$$\begin{cases} x-5\geqslant 10-x+2\sqrt{9-x}, \\ 5\leqslant x\leqslant 9 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x-15\geqslant 2\sqrt{9-x}, \\ 5\leqslant x\leqslant 9. \end{cases}$$

Если $5\leqslant x\leqslant\frac{15}{2}$, то $2x-15<2\sqrt{9-x}$.

Поэтому последняя система эквивалентна такой:

$$\begin{cases} 2x-15\geqslant 2\sqrt{9-x}, \\ \frac{15}{2}<x\leqslant 9, \end{cases}$$

или такой

$$\begin{cases} 4x^2-60x+225\geqslant 4(9-x), \\ \frac{15}{2}<x\leqslant 9, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4x^2-56x+189\geqslant 0, \\ \frac{15}{2}<x\leqslant 9. \end{cases}$$

Корни уравнения $4x^2-56x+189=0$ таковы:

$$x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Так как $\frac{14-\sqrt{7}}{2}<\frac{15}{2}$, $9>\frac{14+\sqrt{7}}{2}>\frac{15}{2}$, то все решения данного неравенства

$$\frac{14+\sqrt{7}}{2}\leqslant x\leqslant 9.$$

296. Неравенство имеет следующую ОДЗ

$$-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}.$$

Перепишем данное неравенство так:

$$\sqrt{8-x^2}\geqslant x+\sqrt{25-x^2}. \qquad (1)$$

Если $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$, то правая часть этого неравенства положительна. В самом деле, при условии $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ наименьшее ее значение равно

$$-2\sqrt{2}+\sqrt{25-8}=\sqrt{17}-2\sqrt{2}>0.$$

Значит, неравенство (1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 8-x^2\geqslant x^2+2x\sqrt{25-x^2}+25-x^2, \\ -2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 17+x^2\leqslant -2x\sqrt{25-x^2}, \\ -2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Среди значений $0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ нет решений этой системы. Поэтому, предполагая, что $-2\sqrt{2}\leqslant x<0$, заключаем, что последнее неравенство, а вместе с тем и данное, эквивалентно системе

$$\begin{cases} 289+34x^2+x^4\leqslant 4x^2(25-x^2), \\ -2\sqrt{2}\leqslant x<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 5x^4-66x^2+289\leqslant 0, \\ -2\sqrt{2}\leqslant x<0, \end{cases}$$

но эта система неравенств решения не имеет. Значит, данное неравенство не имеет решения.

297. $-5\leqslant x<-\frac{9+\sqrt{61}}{8}$. **298.** $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\leqslant 1$.

299. $x\leqslant -2$, $-1\leqslant x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}$. **300.** $\frac{\sqrt{13}-5}{2}<x\leqslant 1$.

301. Исходное неравенство эквивалентно двум системам неравенств ($|x|\neq 1$):

1) $\begin{cases} |x|>1, \\ \sqrt{9-x^2}-x-1\geqslant |x|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|<1, \\ 0<\sqrt{9-x^2}-x-1\leqslant |x|. \end{cases}$

Каждая из этих систем распадается на две (считаем один раз $x>0$, другой раз $x<0$).

1, а) $\begin{cases} x>1, \\ \sqrt{9-x^2}\geqslant 2x+1; \end{cases}$ 1, б) $\begin{cases} x<-1, \\ \sqrt{9-x^2}\geqslant 1; \end{cases}$

2, а) $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<\sqrt{9-x^2}\leqslant 2x+1; \end{cases}$ 2, б) $\begin{cases} -1<x<0, \\ 0<\sqrt{9-x^2}\leqslant 1. \end{cases}$

1, а) Система эквивалентна следующей:

$\begin{cases} x>1, \\ 9-x^2\geqslant (2x+1)^2 \text{ так как } 2x+1>0, \end{cases}$

или $\begin{cases} x>1, \\ 5x^2+4x-8\leqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x>1, \\ \frac{-2-2\sqrt{11}}{5}\leqslant x\leqslant \frac{-2+2\sqrt{11}}{5}. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

1, б) Система эквивалентна следующей

$$\begin{cases} x<-1, \\ 9-x^2\geqslant 1, \end{cases} \text{ или } -2\sqrt{2}\leqslant x<-1.$$

2, а) Система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ 5x^2+4x-8\geqslant 0 \end{cases}$$

или двум следующим:

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ x\leqslant -\frac{2}{5}(1+\sqrt{11}) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0<x<1, \\ x\geqslant \frac{2}{5}(\sqrt{11}-1). \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Из второй находим:

$$\frac{2}{5}(\sqrt{11}-1) \leqslant x < 1.$$

2, б) Система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ 9-x^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x \leqslant -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений. Итак, все решения данного неравенства

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} \leqslant x < -1, \\ \frac{2}{5}(\sqrt{11}-1) \leqslant x < 1. \end{cases}$$

302. $\frac{2-\sqrt{46}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{46}-2}{2}$.

303. Указание. Неравенство эквивалентно следующим двум системам

1) $\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0, \\ -x-1 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4-x^2 > (-x-1)^2, \\ -x-1 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение системы (1): $-1 < x \leqslant 2$.

Решение системы (2): $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x \leqslant -1$.

Множество решений систем (1) и (2) можно объединить

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x \leqslant 2.$$

304. Указание. Область определения функции $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}$ определяется условиями $25-x^2 \geqslant 0$, $x^2+7x \geqslant 0$, откуда $0 \leqslant x \leqslant 5$. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x})^2 > 9,$$

или

$$2\sqrt{25-x^2}\sqrt{x^2+7x} > -16-7x.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 5$, то $-16-7x < 0$, а так как $2\sqrt{25-x^2} \times \sqrt{7x+x^2} \geqslant 0$, то последнее неравенство, эквивалентное данному, будет выполнено при всех x, таких, что $0 \leqslant x \leqslant 5$.

305. $-\infty < x \leqslant -2$, $5 \leqslant x < \frac{74}{13}$. **306.** $5 < x < \infty$, $-\infty < x < 0$. **307.** $-\infty < x < -2$, $0 < x < \infty$.

308. $x \leqslant -3$, $x > \frac{15}{4}$. **309.** $-1 \leqslant x < \frac{-5-2\sqrt{2}}{8}$; $x > \frac{-5+2\sqrt{2}}{8}$. **310.** $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

311. Радикалы будут действительны, если $x \geqslant -2$. При этом условии данное неравенство будет эквивалентно такому:

$$(\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4})^2 > 25,$$

т. е.

$$3x+13+2\sqrt{2x^2+22x+36} > 25$$

или

$$2\sqrt{2x^2+22x+36} > 12-3x.$$

Если $12-3x \leqslant 0$, т. е. $x \geqslant 4$, то это неравенство выполнено. Если же $x < 4$, то оно эквивалентно такому:

$$4(2x^2+22x+36) > 144-72x+9x^2$$

или

$$x^2-160x < 0,$$

откуда в силу условия $x < 4$ находим

$$4 > x > 0.$$

Итак, все решения данного неравенства $4 > x > 0$.

312. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\sqrt{3x-2} > \sqrt{x}+1.$$

Считая $x \geqslant \frac{2}{3}$, получим, что данное неравенство эквивалентно такому:

$$3x-2 > 1+2\sqrt{x}+x$$

или

$$2x-2\sqrt{x}-3 > 0,$$

или

$$2z^2-2z-3 > 0, \text{ где } z=\sqrt{x} \geqslant 0.$$

Корни трехчлена $2z^2-2z-3$ суть $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$, и, значит,

$$2z^2-2z-3 = 2\left(z-\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right),$$

а так как $z \geqslant 0$, то $z-\frac{1-\sqrt{7}}{2} > 0$, и, значит,

$$z > \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \quad \sqrt{x} > \frac{1+\sqrt{7}}{2},$$

$$x > \frac{4+\sqrt{7}}{2}.$$

Так как $\frac{4+\sqrt{7}}{2} > \frac{2}{3}$, то все решения данного неравенства таковы: $x > \frac{4+\sqrt{7}}{2}$.

313. Считаем $x \geqslant 1$. Переписывая данное неравенство в виде

$$\sqrt[3]{2-x} > 1-\sqrt{x-1}$$

и возводя обе части в куб, получим неравенство, эквивалентное данному:

$$2-x > (1-\sqrt{x-1})^3, \quad 1-(x-1) > (1-\sqrt{x-1})^3.$$

Полагая $\sqrt{x-1} = z$, будем иметь $1-z^2 > (1-z)^3$ или $1-z^2-(1-z)^3 > 0$.

$$(1-z)(1+z-1+2z-z^2) > 0, \quad z(z-1)(z-3) > 0,$$

откуда

$$0 < \sqrt{x-1} < 1, \quad \sqrt{x-1} > 3,$$

и

$$1 < x < 2, \quad x > 10.$$

314. $-3 \leqslant x < -4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. **315.** $x > \frac{11-3\sqrt{13}}{2}$.

316. $x > \frac{5}{4}$. **317.** $x > \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. **318.** $0 \leqslant x < \frac{16}{9}$.

319. $1 \leqslant x < \frac{-1+2\sqrt{7}}{2}$. **320.** $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$. **321.** $x > 1$, $x \neq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **322.** $1 < x < \frac{5}{4}$, $x > \frac{5}{3}$. **323.** $-1 \leqslant x < 8$.

324. Радикал является действительным числом только при следующих значениях x: $x \leqslant -2$, $x \geqslant 5$. Если $x > 8$, то исходное неравенство выполняется. Если $5 \leqslant x \leqslant 8$ или $x \leqslant -2$, то $8-x \geqslant 0$ и, значит, исходное неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} (x+2)(x-5) > (8-x)^2, \\ 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x+2)(x-5) > (8-x)^2, \\ x \leqslant -2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x > \frac{74}{13}, \\ 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > \frac{74}{13}, \\ x \leqslant -2. \end{cases}$$

Вторая система неравенств решений не имеет, а из первой вытекает, что $\frac{74}{13} < x \leqslant 8$.

Итак, все решения данного неравенства: $x < \frac{74}{13} \leqslant 8$.

325. При $a > 0$ данное неравенство эквивалентно следующему:

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2,$$

или

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a \qquad (1)$$

(заметим, что при $a > 0$ области определения функций $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ и $\sqrt{a^2 - x^2}$ совпадают: $-a \leqslant x \leqslant a$).

I случай. $a^2 - 2a < 0$, т. е. $0 < a < 2$.

Неравенство (1), следовательно, и данное неравенство выполняются для всех x из сегмента $[-a, a]$.

II случай. $a = 2$.

Неравенство (1) принимает вид

$$\sqrt{4 - x^2} > 0$$

и выполняется при всех x из интервала $(-2, 2)$, $-2 < x < 2$.

III случай. $a^2 - 2a > 0$ и неравенство (1) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 4(a^2 - x^2) > a^2(a-2)^2, \\ |x| < a, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 < a^3 \frac{4-a}{4}, \\ |x| < a. \end{cases} \qquad (2)$$

Если $a \geqslant 4$, то это неравенство решения не имеет. Будем считать, что $2 < a < 4$. Тогда первое из неравенств системы (2) выполняется при условии

$$|x| < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}.$$

Заметим, что при $2 < a < 4$ выполняется неравенство

$$\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < a.$$

В самом деле, это неравенство эквивалентно следующему:

$$\sqrt{a(4-a)} < 2, \text{ или } a(4-a) < 4,$$

или $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 > 0$.

Значит, в случае $2<a<4$ имеем $-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<$ $<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$. Ответ:

$$0<a<2, \quad -a\leqslant x\leqslant a;$$

$$a=2, \quad -2<x<2;$$

$$2<a<4; \quad -\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)};$$

$$a\geqslant 4, \text{ решений нет.}$$

326. Перепишем данное неравенство следующим образом:

$$\sqrt{a^2-(a-x)^2}\geqslant a-x$$

или, полагая $a-x=u$,

$$\sqrt{a^2-u^2}\geqslant u. \tag{1}$$

Область D определения функции $\sqrt{a^2-u^2}$ такова: $-a\leqslant$ $\leqslant u\leqslant a$. Если $-a\leqslant u<0$, или $-a\leqslant a-x<0$ или $a<x\leqslant 2a$, то неравенство $\sqrt{a^2-u^2}\geqslant u$ выполняется. Будем считать, что $0\leqslant u\leqslant a$. Тогда неравенство (1) эквивалентно такому:

$$a^2-u^2\geqslant u^2,$$

откуда

$$|u|\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}},$$

а так как $u\geqslant 0$, то $u\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$. Итак, $0\leqslant u\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$, т. е. $0\leqslant a-x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x-a\leqslant 0$$

и окончательно

$$a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leqslant x\leqslant 2a$$

327. Если $0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, то решений нет.

Если $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$, то $\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{2a^2+1}}{2}$.

Если $a=1$, то $-1<x<0$.

Если $a>1$, то $a\leqslant x<\frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

328. Уравнение $y=\sqrt{1-x^2}$ является уравнением полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат, граничными точками которой являются точки $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ и, которая проходит через точку $C(0, 1)$ (рис. 49). Уравнение $y=a-x$ есть уравнение прямой, проходящей через точку $(a, 0)$ и $(0, a)$.

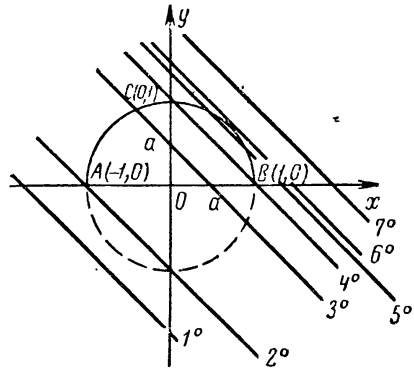


Рис. 49

1) Если $a<-1$, то неравенство решений не имеет.

2) Если $a=-1$, то неравенство также решений не имеет.

3) Если $-1<a<1$, то решая совместно систему

$$y=\sqrt{1-x^2}, \quad y=a-x,$$

или

$$x^2+y^2=1, \quad x+y=a, \quad y\geqslant 0,$$

получим

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=1, \\ x+y=a, \\ y\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=\dfrac{a^2-1}{2}, \\ x+y=a, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что x и y являются корнями уравнения

$$\lambda^2-a\lambda+\frac{a^2-1}{2}=0.$$

Пусть λ — отрицательный корень этого уравнения, т. е.

$$\lambda=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Все решения неравенства в этом случае (3):

$$-1\leqslant x<\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

4) Если $a=1$, то все решения неравенства

$$-1\leqslant x<1.$$

5) Если $1<a<\sqrt{2}$, то прямая $y=a-x$ пересекает полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ в двух точках, абсцисса которых $\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$. Все решения данного неравенства в этом случае

$$-1\leqslant x<\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2},\quad \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}<x\leqslant 1.$$

6) Если $a=\sqrt{2}$, то решением является любое число, кроме $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7) Если $a>\sqrt{2}$, то решением является любое число.

329. $\left(\frac{128}{13}, \frac{2}{13}\right)$, $\left(\frac{2}{13}, \frac{128}{13}\right)$. **330.** $(10+\sqrt{99}, 10-\sqrt{99})$, $(16, 4)$, $(4, 16)$, $(10-\sqrt{99}, 10+\sqrt{99})$. **331.** $x=\frac{2}{aR}$, $y=\frac{2}{bR}$, $z=\frac{2}{cR}$,
где $R=$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}.$$

332. $x=\frac{5}{8}a^2$, $y=a^2\sqrt{\frac{3}{8}}$. **333.** $x=\frac{5}{2}$, $y=6$.

6°. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

334. a) $\sqrt[3]{225}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, c) $\left(\frac{7}{\sqrt{13}}\right)^3$, d) $\lg c$, e) $\frac{1}{a^2}$.

335. a) На основании свойств логарифмов имеем

$$\log_{\frac{1}{2}} 28=\log_{\frac{1}{2}} 4\cdot 7=-2+\log_{\frac{1}{2}} 7=-2+\frac{1}{\log_7\frac{1}{2}}=$$

$$=-2-\frac{1}{\log_7 2}=-2-\frac{1}{a},\ \text{b)}\ \frac{17}{6},\ \text{c)}\ \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

336. $\log_5 3{,}38=\log_5\frac{13^2\cdot 2}{100}=\frac{\lg\frac{13^2\cdot 2}{100}}{\lg 5}=\frac{\lg 13^2+\lg 2-\lg 100}{\lg\frac{10}{2}}=$

$$=\frac{a+2b-2}{1-a}.$$

337. $\frac{a+1}{2a+b}$. **338.** $\frac{3-2a}{2b+a}$.

339. Используя основное логарифмическое тождество, получим

$$b^{\log_a c} = (a^{\log_a b})^{\log_a c} = (a^{\log_a c})^{\log_a b} = c^{\log_a b}.$$

340. Исходное равенство дает $a^2 = (c-b)(c+b)$. Следовательно,

$$2\log_{c+b} a = \log_{c+b}(c-b) + 1,$$
$$2\log_{c-b} a = \log_{c-b}(c+b) + 1.$$

Перемножая эти равенства, находим

$$4\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{c+b}(c-b) + \log_{c-b}(c+b) + 1 + \log_{c+b}(c-b)\cdot\log_{c-b}(c+b).$$

Но

$$\log_{c+b}(c-b)\cdot\log_{c-b}(c+b) = 1,$$

поэтому

$$4\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a - 1 + 2\log_{c-b} a + 1 + 2.$$

Окончательно

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

344. Положим $2^x = y > 0$. Тогда будем иметь $y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0$, или $(y^3+8) - 3y(y+2) = 0$. Отсюда $(y+2)\times(y^2-5y+4) = 0$. Решая это уравнение, получим $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$. Первое решение не подходит, так как $y > 0$. Следовательно, $2^x = 1$ и $2^x = 4$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

345. $x = 1$. **346.** $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$.

347. Положим $\frac{7^x + 7^{-x}}{2} = y$. Тогда будем иметь

$$2y^2 - 7y + 3 = 0.$$

Отсюда $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 3$. Следовательно, $7^x + 7^{-x} = 1$ и $7^x + 7^{-x} = 6$. Первое уравнение запишем в виде

$$t + \frac{1}{t} = 1 \quad (\text{где } t = 7^x > 0),$$

или $t^2 - t + 1 = 0$. Это уравнение действительных корней не имеет. Второе уравнение запишем в виде $t^2 - 6t + 1 = 0$. Отсюда $t_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} + 3$. Следовательно, $7^x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, т. е.

$$x_{1,2} = \log_7(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

348. $x=-3$.

349. Положим $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$, так как

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}},$$

то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{y}$ и данное уравнение запишется так: $y+\frac{1}{y}=4$, или $y^2-4y+1=0$.

Его корни $y_1=2-\sqrt{3}$; $y_2=2+\sqrt{3}$. Отсюда

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2,\ x_1=2,$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}$$

$$x_2=-2.$$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-2$.

350. $x_1=2$, $x_2=\log_3 2-4$. **351.** $x=-2$. **352.** $x_1=1$, $x_2=\log_{\frac{2}{3}} 9$. **353.** $x=\log_{\frac{2}{3}} 3$.

354. Разделим обе части уравнения на $9^{-\frac{1}{x}}>0$. Тогда будем иметь $y^2+y-1=0$, где $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}>0$. Отсюда $y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Второе решение не подходит. Следовательно, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, откуда $x=\log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\frac{3}{2}$.

355.

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{если } x>3,\\ 3-x, & \text{если } x\leqslant 3.\end{cases}$$

1) $x>3$. Тогда уравнение имеет вид

$$x^2\cdot 2^{x+1}+2^{x-1}=x^2\cdot 2^{x+1}+2^{x-1},$$ т. е. все $x>3$

являются решением.

2) $x\leqslant 3$. Тогда уравнение имеет вид

$$x^2\cdot 2^{x+1}+2^{5-x}=x^2\cdot 2^{7-x}+2^{x+1},$$

или

$$x^2 \cdot 2^{x+1}(1-2^{6-2x}) - 2^{x-1}(1-2^{6-2x}) = 0,$$

откуда $(1-2^{6-2x}) \cdot 2^x \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$, т. е. $x_1 = 3$, $x_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$.

356. $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x = -1$.

357. Перепишем данное уравнение в виде

$$9^{|x|} = 2^{|x+1|+|x-1|}.$$

Корни многочленов x, $x+1$, $x-1$, таковы 0, -1, 1. Естественно поэтому рассмотреть следующие случаи:

1) $x \leqslant -1$; уравнение принимает вид $9^{-x} = 2^{-x-1-x+1}$, или $9^x = 4^x$. Отсюда $x = 0$. Это противоречит условию $x \leqslant -1$. Таким образом, уравнение не имеет корней, меньших или равных -1.

2) $-1 < x \leqslant 0$. В этом случае уравнение принимает вид:

$$9^{-x} = 2^{x+1-x+1}, \text{ или } 3^{-2x} = 2^2.$$

Отсюда $x = -\log_3 2$. Так как число $-\log_3 2 < 0$ и так как

$$-\log_3 2 - (-1) = 1 - \log_3 2 = \log_2 \frac{3}{2} > 0,$$

то $-\log_3 2 > -1$. Таким образом, при $-1 < x \leqslant 0$ уравнение имеет корень

$$x = -\log_3 2.$$

3) $0 < x \leqslant 1$. В этом случае уравнение принимает вид

$$9^x = 2^{x+1-x+1}, \text{ или } 3x = 2.$$

Отсюда $x = \log_3 2$. Так как $0 < \log_3 2 < 1$, то $x = \log_3 2$ корень данного уравнения.

4) $x > 1$. В этом случае данное уравнение примет вид $9^x = 2^{x+1+x-1}$, или $3^x = 2^x$, откуда $x = 0$. Таким образом, при $x > 1$ данное уравнение не имеет корней. Ответ: $x_1 = -\log_3 2$, $x_2 = \log_3 2$.

358. Перепишим неравенство так:

$5 \cdot 5^{2x} + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 6 > 0$, или

$5(5^{2x} - 6) - 6^x(5^{2x} - 6) > 0$, откуда $(5^{2x} - 6)(5 - 6^x) > 0$.

Это неравенство эквивалентно 2 системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 5^{2x} - 6 > 0, \\ 5 - 6^x > 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5^{2x} - 6 < 0, \\ 5 - 6^x < 0. \end{cases}$$

Решаем 1-ю систему

а) $5^{2x} > 6 = 5\log_5 6$; $2x > \log_5 6$, т. е. $x > \frac{1}{2}\log_5 6$;

б) $5 - 6^x > 0$, $6^x < 5 = 6^{\log_6 5}$, т. е. $x < \log_6 5$, так как $\frac{1}{2}\log_5 6 < \log_6 5$, то $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

Вторая система решений не имеет. Ответ: $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

359. $x \geqslant \sqrt{\log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $x \leqslant -\sqrt{\log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

360. Перепишем неравенство так:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} \leqslant 0.$$

Разделим обе части неравенства на $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x > 0$. При этом знак неравенства не изменится.

$$2^{x-\sqrt{x}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}-x} - 3 \leqslant 0.$$

Обозначая $2^{x-\sqrt{x}}$ через y, получим $y - \frac{4}{y} - 3 \leqslant 0$, или $y^2 - 3y - 4 \leqslant 0$, так как $y > 0$ всегда. Это неравенство справедливо для всех y из интервала $[-1, 4]$, откуда $0 < y \leqslant 4$. Подставляя сюда $2^{x-\sqrt{x}}$ вместо y, получаем, что исходное неравенство будет справедливо для всех x, удовлетворяющих неравенству $x - \sqrt{x} \leqslant 2$, откуда получаем $x \leqslant 4$.

361. $x > 1$, $0 < x < \log_2 \frac{4}{3}$. **362.** $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$.

363. Перепишем это неравенство так:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-(\log_2 x)^2} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-2\left(2+\log_{\sqrt{2}} x\right)}.$$

Из свойств показательной функции следует, что это неравенство равносильно следующему:

$$1 - (\log_2 x)^2 < -4 - 2\log_{\sqrt{2}} x.$$

Поскольку $\log_{\sqrt{2}} x = 2\log_2 x$, то его можно переписать так:

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0$$

или, обозначая $\log_2 x$ через y,

$$y^2-4y-5>0.$$

Решение последнего неравенства: $y<-1$ и $y>5$. Из неравенства $\log_2 x<-1$ следует, что $0<x<\frac{1}{2}$, а из $\log_2 x>5$ следует $x>32$. Ответ: $0<x<\frac{1}{2}$, $x>32$.

364. Используя свойство логарифмов, преобразуем выражение $2^{15\log_2\sqrt{2}\sqrt{3}}$

$$2^{15\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}}=2^{15\log_{2^{\frac{3}{2}}}3^{\frac{1}{2}}}=2^{15\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_2 3}=2^{5\log_2 3}=3^5.$$

Перепишем неравенство так: $3^{\log_3 x^3}>3^{5+\log_{\sqrt{x}}3}$.
Из свойств показательной функции следует, что это неравенство равносильно следующему:

$$\log_3 x^3>5+\log_{\sqrt{x}}3,\ x>0.$$

Обозначая $\log_3 x=t$, получим $3t-5-\frac{2}{t}>0$, или $\frac{(t-2)\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t}>0$. Решение этого неравенства:

$$t>2 \text{ и } -\frac{1}{3}<t<0.$$

Из первого неравенства $\log_3 x>2$ следует, что $x>9$, а из второго $-\frac{1}{3}<\log_3 x<0$ следует $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<1$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<x<1$, $x>9$.

365. $x<\frac{1}{5}$, $1<x<\sqrt[4]{5}$.

366. $x>\log_2\frac{1}{9}$.

367. Квадратный трехчлен x^2+x+1 положителен для любых действительных x, так как он не имеет действительных корней. Поэтому ОДЗ этого неравенства — все действительные числа. Так как свойства показательной функции зависят от того, больше или меньше единицы ее основание, то необходимо рассмотреть два случая.

1) Предположим, что $x^2+x+1<1$. Это будет выполнено для всех x из промежутка $-1<x<0$. Для всех этих x трехчлен x^2+x+1 возводится в отрицательную степень. И так как для этих x трехчлен $x^2+x+1<1$, то для них $(x^2+x+1)^x>1$, что противоречит условию. Значит эти x не могут дать решение задачи.

2) Предположим, что $x^2+x+1>1$. Это будет выполнено для $x>0$ и для $x<-1$. Поэтому здесь придется рассмотреть два случая:

а) Пусть $x>0$. Тогда $x^2+x+1>1$, и после возведения в положительную степень x знак неравенства сохранится, т. е. для этих x имеем $(x^2+x+1)^x>1$. Значит, эти x также не могут дать решения задачи.

б) Пусть $x<-1$, тогда $x^2+x+1>1$. Если теперь трехчлен x^2+x+1 возвести в отрицательную степень x, то он станет меньше единицы, т. е. для всех $x<-1$ имеем $(x^2+x+1)^x<1$. Значит, решением исходного неравенства будут все $x<-1$.

368. $-1<x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$. **369.** $x<0$, $0<x<1$. **370.** $\frac{1}{2}<x<1$, $-3<x<-1$. **371.** $1<x<2$. **372.** $x=\log_2 3$. **373.** $x=2$. **374.** $x=\frac{3}{2}$. **375.** $x=4\log_3 2$.

376. Найдем ОДЗ этого уравнения; x удовлетворяет системе неравенств $3^x-1>0$ и $3^{x+1}-3>0$, откуда $x>0$. Используя свойства логарифмов, перепишем это уравнение так

$$\log_3^2(3^x-1)+\log_3(3^x-1)-6=0,$$

откуда $\log_3(3^x-1)=-3$ или $\log_3(3^x-1)=2$. Решая первое и второе уравнения, получим

$$x_1=\log_3 28-3,\quad x_2=\log_3 10.$$

377. $x_1=0$, $x_2=1$. **378.** Уравнение не имеет корней. **379.** $x=-1$. **380.** $x=3$. **381.** ОДЗ этого уравнения состоит из значений x, удовлетворяющих неравенствам $x-1>0$, $x+1>0$, $7-x>0$, т. е. $1<x<7$.

Используя соотношение $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=2\log_{\frac{1}{2}}(7-x)$, получим уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{(7-x)^2}=1.$$

Отсюда $x_1=3$, $x_2=-17$. Корень уравнения $x=-17$ не входит в ОДЗ исходного уравнения и является посторонним. Ответ: $x=3$.

382. $x=-25$. **383.** $x=32$. **384.** $x_1=8$, $x_2=\frac{1}{2}$. **385.** $x=4$. **386.** $x=1$. **387.** $x=\frac{5}{2}$.

388. Считая далее, что $x\neq 1$, воспользуемся правилом перехода, взяв x в качестве нового основания логарифмов:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0{,}5x}-\frac{14\log_x x^3}{\log_x 16_x}+\frac{40\log_x \sqrt{x}}{\log_x 4x}=0.$$

Легко видеть, что исходное уравнение удовлетворяется при $x_1=1$. Итак, один корень найден $x_1=1$.

Далее, пользуясь свойствами логарифмов и обозначая $\log_x 2$ через y, будем иметь:

$$\frac{2}{1-y}-\frac{42}{1+4y}+\frac{20}{1+20y}=0.$$

Это уравнение приводится к квадратному $2y^2+3y-2=0$, корни которого $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=-2$. Тогда получим $\log_x 2=\frac{1}{2}$, откуда $x^{\frac{1}{2}}=2$, т. е. $x=4$ и $\log_x 2=-2$, откуда $x^{-2}=2$, т. е. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как $x>0$, берем только положительное решение). Оба эти значения 4 и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ являются корнями исходного уравнения. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой их в уравнение.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

389. $x=3$.

390. $x_1=2$, $x_2=8$.

391. Определим ОДЗ уравнения

$$x>0,\quad x\neq 1,\quad \log_x\sqrt{7x}\geqslant 0.$$

Считая, что x принадлежит этой области, выполним следующие преобразования:

$$\log_x\sqrt{7x}=\frac{1}{2}(\log_x 7+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_7 x}+1\right);$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_7 x}+1\right)}=-\frac{1}{\log_7 x}.$$

Вводя обозначение $\frac{1}{\log_7 x}=t$, получим $\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)}=-t$.

Поскольку $t\neq 0$ и левая часть этого уравнения (как арифметический корень) неотрицательна, то t удовлетворяет условию $-t>0$, т. е. условию

$$t<0. \qquad (*)$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, получим

$$\frac{1}{2}(t+1)=t^2,$$

$$2t^2-t-1=0.$$

Отсюда $t_1=1>0$ не удовлетворяет условию (*), $t_2=-\frac{1}{2}<0$ условию (*) удовлетворяет. Итак $\frac{1}{\log_7 x}=-\frac{1}{2}$, откуда $\log_7 x=-2$, $x=\frac{1}{49}$. Выясним, является ли значение $x=\frac{1}{49}$ допустимым для заданного уравнения:

$$x=\frac{1}{49}>0, \quad x=\frac{1}{49}\neq 1$$

и

$$\log_x \sqrt{7x}=\log_{\frac{1}{49}}\sqrt{\frac{1}{7}}=\frac{1}{2}\left(-\log_{\frac{1}{49}}7\right)=\frac{1}{4}>0.$$

Условия выполнены, значит, число $x=\frac{1}{49}$ входит в область определения заданного уравнения.

392. $x=\frac{1}{a^2}$ ($x=a$ уравнению не удовлетворяет).

393. ОДЗ этого уравнения состоит из значений x, удовлетворяющих неравенствам

$$x>0,\ x\neq 1,\ x\neq\frac{1}{a},\ x\neq\frac{1}{a^2}.$$

Преобразуем $\log_{ax} a$ и $\log_{a^2x} a$:

$$\log_{ax} a=\frac{1}{\log_a ax}=\frac{1}{1+\log_a x}=\frac{\log_x a}{1+\log_x a};$$

$$\log_{a^2x} a=\frac{1}{\log_a a^2x}=\frac{1}{2+\log_a x}=\frac{\log_x a}{1+2\log_x a}.$$

Обозначая $\log_x a$ через t ($t\neq 0$, так как $a\neq 1$), приведем исходное уравнение к виду $2t+\frac{t}{1+t}+\frac{3t}{1+2t}=0$, или

$4t^2+11t+6=0$. Решая последнее уравнение, получим $t_1=-\frac{3}{4}$, $t_2=-2$. Значит $\log_x a=-\frac{3}{4}$, откуда $x_1=a^{-\frac{4}{3}}$ и $\log_x a=-2$, откуда $x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

394. $x_1=a$, $x_2=\frac{1}{a}$, $x_3=a^2$. **395.** $x=2$. **396.** $0\leqslant x\leqslant 1$, $x=2$. **397.** $0<x<1$, $1<x\leqslant 2$, $x=2{,}5$. **398.** $x=\frac{1}{16}$, $x\geqslant 4$. **399.** $x>-\frac{1}{2}$. **400.** $1<x<3$. **401.** $1<x<\frac{11}{10}$. **402.** $3<x<7$.

403. ОДЗ этого неравенства состоит из значений x, удовлетворяющих неравенствам

$$x+2>0,\ 7-3x>0,\ \text{т. е. } -2<x<\frac{7}{3}.$$

С учетом этого ограничения исходное неравенство равносильно следующему: $\log_{\sqrt{2}}(7-3x)>2$. Здесь использована формула $\log_{\frac{1}{b}} a=-\log_b a$. Решая последнее неравенство, находим $7-3x>2$, $x<\frac{5}{3}$. Окончательно, учитывая, что $-2<x<\frac{7}{3}$, получаем ответ: $-2<x<\frac{5}{3}$.

404. Прежде всего отметим, что должны быть выполнены неравенства $x+1>0$ и $2-x>0$, откуда $-1<x<2$. Используя свойства логарифмов, перепишем данное неравенство в виде

$$\log_2\frac{1}{x+1}>\log_2(2-x).$$

Отсюда $\frac{1}{x+1}>(2-x)$ и так как $x+1>0$, то это неравенство эквивалентно $(2-x)(x+1)<1$, или $x^2-x-1>0$. Так как корни трехчлена x^2-x-1 равны $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, то неравенство будет выполнено тогда и только тогда, когда или

$$x<\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \text{или}\ x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Но так как $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $2>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то все решения данного неравенства

$$-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.$$

405. $x > 2$. **406.** $x \geqslant 1$. **407.** $0 < x < \frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

408. Совершенно очевидно, что для любого действительного x под знаком логарифма стоит положительное число. На основании свойств логарифмов с основанием, большим единицы, это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1. \qquad (1)$$

Так как $x^2+|x-5|>0$ для всех действительных значений, то (1) эквивалентно следующему неравенству:

$$|x|\cdot|x-4|+3 \geqslant x^2+|x-5|. \qquad (2)$$

Так как выражения x, $x-4$ и $x-5$, находящиеся под знаком модуля, обращаются в нуль соответственно при $x=0$, $x=4$, $x=5$, то естественно исследовать неравенство (1) на промежутках

$$x \leqslant 0,\ 0 < x \leqslant 4,\ 4 < x \leqslant 5,\ x > 5.$$

1°. $x \leqslant 0$. Тогда неравенство (2) можно переписать так:

$$-x(4-x)+3 \geqslant x^2-(x-5).$$

Упростив это неравенство, получим $x \leqslant -\frac{2}{3}$. Так как все эти x удовлетворяют условию $x \leqslant 0$, то все они являются решениями данного неравенства.

2°. $0 < x \leqslant 4$. Неравенство (2) в этом случае эквивалентно такому:

$$x(4-x)+3 \geqslant x^2-(x-5)$$

или

$$2x^2-5x+2 \leqslant 0.$$

Всеми решениями этого неравенства будут все значения x из сегмента $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$. Так как все эти x удовлетворяют условию $0 < x \leqslant 4$, то все они будут решениями исходного неравенства.

3°. $4 < x \leqslant 5$. Неравенство (2) перепишется так:

$$x(x-4)+3 \leqslant x^2-(x-5) \text{ или } x < \frac{2}{3}.$$

Так как все эти x не удовлетворяют условию $4 < x \leqslant 5$, то в полуинтервале $4 < x \leqslant 5$ нет решений исходного неравенства.

4°. $x > 5$. Неравенство (2) примет вид

$$x(x-4)+3 \geqslant x^2+x-5, \text{ или } x \leqslant \frac{8}{5},$$

так как все эти x не удовлетворяют условию $x > 5$, то в промежутке $x > 5$ исходное неравенство не имеет решений. Ответ: $x \leqslant -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

409. Данное неравенство будет справедливо тогда и только тогда, когда будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0, & (1) \\ \sqrt{x+3}-x-1 > 0, & (2) \\ \sqrt{x+3}-x-1 \leqslant 1. & (3) \end{cases}$$

Неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1$$

выполняется, если $-3 \leqslant x < -1$, так как при этих значениях x левая часть — неотрицательна, а правая — отрицательна. Если же считать $x \geqslant -1$, то неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1$$

эквивалентно неравенству

$$x+3 > x^2+2x+1$$

или

$$x^2+x-2 < 0,$$

откуда $-2 < x < 1$,
т. е. в рассматриваемом случае решение неравенства (2)

$$-1 \leqslant x < 1.$$

Итак, все решения неравенства (2): $-3 \leqslant x < 1$.
Найдем решение неравенства (3): среди значений x, таких, что $x \leqslant -2$, оно решений не имеет; считая $x > -2$ (и учитывая, что тогда $x+3 > 0$), заключаем, что неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$x+3 \leqslant x^2+4x+4$$

или

$$x^2+3x+1 \geqslant 0,$$

откуда

$$x \geqslant \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Все решения исходного неравенства — это все решения системы (1), (2), (3), т. е.

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 1.$$

410. $\log_2 \frac{3}{2} < x < \log_2 5$. **411.** $\log_5 (1+\sqrt{2}) < x < \log_5 3$. **412.** $3 < x < 4$; $x > 6$. **413.** $x > 2$.

414. Для этого неравенства ОДЗ будут все $x > 0$. На основании свойств логарифмов имеем

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4} = \log_2 \frac{4}{x^5} = 2 - 5 \log_2 x.$$

Поэтому исходное неравенство можно переписать так:

$$(\log_2 x)^4 - 25 (\log_2 x)^2 + 144 < 0.$$

Обозначив $z = \log x$, это неравенство можно записать так:

$$z^4 - 25z^2 + 144 < 0.$$

Решением последнего будут все z, удовлетворяющие условию $9 < z^2 < 16$ или условию $3 < |z| < 4$. Это условие обозначает, что z можно брать из следующих промежутков:

$$3 < z < 4 \text{ или } -4 < z < -3.$$

Возвращаясь к x, получим, что решением исходного неравенства будут все x из ОДЗ, удовлетворяющие неравенствам $3 < \log_2 x < 4$ или $-4 < \log_2 x < -3$. Решим их:

1) $3 < \log_2 x < 4$, откуда $8 < x < 16$;

2) $-4 < \log_2 x < -3$, откуда $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$.

Все эти x входят в ОДЗ, и, значит, все они являются решением исходного неравенства. Ответ: Решением исходного неравенства будут все x из промежутка $8 < x < 16$ и все x из промежутка $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$.

415. $2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} < x < 1$.

416. Это неравенство имеет смысл лишь для тех x, для которых

$$\log_{\frac{1}{7}} (x^2 - 5x + 2) \geqslant 0,$$

т. е. для x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x^2 - 5x + 2 \leqslant 1$. Для всех этих x исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_{\frac{1}{7}}(x^2 - 5x + 2) < 1.$$

Откуда на основании свойств логарифмов с основанием меньше единицы получаем, что это неравенство равносильно следующему:

$$x^2 - 5x + 2 > \frac{1}{7}.$$

Сравнивая это с написанным выше, получаем, что исходное неравенство будет справедливо лишь для x, удовлетворяющих неравенствам $\frac{1}{7} < x^2 - 5x + 2 \leqslant 1$, т. е. для x, удовлетворяющих системам неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + \frac{13}{7} > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства этой системы будут все x из промежутка $\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$. Решением же второго неравенства будут все $x > \frac{35 + \sqrt{861}}{14}$, а также все $x < \frac{35 - \sqrt{861}}{14}$.

Решением системы неравенств будет общая часть этих промежутков. Значит, решением исходного неравенства будут все x из промежутков

$$\frac{35 + \sqrt{861}}{14} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \text{ и } \frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{35 - \sqrt{861}}{14}.$$

417. Для этого неравенства ОДЗ будут все $x > 0$. Перепишем неравенство так:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1 - (\log_2 x)^2} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-2\left(2 + \log_{\sqrt{2}} x\right)}.$$

Из свойств показательной функции следует, что это неравенство в ОДЗ равносильно следующему:

$$1 - (\log_2 x)^2 < -4 - 2\log_{\sqrt{2}} x.$$

На основании свойств логарифмов $\log_{\sqrt{2}} x = 2\log_2 x$. Поэтому последнее неравенство можно переписать так:

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0.$$

Отсюда видно, что решением исходного неравенства будут все x из ОДЗ, удовлетворяющие неравенству $\log_2 x > 5$, т. е. все $x > 32$, а также все x из ОДЗ, удовлетворяющие неравенству $\log_2 x < -1$, т. е. все x из промежутка $0 < x < \frac{1}{2}$.

418. $\frac{1}{2^{15}} < x \leqslant \frac{1}{2^9}$; $x \geqslant 2$.

419. $0 < x < 1$, $x \geqslant 2$.

420. Так как отношение логарифмических функций при одном и том же основании не зависит от основания, то логарифмы по основанию a можно заменить, например, десятичными логарифмами

$$\frac{\lg(26 - x^3)}{\lg(4 - x)} > 3.$$

Из условий $26 - x^3 > 0$, т. е. $x < \sqrt[3]{26}$, $4 - x \neq 1$, $x \neq 3$ и $4 - x > 0$, т. е. $x < 4$, с учетом того, что $\sqrt[3]{26} < 3 < 4$, получаем область определения неравенства

$$-\infty < x < \sqrt[3]{26}.$$

Так как при всех этих x будет $4 - x > 1$, то $\lg(4 - x) > 0$ и, следовательно, наше неравенство можно переписать в виде

$$\lg(26 - x^3) > 3\lg(4 - x) = \lg(4 - x)^3.$$

Отсюда, учитывая, что при основании большем единицы большему числу соответствует больший логарифм и наоборот, получаем

$$26 - x^3 > (4 - x)^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3,$$

откуда

$$6x^2 - 24x + 19 < 0,$$

т. е. трехчлен в левой части имеет корни

$$x_1 = 2 - \sqrt{\frac{5}{6}}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{\frac{5}{6}},$$

а так как $2+\sqrt{\frac{5}{6}}<\sqrt[3]{26}$, то последнее неравенство, а вместе с ним и неравенство исходное удовлетворяется при

$$2-\sqrt{\frac{5}{6}}<x<2+\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

421. $-\frac{2}{\sqrt{5}}<x<-1,\ 1<x<\frac{2}{\sqrt{5}}$. **422.** $\frac{1}{2}<x<1$.

423. Областью определения функции $y=\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}$ является множество всех решений системы неравенств:

$$x^2\neq 0,\quad x^2\neq 1,\quad 4x-5>0,\quad x\neq 2$$

т. е. $x>\frac{5}{4}$, $x\neq 2$, но если $x>\frac{5}{4}$ и $x\neq 2$, то $x^2>1$, и данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant x$$

или

$$4x-5\geqslant x|x-2|. \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая: $\frac{5}{4}<x<2$ и $x>2$.

1°. $\frac{5}{4}<x<2$. Тогда неравенство (*) эквивалентно следующему:

$$4x-5\geqslant -x^2+2x$$

или

$$x^2+2x-5\geqslant 0$$

или $\left[x-(-1-\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(\sqrt{6}-1)\right]\geqslant 0$ (так как $x-(-1-\sqrt{6})=x+1+\sqrt{6}>0$)

$$x\geqslant\sqrt{6}-1.$$

Поскольку $\sqrt{6}-1>\frac{5}{4}$, это решение исходного неравенства $\sqrt{6}-1<x<2$.

2°. $x>2$. Тогда неравенство (*) эквивалентно следующему:

$$4x-5\geqslant x^2-2x$$

или

$$x^2-6x+5\leqslant 0,$$

или

$$1\leqslant x\leqslant 5.$$

Значит, решение исходного неравенства

$$2 < x \leqslant 5.$$

Итак, все решения исходного неравенства:

$$\sqrt{6}-1 < x < 2, \quad 2 < x \leqslant 5.$$

424. Область D_1 определения функции $\log_x(2x)$ такова:

$$x > 0, \quad x \neq 1.$$

Область D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$ находится из системы неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \ x \neq 1, \\ \log_x(2x^3) > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если $0 < x < 1$, то неравенство $\log_x(2x^3) \geqslant 0$ эквивалентно $0 < 2x^3 \leqslant 1$, т. е. в итоге $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Если же $x > 1$, то неравенство $\log_x(2x^3) \geqslant 0$ эквивалентно $2x^3 \geqslant 1$, т. е. $x \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, что выполняется, если $x > 1$. Итак, множество всех решений системы (1), т. е. область D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$, состоит из двух промежутков:

$$0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad x > 1.$$

Множество всех значений из области D_2 определения функции $\sqrt{\log_x(2x^3)}$ входит в область $D_1(x > 0, \ x \neq 1)$ определения функции $\log_x 2x$. Таким образом, все решения данного неравенства входят в область D_2. Ясно, что все x из D_2, для которых $\log_x(2x) \leqslant 0$, являются решениями исходного неравенства. Неравенство $\log_x(2x) \leqslant 0$ выполняется для всех x из промежутка $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ и только для этих x. Следовательно, данное неравенство выполняется для всех x из этого промежутка, входящих в D_2, т. е. для всех x из промежутка

$$\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Теперь предположим, что или $0 < x < \frac{1}{2}$, или $x > 1$ (эта часть области D_2 после удаления из нее промежутка

$\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$). Если или $0 < x < \frac{1}{2}$, или $x > 1$, то обе части данного неравенства положительны, поэтому после возведения неравенства в квадрат получим неравенство $(1 + \log_x 2)^2 \leqslant 3 + \log_x 2$ эквивалентное данному (для значений x, таких, что или $0 < x < \frac{1}{2}$ или $x > 1$). Перепишем это неравенство так:

$$(\log_x 2 + 2)(\log_x 2 - 1) \leqslant 0. \qquad (1)$$

1°. Пусть $x > 1$. Тогда $\log_x 2 > 0$, значит, неравенство (1) равносильно $\log_x 2 - 1 \leqslant 0$, или $\log_x 2 \leqslant 1$. Отсюда получаем, что решением данного неравенства будут все $x \geqslant 2$.

2°. Пусть $0 < x < \frac{1}{2}$. Тогда $\log_x 2 < 0$ и неравенство (1) эквивалентно $\log_x 2 + 2 \geqslant 0$, или $2 < x^{-2}$, но это неравенство выполняется при всех x из интервала

$$0 < x < \frac{1}{2}.$$

Объединяя все полученные результаты, заключаем, что все решения данного неравенства — это все значения x из промежутков

$$0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad x \geqslant 2.$$

425. Областью определения функции $y = \log_x [\log_2 (4^x - 6)]$ являются все значения x, являющиеся решением системы неравенств:

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad \log_2 (4^x - 6) > 0, \quad 4^x - 6 > 0$$

или

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad 4^x - 6 > 1,$$

но система неравенств

$$0 < x < 1, \quad 4^x > 7$$

несовместна. Значит, областью определения функции является множество всех чисел x, таких, что

$$x > \log_4 7.$$

Считая $x > \log_4 7$ и замечая, что $\log_4 7 > 1$ заключаем: данное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$\log_2(4^x-6)\leqslant x$ или $4^x-6\leqslant 2^x$. Решая последнее неравенство, получим $x\leqslant \log_2 3$ и так как $\log_4 7=\log_2\sqrt{7}<$ $<\log_2 3$, то решениями данного неравенства будут все x из промежутка

$$\log_4 7<x\leqslant\log_2 3.$$

426. Для этого неравенства ОДЗ есть: $x>0$, $x\neq 2$, $x\neq 4$. Обозначая $\log_2 x=y$ и принимая во внимание формулу „перехода к основанию 2“, получим

$$\frac{3}{y-1}+\frac{3}{y-2}<\frac{4y}{2y-4}.$$

Переносим все члены в правую часть неравенства

$$\frac{2y^2-8y+9}{(y-1)(y-2)}>0.$$

Числитель этой дроби всегда положителен (дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в числителе, отрицателен) значит, $(y-1)(y-2)>0$, что дает

1) $y<1$, $\log_2 x<1$, $0<x<2$; 2) $y>2$, $\log_2 x>2$, $x>4$.

Решения задачи таковы: 1) $0<x<2$, 2) $x>4$.

427. $x<-7$, $-5<x\leqslant -2$, $x\geqslant 4$. **428.** $-2\leqslant x<6$, $\frac{20}{3}\leqslant x<7$. **429.** $2^{-\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$, $1<x<2^{\sqrt{2}}$.

430. Преобразуя оба уравнения, получим:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}}=3^{-x+2y}, \\ \log_2(x+y)(x-y)=4. \end{cases}$$

В результате этого преобразования могли быть получены посторонние решения.

Если равны степени, а основания степеней равны и отличны от 0 и 1, то равны показатели степеней, т. е. $\frac{x-y}{2}=-x+2y$; из второго уравнения получаем $x^2-y^2=16$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} x-y=2(-x+2y), \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x=\frac{5}{3}y$. После подстановки во второе уравнение получим $y^2=9$; т. е. $y_{1,2}=\pm 3$, $x_{1,2}=\pm 5$. Сделаем проверку:

$$(\sqrt{3})^{5-3}=3=\left(\frac{1}{3}\right)^{5-6},$$

так что первое уравнение удовлетворяется; $\log_2(5+3)+\log_2(5-3)=3+1=4$, и второе уравнение тоже удовлетворяется. С другой стороны, при $x=-5$, $y=-3$, второе уравнение не имеет смысла, так что это решение — постороннее. Ответ: $x=5$, $y=3$.

431. $x=4$, $y=6$. **432.** $x=4$, $y=2$.

433. $\begin{cases} x_1=\sqrt{3}, \\ y_1=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\sqrt{3}, \\ y_2=4. \end{cases}$

434. $x=5$, $y=3$. **435.** $x=5$, $y=0$.

436. $\begin{cases} x_1=\frac{7}{2}, \\ y_1=\frac{17}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{7}{5}, \\ y_2=-\frac{32}{5}. \end{cases}$ **437.** $\begin{cases} x_1=2\sqrt{2}, \\ y_1=27; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2=3\sqrt{3}, \\ y_2=8. \end{cases}$ **438.** $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\sqrt{2}, \\ y_2=15. \end{cases}$ **439.** $x=4$, $y=8$. **440.** $x=2$, $y=1$.

441. $\begin{cases} x_1=\frac{1}{4}, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{1}{9}, \\ y_2=3. \end{cases}$ **442.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{9}{2}$.

443. $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=1, \\ y_3=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-1. \end{cases}$

444. $x=3\frac{5\lg 3}{2\lg 3-\lg 5}$, $y=\frac{2\lg 5+\lg 3}{2\lg 3-\lg 5}$.

445. $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=32; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=32, \\ y_2=2. \end{cases}$

446. $x=a^{4m-6n}$; $y=a^{6m-12n}$. **447.** $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{27}{8}$; $z=\frac{32}{3}$.

448. При $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$. При $a\leqslant 0$ и $a>1$ решений нет.

449. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$0<a\neq 1,\ 0<x\neq 1.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$-\frac{|\log_x a-\log_2 a|}{\log_x a}+\log_x a+1-2\log_2 a+\log_a x\cdot\log_2 a=0. \quad (1)$$

Умножая левую часть этого уравнения на $\log_x a$, получим

$$\log_x^2 a+(1-2\log_2 a)\log_x a-|\log_x a-\log_2 a|+\log_2 a=0. \quad (2)$$

Область определения этого уравнения

$$a>0,\ 0<x\neq 1.$$

При $a=1$ уравнение (2) удовлетворяется при любом x, таком, что $0<x\neq 1$; значение $a=1$ (а значит, $\log_x a=0$, $\log_2 a=0$), в дальнейшем исключатся из рассмотрения.

Полагая $\log_x a=u$, $\log_2 a=p$, получим

$$u^2+(1-2p)u-|u-p|+p=0. \quad (3)$$

1) $u\geqslant p$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$u^2+(1-2p)u-(u-p)+p=0,$$

или

$$u^2-2pu+2p=0. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) действительны только тогда, когда

$$D=p^2-2p\geqslant 0.$$

Откуда или $p<0$ (так как $p\neq 0$), или $p\geqslant 2$. При $p=2$ уравнение (4) имеет корень $u=2$, следовательно, при $\log_2 a=2$, т. е. $a=4$, данное уравнение имеет корень x, определяемый из уравнения $\log_x 4=2$, т. е. $x=2$. Будем считать, что или $p<0$, или $p>2$. Тогда уравнение (4) имеет действительные и различные корни. Число p — его корень только при

$$p^2-2p^2+2p=0,$$

т. е. при $p=0$, $p=2$. Значит, если или $p<0$, или $p>2$, то корни уравнения (4) действительны, различны и ни один из них не равен p. Число p не может быть меньше обоих корней u_1 и u_2 уравнения (4), так как тогда (и только тогда) должны быть выполнены неравенства (см. теорему I на стр. 27)

$$2p-p^2>0,\quad 2p-2p<0.$$

Число p заключено между корнями уравнения (4) только при $2p-p^2<0$, т. е. если или $p<0$, или $p>2$, иначе: или $0<a<1$, или $a>4$. При этом

$$\log_x a=u_2=p+\sqrt{p^2-2p}=\log_2 a+\sqrt{\log_2^2 a-2\log_2 a}$$

и, значит

$$x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_3^2 a - 2\log_2 a}}}.$$

2) $u < p$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$u^2 + (1-2p)u + u - p + p = 0,$$

или

$$u^2 + 2(1-p)u = 0,$$

откуда

$$(u \neq 0)\ u = 2(p-1).$$

Неравенство $u < p$, т. е. $2p - 2 < p$ выполняется при $p < 2$, или $\log_2 a < 2$, т. е. при $a < 4$, а так как $0 < a \neq 1$, то имеем: $0 < a < 1$, $1 < a < 4$. Если выполнено любое из этих неравенств и $a \neq 2$, то данное уравнение имеет корень x, определяемый из уравнения:

$$\log_x a = 2(\log_2 a - 1),$$

т. е. если $a \neq 2$, то

$$x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}.$$

Ответ: При $0 < a < 1$ $x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$, $x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2\log_2 a}}}$; при $1 < a < 2$ $x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$; при $a = 2$ нет корней; при $2 < a < 4$ $x = a^{\frac{1}{2(\log_2 a - 1)}}$; при $a = 4$ $x = 2$; при $a > 4$ $x = a^{\frac{1}{\log_2 a + \sqrt{\log_2^2 a - 2\log_2 a}}}$.

450. При $a < 10^{1-\sqrt{3}}$ корней нет; при $a = 10^{1-\sqrt{3}}$ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$; при $10^{1-\sqrt{3}} < a < 10^{-\frac{1}{2}}$ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{\sqrt{3-4\lg a}-1}$; при $a = 10^{-\frac{1}{2}}$ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$; при $10^{-\frac{1}{2}} < a < 10^{1+\sqrt{3}}$ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$; $x = 10^{\sqrt{3+4\lg}-1}$; при $a = 10^{1+\sqrt{3}}$; $x = 10^{1-\sqrt{3}}$; при $a > 10^{1+\sqrt{3}}$ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$, $x = 10^{1+\sqrt{3}}$.

451. Найдем ОДЗ этого уравнения $x > 0$, $x \neq 1$ функции в правой и левой частях этого уравнения имеют смысл если $a > 0$, $a \neq 1$.

Данное уравнение эквивалентно

$$\log_a x+\frac{2}{\log_a x}|a+\log_a x|-\frac{a}{\log_a x}=0,$$

а это уравнение эквивалентно

$$\log_a^2 x+2|a+\log_a x|-a=0. \qquad (1)$$

В самом деле, $x=1$ не является корнем этого уравнения, так как при $x=1$ левая часть обращается в $2|a|-a$, но это выражение равно нулю только при $a=0$. Освободимся теперь от знака модуля в уравнении (1):

$$1)\ a+\log_a x\geqslant 0.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$t^2+2t+a=0,\ \text{где}\ t=\log_a x. \qquad (2)$$

Дискриминант уравнения (3) равен

$$D=1-a,$$

из условия $D\geqslant 0$ находим $1-a\geqslant 0$; $a\leqslant 1$. Итак, корни уравнения (2) действительны и различны тогда и только тогда, когда $0<a<1$. В рассматриваемом случае $t\geqslant -a$. Число $t=-a$ является корнем уравнения (2) только тогда, когда $a^2-2a+a=0$, откуда $a=0$ и $a=1$ — эти значения a исключены. Итак, надо исследовать, при каком условии уравнение (2) имеет корни $t>-a$. Пусть t_1 и t_2 — корни уравнения (2). Неравенства $-a<t_1<t_2$ будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$a^2-a>0,$$

$$-2a+2<0,$$

откуда $a>1$, что противоречит условию

$$0<a<1\quad (D>0).$$

Число $-a$ будет заключено между t_1 и t_2 только тогда, когда $a^2-a<0$, т. е. $0<a<1$, если $0<a<1$, то имеется только один корень уравнения (2), больший $-a$:

$$t=\log_a x=\sqrt{1-a}-1;$$

$$x=a^{\sqrt{1-a}-1}.$$

$$2)\ a+\log_a x<0.$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\log_a^2 x-2\log_a x-3a=0.$$

Так как $a > 0$, то корни его действительны и различны. Полагая $\log_a x = t$, получим

$$t^2 - 2t - 3a = 0. \qquad (3)$$

Пусть t_1 и t_2 — корни этого уравнения ($t_1 < t_2$). Неравенство $a + \log_a x < 0$ принимает вид: $t < -a$. Неравенство $t_1 < t_2 < -a$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$a^2 + 2a - 3a > 0,$$

$$-2a - 2 > 0,$$

откуда $a < -1$, что не имеет места. Неравенство $t_1 < -a < t_2$ выполняется только тогда, когда $a^2 - a < 0$, т. е. $0 < a < 1$ и в этом случае

$$t = \log_a x = 1 - \sqrt{1 + 3a},$$

откуда $x = a^{1 - \sqrt{1+3a}}$.

Итак, данное уравнение имеет два корня:

$$x = a^{\sqrt{1-a}-1} \text{ и } x = a^{1-\sqrt{1+3a}},$$

если $0 < a < 1$. Если же $a > 1$, то уравнение корней не имеет.

452. При $0 < a < 10$ корней нет; при $a = 10$ $x = \frac{1}{10}$; при $10 < a < 1000$ $x = \frac{1}{10}$; $x = 10^{2 - \sqrt{1 + 8 \lg a}}$; при $a \geqslant 1000$ $x = \frac{1}{10}$; $x = \frac{1}{1000}$.

453. При $1 < a < \sqrt[4]{2}$ $x = a^4$; при $a = \sqrt[4]{2}$ $x = 2$; при $a > \sqrt[4]{2}$ $x = a^{-2 + 2\sqrt{1 + 2 \log_a 2}}$; при $0 < a < 1$, уравнение корней не имеет.

454. При $0 < a < 1$ корней нет; при $1 < a < \sqrt{2}$ $x = a^2$; при $a = \sqrt{2}$ $x = 2$; при $a > \sqrt{2}$ $x = a^{\sqrt{1 + 4 \log_a 2} - 1}$.

7°. А. Прогрессии

455. Указание. Используя определение арифметической прогрессии, задачу можно привести к уравнению

$2 \lg (2^x - 1) = \lg 2 + \lg (2^x + 3)$, откуда $x = \log_2 5$.

457. Указание. Характеристическим свойством арифметической прогрессии $a_1, \ldots, a_n$ является соотношение

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

(которое может являться определением арифметической прогрессии). Используя условие $a^2-b^2=b^2-c^2$, доказать, что

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}.$$

458. $a_m=\frac{A+B}{2}$, $a_n=\frac{(2n-m)A+mB}{2n}$.

459. Доказательство проведем от противного. Пусть в некоторой арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d имеем

$$\sqrt{2}=a_k=a_1+(k-1)d,\ \sqrt{3}=a_m=a_1+(m-1)d,$$
$$\sqrt{5}=a_n=a_1+(n-1)d.$$

Вычитая первое из этих равенств из второго и затем второе из третьего, получим

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)d,\ \sqrt{5}-\sqrt{3}=(n-m)d.$$

Разделив первое из полученных соотношений на второе, придем к равенству

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{m-k}{n-m}. \qquad (*)$$

Правая часть равенства (*) — число рациональное, так как m, k, n — целые числа. Обозначим это число через r и перепишем равенство (*) в виде $\sqrt{3}-\sqrt{2}=r(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, откуда, возводя обе части в квадрат, имеем

$$22\sqrt{15}-\sqrt{6}=\frac{8r^2-5}{2}.$$

Правая часть этого последнего равенства — число рациональное; обозначим его через S. Возводя обе части равенства $r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=S$ в квадрат, получим $\sqrt{10}=\frac{15r^4-S^2+6}{6r^2}$. Это равенство показывает, что $\sqrt{10}$ рациональное число, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что равенство (*) невозможно, т. е. что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

460. Имеется несколько способов доказательства.

Рассмотрим два способа.

1-й способ. Пусть a, b, c — стороны, h_a, h_b, h_c — высоты, A, B, C — углы треугольника, S — площадь. Имеем

$$a=h_a(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C) \text{ или } a^2=2S(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C).$$

Аналогично

$$b^2 = 2S(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C),\ c^2 = 2S(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B).$$

Учитывая эти соотношения, находим, что при выполнении равенства $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C$ будет выполнено равенство $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$, т. е. если котангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то квадраты сторон треугольника также составляют арифметическую прогрессию.

2-й способ. Пусть R — радиус описанной окружности. По условию задачи котангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Пусть, например, A, B, C — углы треугольника, тогда

$$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C, \qquad (*)$$

отсюда $\dfrac{\sin(B-A)}{\sin A} = \dfrac{\sin(C-B)}{\sin C}$,

$$\sin(B-A)\sin(B+A) = \sin(C-B)\sin(C+B),$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 B - \sin^2 C$$

или

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \qquad (**)$$

$\left(\text{здесь учтено, что } \sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R},\ \sin C = \dfrac{c}{2R}\right)$.

Следовательно, из равенства (*) следует равенство (**).

461. Данные числа составляют геометрическую прогрессию, если выполнено равенство

$$\cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{6},$$

которое можно переписать так:

$$6\cos^3\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

462. Имеем по условию

$$a = lq^{k-1},\quad b = lq^{n-1},\quad c = lq^{m-1},$$

$$a = p + d(k-1),\quad b = p + d(n-1),\quad c = p + d(m-1).$$

Следовательно

$$a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b} = (lq^{k-1})^{d(n-m)}\cdot(lq^{n-1})^{d(m-k)}\cdot(lq^{m-1})^{d(k-n)} = 1.$$

463. 2, 6, 18, или 18, 6, 2. **464.** $n-1$. **465.** $a>0$; 1) $\div a$, $7a$, $13a$, ...; $\div\div a$, $4a$, $16a$, ...; 2) $\div a$, a, a, ...; $\div\div a$, $-2a$, $4a$, ... **466.** 246. **467.** $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, ..., $-\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, $-\frac{2}{81}$, ... **468.** $\frac{242}{81}$.

469. Поскольку числа x, $x+2y$, $2x+y$ образуют арифметическую прогрессию, имеем равенство $(x+2y)-x=(2x+y)-(x+2y)$, откуда $x=3y$. Поскольку числа $(y+1)^2$, $xy+5$, $(x+1)^2$ должны составлять геометрическую прогрессию, должно выполняться равенство

$$(xy+5)^2=(x+1)^2(y+1)^2.$$

Подставим в это равенство $x=3y$ и используем формулу разности квадратов; тогда получим уравнение для определения y

$$(y-1)(3y^2+2y+3)=0,$$

имеющее три корня — один действительный и два мнимых. Таким образом, условию задачи удовлетворяют три пары чисел:

$$x_1=3,\quad x_2=-1+2\sqrt{2}\,i,\quad x_3=-1-2\sqrt{2}\,i;$$

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{-1+2\sqrt{2}\,i}{3},\quad y_3=\frac{-1-2\sqrt{2}\,i}{3}.$$

470. Обозначим первый член искомой прогрессии через a, а знаменатель прогрессии через q. Тогда остальные три члена равны aq, aq^2, aq^3.

По условию имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a(1+q+q^2+q^3)=15, \\ a^2(1+q^2+q^4+q^{16})=85. \end{cases}$$

Возводя первое уравнение в квадрат и деля результат на второе уравнение, получаем уравнение для q:

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{\left(\frac{q^4-1}{q-1}\right)^2}{\frac{q^8-1}{q^2-1}}=\frac{(q^4-1)^2(q^2-1)}{(q-1)^2(q^8-1)}=\frac{q^4-1}{q-1}\cdot\frac{q+1}{q^4+1}=$$

$$=\frac{(q^3+q^2+q+1)(q+1)}{q^4+1}=\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17},$$

которое можно привести к уравнению четвертой степени. $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$, решая которое получим $q_1=2$, $q_2=\frac{1}{2}$[1]. Подставляя по очереди найденные значения в первое уравнение исходной системы, получим $a_1=1$, $a_2=8$.

471. После того как из бака в первый раз отлили a л чистой кислоты и долили его водой, в баке, естественно, осталось $(729-a)$ л чистой кислоты. Ясно, что в одном литре раствора теперь содержится $\frac{729-a}{729}$ л чистой кислоты. При втором выливании из бака удаляется кислота $a\frac{729-a}{729}$ л и в баке остается уже только $729-a-a\cdot\frac{729-a}{729}=$ $=\frac{(729-a)^2}{729}$ л кислоты. Следовательно, после второго доливания бака водой в одном литре раствора будет $\frac{729-a}{729}:729=\frac{(729-a)^2}{729^2}$ л кислоты. Нетрудно заметить, что количество кислоты в баке после шестой операции должно равняться $\frac{(729-a)^6}{729^5}$ л.

Уравнение $\frac{(729-a)^6}{729^5}=64$, если заметить, что $2^6=64$, $3^6=729$, немедленно определяет $a=243$. Таким образом, при каждой операции отливали по 243 л жидкости.

Ответ: 243 л.

472. Обозначим первый член прогрессии через a и знаменатель через q; тогда, согласно условию,

$$\frac{a}{1-q}=\frac{2a\,(1-q^k)}{1-q},$$

---

[1]) Уравнения вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0$$

называются возвратными. Если n — четное, то подстановка $x+\frac{1}{x}=t$ понижает степень этого уравнения на 2. В частности, рассматриваемое в задании уравнение приводится к квадратному:

$$14\,(t^2-2)-17t=17,$$
$$14t^2-17t-45=0.$$

где k — заданное условием задачи число. Отсюда получаем

$$1 = 2(1 - q^k), \quad q^k = \frac{1}{2}.$$

Если k нечетно, то это уравнение имеет единственный корень $q = \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$, который и является в этом случае знаменателем прогрессии, если же k четно, то получаются два корня $q = \pm \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$, и оба эти корня могут быть знаменателями искомой прогрессии.

473. $A = 2$, $B = 32$. **474.** 27, 18 и 12 лет. **475.** $x = y = z = 2$.

476. Указание. Следует показать, что числа $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ составляют геометрическую прогрессию, и подсчитать ее сумму. Ответ: $p = \left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$.

7°. Б. Метод математической индукции

479. См. решение примера 483.

480. 1. При $n = 1$ данное утверждение очевидно, так как $n^p - n = 0$.

2. Предположим, что данное утверждение справедливо при $n = k$, т. е. что $k^p - k$ делится на p и докажем, что тогда $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p.

3. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p + C_p^1 k^{p-1} + \ldots + pk + 1 - k - 1 = \\ = (k^p - k) + pk^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + pk.$$

Но $k^p - k$ делится на p по предположению, pk делится на p, все биномиальные коэффициенты также делятся на p, так как числитель коэффициентов содержит p, знаменатель такого множителя не содержит. Значит, $n^p - n$ делится на p, если n — любое целое число, а p — простое число.

482. Любое нечетное число $n > 1$ можно представить в виде

$$n = 2m + 1, \text{ где } m = 1, 2 \ldots$$

Докажем, что числа вида $(2m+1)^3 - (2m+1)$ делятся на 24 при любом натуральном m.

1. Для $m=1$ имеем $3^3-3=24$.

2. Предположим, что числа вида $(2k+1)^3-(2k+1)=8k^3+12k^2+4k$ делятся на 24.

3. Докажем, исходя из предположения (2), что числа вида $[2(k+1)+1]^3-[2(k+1)+1]$ делятся на 24. Имеем

$$[2(k+1)+1]^3-[2(k+1)+1]=8k^3+36k^2+52k+24=$$
$$=(8k^3+12k^2+4k)+(24k^2+48k+24),$$

где каждое слагаемое делится на 24.

483. Задача сводится к доказательству того, что данное выражение делится на 6 и на 7. Для доказательства его делимости на 6 следует преобразовать данное выражение к виду:

$$n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3+1)(n^3-1)=n(n-1)(n+1).$$
$$(n^2+n+1)(n^2-n+1),$$

$n(n-1)(n+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел, делится на 6.

Для доказательства того, что n^7-n делится на 7, используем метод математической индукции.

1. Для $n=2$ имеем $2^7-2=126:7=18$.

2. Предположим, что числа вида k^7-k делятся на 7.

3. Докажем, исходя из предположения (2), что числа вида $(k+1)^7-(k+1)$ делятся на 7. Имеем

$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+7k^6+C_7^2k^5+C_7^3k^4+C_7^3k^3+C_7^2k^2+$$
$$+C_7^1k+1-k-1.$$

$7k^6+C_7^2k^5+\ldots\ C_7^1k$ — делится на 7, так как каждое слагаемое этой суммы делится на 7; (k^7-k) — делится на 7 по предположению.

485. 1. Для $n=0$ имеем $11^2+12=133$.

2. Предположим, что числа вида $11^{k+2}+12^{2k+1}$ делятся на 133.

3. Докажем, что числа $11^{(k+1)+2}+12^{2k+3}$ также делятся на 133.

В самом деле,

$$11^{(k+1)+2}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+2}+$$
$$+(133+11)\cdot 12^{2k+1}=133\cdot 12^{2k+1}+11(11^{k+2}+12^{2k+1}),$$

где каждое слагаемое делится на 133.

486. 1. При $n=1$ утверждение верно: $6^2+3^3+3=66$.

2. Предположим, что при $n=k$ $6^{2k}+3^{k+2}+3^k$ делится на 11.

3. Докажем, что из предположения (2) вытекает правильность утверждения задачи для $n=k+1$, т. е. что

$$(*) \qquad 6^{2(k+1)}+3^{(k+1)+2}+3^{k+1}$$

делится на 11.

Имеем

$$6^{2k+2}+3^{k+1+2}+3^{k+1}=36\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^k=$$
$$=33\cdot 6^{2k}+3\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^k=33\cdot 6^{2k}+3\,(6^{2k}+3^{k+2}+3^k).$$

Оба слагаемых делятся на 11, утверждение (*) вытекает из (2), таким образом, формула доказана для всех натуральных значений n.

Доказательство тождеств

488. 1. Для $n=1$ имеем

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1.$$

2. Предположим, что равенство имеет место при $n=k$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}.$$

3. Докажем, что из этого предположения вытекает существование равенства для $n=k+1$, т. е. что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\,(k+2)\,(2k+3)}{6}.$$

В самом деле

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=[1^2+2^2+\ldots+k^2]+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)\,(2k^2+7k+6)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)\,(k+2)\,(2k+3)}{6}.$$

489. Для $n=1$ равенство имеет место $1=(-1)^0\frac{1\cdot 2}{2}=1$.

2. Предположим, что равенство имеет место при $n=k$:

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{k-1}\frac{k\,(k+1)}{2}.$$

3. Докажем, что из этого предположения вытекает существование равенства для $n=k+1$, т. е. что

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot k^2+(-1)^k(k+1)^2=$$

$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Доказательство:

$$1-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2=$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

493. Указание. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!=$

$$=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1=$$

$$=[(k+1)+1]!-1.$$

496. 1. Для $n=1$ равенство имеет место.

2. Предположим, что исходное равенство имеет место при $n=k$

$$(1\cdot 2\ldots p)+[2\cdot 3\ldots p(p+1)]+\ldots.[k(k+1)\ldots(k+p-1)]=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}.$$

3. Докажем, что из этого предположения вытекает существование равенства для $n=k+1$, т. е.

$$(1\cdot 2\ldots p)+[2\cdot 3\ldots p(p+1)]+\ldots.[(k+1)(k+2)\ldots(k+p)]=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\ldots..(k+p+1)}{p+1}.$$

Доказательство:

$$(1\cdot 2\ldots p)+[2\cdot 3\ldots p(p+1)]+\ldots.+[k(k+1)\ldots(k+p-1)]+$$

$$+[(k+1)(k+2)\ldots.(k+p)]=\frac{k(k+1)\ldots..(k+p)}{p+1}+$$

$$+(k+1)\ldots.(k+p)=\frac{(k+1)(k+2)\ldots..(k+p+1)}{p+1}.$$

Полагая в исходном равенстве $p=1$, $p=2$, $p=3$, получим

1. $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;
2. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
3. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots.n(n+1)(n+2)=$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

497. 1. При $n=1$ формула справедлива.

2. Предположим, что она справедлива при $n=k$, и рассмотрим ее левую часть при $n=k+1$. Получим:

3. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{k+1}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k(\cos\alpha+i\sin\alpha)=$
$=(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=(\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-$
$-\sin k\alpha\sin\alpha)+i(\sin k\alpha\cdot\cos\alpha+\cos k\alpha\cdot\sin\alpha)=$
$=\cos[(k+1)\alpha]+i\sin[(k+1)\alpha].$

Формула доказана.

498. 1. При $n=1$ доказываемое равенство имеет место

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha}{2}=\sin\alpha.$$

2. Предполагаем, что доказываемое равенство справедливо при $u=k$:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{k+1}{2}\alpha.$$

3. Докажем, что равенство остается в силе и при $u=k+1$, т. е. что

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha=$$
$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k+2}{2}\alpha.$$

На основании предположения (2) имеем

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots.+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha=$$
$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}+\sin(k+1)\alpha.$$

Остается убедиться в том, что правые части последних двух равенств совпадают, т. е. что

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}=\sin(k+1)\alpha+$$
$$+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}$$

или, после замены $\sin(k+1)\alpha$ через $2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, что

$$\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}=\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}+$$
$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{k+1}{2}\alpha,$$

или что

$$\sin\frac{k+1}{2}\alpha\left[\sin\frac{k+2}{2}\alpha-\sin\frac{k\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k+1}{2}\alpha\right]=0.$$

Это равенство имеет место, так как

$$\sin\frac{k+2}{2}\alpha-\sin\frac{k\alpha}{2}=2\cos\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Подстановка этого результата в последнее равенство обращает выражение, стоящее в квадратных скобках, в нуль, чем доказывается искомое равенство.

500. 1. При $n=0$ тождество справедливо, так как $\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$.

2. Пусть тождество справедливо при $u=k$, т. е.

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

3. Тогда оно справедливо и при $n=k+1$. Действительно,

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha=$$
$$=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}=\frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

502. 1. При $n=1$ утверждение справедливо, так как

$$\frac{2\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha.$$

2. Пусть

$$\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\ldots+k\cos k\alpha=$$
$$=\frac{(k+1)\cos k\alpha-k\cos(k+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

3. Тогда

$$\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\ldots+k\cos k\alpha+(k+1)\cos(k+1)\alpha=$$
$$=\frac{(k+1)\cos k\alpha-k\cos(k+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+(k+1)\cos(k+1)\alpha=$$
$$=\frac{(k+1)\cos k\alpha-k\cos(k+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2(k+1)\cos(k+1)\alpha(1-\cos\alpha)^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)\alpha+(k+1)\cos k\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{2(k+1)\cos\alpha\cos(k+1)\alpha+1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)\alpha+(k+1)\cos k\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{(k+1)[\cos(k+2)\alpha+\cos k\alpha]+1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)\alpha-(k+1)\cos(k+2)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

503. 1. Имеем $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

Поэтому $\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arcctg}3$.

Значит, при $n=1$ утверждение справедливо.

2. Докажем сначала, что

$$\operatorname{arcctg}(2k+3)=\operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arctg}1. \qquad (1)$$

Действительно

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k+2}{k-1}-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\frac{k+2}{k-1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}}=\frac{1}{2k+3}.$$

Значит,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2k+3}=\operatorname{arctg}\frac{k+2}{k-1}-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arcctg}(2k+3).$$

Предположим, что утверждение справедливо при $u=k$, т. е.

$$\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+\operatorname{arcctg}(2k+1)=$$
$$=\operatorname{arctg}2+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{k+1}{k}-k\operatorname{arctg}1. \qquad (2)$$

Докажем, что тогда оно справедливо при $u=k+1$, т. е.

$$\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+\operatorname{arcctg}(2k+3)=$$
$$=\operatorname{arctg}2+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\operatorname{arctg}1. \qquad (3)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим равенство (3).

Использование метода математической индукции для доказательства неравенств

506. Условие задачи можно выразить несколько иначе: доказать, что $2^{n+4} > (n+4)^2$, где n — любое натуральное число.

1. При $n=1$ имеем $2^5 = 32 > (1+4)^2 = 25$.

2. Предположим, что неравенство справедливо при $n=k$, $2^{k+4} > (k+4)^2$.

3. Тогда

$$2^{(k+1)+4} = 2 \cdot 2^{k+4} > 2(k+4)^2 = 2k^2 + 16k + 32 >$$

$$> (k+5)^2 = k^2 + 10k + 25.$$

508. Условие задачи можно выразить в виде $2^{n+9} > (n+9)^3$, где n — любое натуральное число.

1. При $n=1$ имеем $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$.

2. Предположим, что неравенство справедливо при $n=k$, $2^{k+9} > (k+9)^3$.

3. Тогда $2^{k+10} = 2 \cdot 2^{k+9} > 2(k+9)^3 = 2k^3 + 54k^2 + 486k + 1458 > (k+10)^3 = k^3 + 30k^2 + 300k + 1000$.

513. Обозначим $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ через S_n, тогда

$$S_{k+1} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2},$$

или

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(2k+1)(k+1)} > 0,$$

т. е. $S_{k+1} > S_k$.

1. При $n=2$ имеем $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$.

2. Предположим, что неравенство справедливо при $n=k$, т. е. $S_k > \frac{13}{24}$.

3. Тогда $S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$.

Неравенство доказано.

516. 1. При $n=1$ соотношение имеет место.

2. Предположим, что соотношение имеет место при $n=k$

$$|\sin k\alpha| \leqslant k |\sin \alpha|.$$

3. Докажем, что исходное соотношение имеет место и при $n=k+1$, т. е. что $|\sin(k+1)\alpha| \leqslant (k+1)|\sin\alpha|$.

Доказательство:

$$|\sin(k+1)\alpha| = |\sin k\alpha\cos\alpha + \cos k\alpha\sin\alpha| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin k\alpha|\cdot|\cos\alpha| + |\cos k\alpha|\cdot|\sin\alpha| \leqslant$$
$$\leqslant k|\sin\alpha| + |\sin\alpha| = (k+1)|\sin\alpha|.$$

Примечание. Неравенство $|\sin k\alpha|\cdot|\cos\alpha| + |\cos k\alpha|\cdot|\sin\alpha| \leqslant k|\sin\alpha| + |\sin\alpha|$ имеет место всегда, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ и $|\cos k\alpha| \leqslant 1$ и от замены таких множителей единицами выражение не уменьшается.

8°. Текстовые алгебраические задачи

517. Обозначим через $v_п$ *км/час*, $v_к$ *км/час*, *и км/час* соответственно скорости парохода, катера и течения реки. Согласно условию задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{v_п+u}{v_к+u} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{v_п-u}{v_к-u} = 2, \\ v_п = v_к + 8. \end{cases}$$

Определение искомых величин $v_п$ и $v_к$ теперь не представляет труда.

Ответ: $v_п = 20$ *км/час*; $v_к = 12$ *км/час*.

518. Введем следующие неизвестные: S *км* — искомое расстояние от A до B; v_1 *км/мин*, v_2 *км/мин* — скорости первого и второго туриста соответственно. Тогда условия задачи можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = 5, \\ \dfrac{\dfrac{2S}{5}+S}{v_1} + 10 = \dfrac{S}{v_2} = 150. \end{cases}$$

Обозначив для удобства $1/v_1 = x$, $1/v_2 = y$, перепишем систему уравнений в более простом виде:

$$\begin{cases} y = x + 5, \\ \dfrac{7}{5} S\cdot x = 140, \\ S\cdot y = 150. \end{cases}$$

Ответ: $AB=S=10$ *км*.

519. Указание. Поскольку единица длины и единица времени не входят в условие задачи, можно для простоты обозначить расстояние между городами A и B и время через единицу, зафиксировав тем самым единицы измерения длины и времени соответственно.

Ответ: в два раза.

520. На 25 *мин*. **521.** На 10 *мин*. **522.** 6 *км/час*, 4 *км/час*, 10 *км*.

523. Введем единицу длины (*ед. дл.*), обозначив расстояние между пунктами A и B через 1 (это допустимо, так как в условие задачи не входят величины с размерностью длины). Пусть u *ед. дл/час* — скорость течения реки, v *ед. дл./час* — скорость лодки. В этих обозначениях легко составляется система

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v-u}=6, \\ \dfrac{1}{v+u}+4=\dfrac{1}{u}. \end{cases} \tag{1}$$

Искомое время t через введенные неизвестные легко выражается: $t=\dfrac{1}{u+v}$. Обозначим для удобства $u+v=x$, $v-u=y$. Тогда $u=\dfrac{x-y}{2}$ и система (1) принимает вид

$$\begin{cases} 6y=1, \\ \dfrac{1}{x}+4=\dfrac{2}{x-y}. \end{cases}$$

Исключая y, получаем квадратное уравнение для определения x

$$\frac{1}{x}+4=\frac{2}{x-\frac{1}{6}} \quad \text{или} \quad 24x^2-10x-1=0.$$

Так как $x>0$, то из последнего уравнения находим $x=\dfrac{1}{2}$. Тогда $t=\dfrac{1}{x}=2$.

Ответ: 2 часа.

524. 2,1 *м*; 3,6 *м*. **525.** 4 *сек* и 6 *сек*.

526. Пусть S *км* — искомое расстояние между A и C, $v\,\dfrac{км}{час}$ — скорость автобуса. Условия задачи можно запи-

сать в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{2v}+\frac{15}{v}=\frac{5}{4}, \\ \frac{S-5}{2v}+\frac{1}{3}+\frac{15}{v}=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

После исключения v получаем линейное уравнение для определения S

$$\frac{S+30}{S+25}=\frac{15}{14}.$$

Ответ: 45 *км*.

527. $AB=20$ *км*. **528.** 7 *км/час*. **529.** Через 3 *часа*. **530.** Скорость первой моторной лодки 6 *км/час*, скорость второй 21 *км/час*; $AB=45$ *км*. **531.** Скорость автомобиля 80 *км/час*, скорость велосипедиста 20 *км/час*. **532.** 60 *км/час*. **533.** 180 *км*. **534.** 40 *км*. **535.** 5 *км/час*. **536.** Две минуты. **537.** 4 *км/час*.

538. Пусть v_1 *км/час* — скорость пассажирского поезда, v_2 *км/час* — скорость товарного поезда, S *км* — расстояние между городами A и B.

Тогда расстояние AB пассажирский поезд проходит за $\frac{S}{v_1}$ *час*, а товарный — за $\frac{S}{v_2}$ *час*; из условия, что пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 *час* быстрее товарного, получаем

$$\frac{S}{v_1}=\frac{S}{v_2}-4.$$

Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь из A в B, то пассажирский поезд прошел бы $\frac{S}{v_2}v_1$ *км*, а товарный $\frac{S}{v_1}v_2$ *км*. Из условия, что пассажирский поезд прошел бы при этом на 280 *км* больше, чем товарный, имеем

$$\frac{S}{v_2}v_1=\frac{S}{v_1}v_2+280.$$

Если бы скорость каждого поезда увеличить на 10 *км/час*, то пассажирский поезд проходил бы расстояние AB за $\frac{S}{v_1+10}$ *час*, а товарный — за $\frac{S}{v_2+10}$ *час*. Из условия задачи следует, что $\frac{S}{v_1+10}=\frac{S}{v_2+10}-2\frac{24}{60}$.

Перепишем теперь полученную систему уравнений следующим образом:

$$\frac{S}{v_1 v_2}(v_1 - v_2) = 4, \tag{1}$$

$$\frac{S}{v_1 v_2}(v_1^2 - v_2^2) = 280, \tag{2}$$

$$\frac{S}{(v_1 + 10)(v_2 + 10)}(v_1 - v_2) = \frac{12}{5}. \tag{3}$$

Из этой системы уравнений нам надо найти S. Предварительно найдем v_1 и v_2.

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим $v_1 + v_2 = 70$. Разделив почленно третье уравнение на первое, получим $\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 10)(v_2 + 10)} = \frac{3}{5}$. Отсюда

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 70, \\ v_1 v_2 = 1200. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем, что $v_1 = 40$, $v_2 = 30$. Теперь из уравнения (1) находим $S = 480$.

Ответ: 480 *км*.

539. Пусть скорость автобуса v_1 *км/мин*, легковой машины v_2 *км/мин*. Из условия задачи следует, что расстояние AB равно $160\,v_1$ *км* и что автобусы выезжают через 8 *мин* один за другим. Легковая машина за t *мин* проходит расстояние $v_2 t$ *км*, такое же, какое 2-й автобус преодолевает за $t + 8$ *мин*:

$$v_2 t = v_1 (t + 8). \tag{1}$$

В момент встречи легковой машины с 1-м автобусом, расстояние между легковой машиной и 2-м автобусом равно $8v_1$ *км*. Через $t - 9$ *мин* после этого 2-й автобус пройдет $(t - 9)\,v_2$ *км*, а легковая машина $(t - 9)\,v_1$ и встретит его, следовательно,

$$(t - 9)\,v_1 + (t - 9)\,v_2 = 8v_1. \tag{2}$$

Перепишем систему (1) и (2) так:

$$v_2 t = v_1 (t + 8), \tag{1'}$$

$$v_2 (t - 9) = v_1 (17 - t). \tag{2'}$$

Разделив почленно уравнение (1′) на уравнение (2), получим $\frac{t}{t-9}=\frac{t+8}{17-t}$, решая которое, найдем $t_1=12$ и $t_2=-3$. Итак, $t=12$ *мин*.

Выясним теперь, за какое время легковая машина проезжает расстояние AB. Так как расстояние AB равно $160v_1$, а скорость легковой машины v_2, то расстояние AB легковая машина проезжает за $u=160\,\frac{v_1}{v_2}$ *мин*. Зная, что $t=12$, из уравнения (1) находим $\frac{v_1}{v_2}=\frac{t}{t+8}=\frac{12}{60}$.

Поэтому $u=160\cdot\frac{12}{60}=96$ *мин*, т. е. легковая машина проезжает расстояние AB за 1 *час* 36 *мин*.

Ответ: $t=12$ *мин*; расстояние AB легковая машина проезжает за 1 *час* 36 *мин*.

540. Пусть скорость лодки в стоячей воде v *км/час*, а скорость реки u *км/час*, и пусть расстояние AB равно S *км*. За 5 *час* лодка проплыла расстояние $5(v-u)$ *км*, а плот $5u$ *км*, и так как через 5 *час* они встретились, то сумма этих двух расстояний есть расстояние AB:

$$S=5u+5(v-u).$$

На путь из B в A лодка затратила $\frac{S}{v-u}$ *час*, а на путь из A в B $\frac{S}{v+u}$ *час*, на путь из A в B плот затратил $\frac{S}{u}$ *час*. Так как по условию плот и лодка прибыли в B одновременно, то

$$\frac{S}{u}=\frac{S}{v-u}+\frac{S}{v+u}.$$

В задаче требуется узнать, успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 *час* вечера (того же дня). Другими словами, требуется выяснить, будет ли время, затраченное плотом на путь из A в B, т. е. $\frac{S}{u}$, не больше чем 12 *час* (так как плот отправился в путь в 9 *час* утра).

Итак, из системы уравнений

$$\begin{cases} S=5u+5(v-u), & (1)\\ \frac{S}{u}=\frac{S}{v-u}+\frac{S}{v+u}, & (2)\end{cases}$$

требуется выяснить, будет ли отношение $\frac{S}{u}$ меньше или равно 12, или нет.

Найдем v из уравнения (1), $v=\frac{S}{5}$, и подставим $\frac{S}{5}$ вместо v в уравнение (2): получим

$$\frac{S}{u}=\frac{S}{\frac{S}{5}-u}+\frac{S}{\frac{S}{5}+u}$$

или

$$t=\frac{t}{\frac{t}{5}-1}+\frac{t}{\frac{t}{5}+1},$$

где $t=\frac{S}{u}$.

Это уравнение после упрощений приводится к виду

$$t^2-10t-25=0.$$

Корни этого уравнения действительны и разных знаков. Положительный корень $t=5+\sqrt{50}$. Таким образом, время, затраченное плотом на путь из A в B, равно $5+\sqrt{50}$ *час*.

Так как $5+\sqrt{50}=5+5\sqrt{2}>5+5\cdot 1{,}41=12{,}05$, то время, затраченное плотом на путь из A в B, больше 12 *час*. Значит, прибыть в город B к 9 *час* вечера (того же дня) лодка и плот не успеют. Ответ: не успели.

541. Пусть скорость первого автобуса v_1 *км/мин*, а второго v_2 *км/мин*, и пусть расстояние от пункта A до пункта B равно S *км*.

Пусть t *мин* есть время, затраченное автобусами в первый раз на путь до встречи. В первый раз до встречи первый автобус проехал v_1t *км*, второй v_2t *км*, а в сумме они проехали S *км*

$$S=v_1t+v_2t. \qquad (1)$$

Во второй раз скорость первого автобуса была $2v_1$ *км/мин*, а второго прежняя, на путь до встречи они затратили $t-56$ *мин*

$$S=2v_1(t-56)+v_2(t-56). \qquad (2)$$

Наконец, если бы скорость первого автобуса была прежней, а второго $2v_2$ *км/мин*, то время, затраченное ими на путь до встречи, равно $t-65$ *мин*:

$$S=v_1(t-65)+2v_2(t-65). \qquad (3)$$

Пусть время до встречи в случае, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов, равно x *мин*, тогда

$$S = 2xv_1 + 2xv_2. \tag{4}$$

Итак, мы получили систему четырех уравнений с пятью неизвестными. Из этой системы нужно найти лишь неизвестные t и x. Из уравнений (1) и (4) имеем

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2}, \quad x = \frac{S}{2(v_1 + v_2)}.$$

Следовательно, $t = 2x$.

Перепишем уравнения (1)—(3) следующим образом:

$$S = (v_1 + v_2)\, t, \tag{1'}$$

$$S = (2v_1 + v_2)(t - 56), \tag{2'}$$

$$S = (v_1 + 2v_2)(t - 65). \tag{3'}$$

Исключая отсюда t, получим систему двух уравнений:

$$\frac{S}{2v_1 + v_2} = \frac{S}{v_1 + v_2} - 56,$$

$$\frac{S}{v_1 + 2v_2} = \frac{S}{v_1 + v_2} - 65.$$

Перепишем эту систему так:

$$\frac{Sv_1}{(2v_1 + v_2)(v_1 + v_2)} = 56,$$

$$\frac{Sv_2}{(v_1 + 2v_2)(v_1 + v_2)} = 65.$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получим

$$\frac{v_1(v_1 + 2v_2)}{v_2(2v_1 + v_2)} = \frac{56}{65},$$

или

$$56\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 18\,\frac{v_2}{v_1} - 65 = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни разных знаков. Его положительный корень $\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{4}$. Подставляя значение $v_2 = \frac{5}{4} v_1$, например, в уравнение (4) получим

$$\frac{Sv_1}{\left(2v_1 + \frac{5}{4} v_1\right)\left(v_1 + \frac{5}{4} v_1\right)} = 56,$$

откуда $S=\frac{819}{2}v_1$.

Теперь находим $x=\frac{S}{2(v_1+v_2)}=\frac{819v_1}{2\cdot 2\left(v_1+\frac{5}{4}v_1\right)}=91$.

Итак, $x=1$ *час* 31 *мин*, значит $t=3$ *час* 2 *мин*.

В задаче требуется узнать, когда встретились бы автобусы, если их скорость увеличить вдвое? Для этого надо от 12 *час* отнять $(t-x)$ *час*. Таким образом, автобусы встретились бы в 10 *час* 29 *мин*. Ответ: 10 *час* 29 *мин*.

542. Пусть скорость реки v *км/час*, скорость первой лодки в стоячей воде v_1 *км/час*, скорость второй лодки в стоячей воде v_2 *км/час*, и пусть расстояние между городами A и B равно S *км*. На путь до первой встречи первая лодка затрачивает $\frac{S}{2(v_1-v)}$ *час*, а вторая $\frac{S}{2(v_2+v)}$ *час*, откуда получаем первое уравнение

$$\frac{S}{2(v_2+v)}=\frac{S}{2(v_1-v)}. \qquad (1)$$

На путь до второй встречи первая лодка затрачивает $\frac{S}{v_1-v}+\frac{\frac{S}{2}+20}{v_1+v}$ *час*, считая от момента ее выезда из A, а вторая $\frac{S}{v_2+v}+\frac{S/2-20}{v_2-v}$ *час*, отсюда получаем второе уравнение:

$$\frac{S}{v_1-v}+\frac{\frac{S}{2}+20}{v_1+v}=\frac{S}{v_2+v}+\frac{\frac{S}{2}-20}{v_2-v}. \qquad (2)$$

Если бы обе лодки поплыли одновременно из пункта A и B против течения, то на путь до встречи первая лодка затратила бы $\frac{S+150}{v_1-v}$, а вторая $\frac{150}{v_2-v}$; таким образом, получаем третье уравнение:

$$\frac{S+150}{v_1-v}=\frac{150}{v_2-v}. \qquad (3)$$

Перепишем систему уравнений (1), (2) и (3) так:

$$v_2=v_1-2v, \qquad (1)$$

$$\frac{S+40}{v_1+v}=\frac{S-40}{v_2-v}, \qquad (2)$$

$$S=150\,\frac{v_1-v_2}{v_2-v}. \qquad (3)$$

Отсюда

$$\frac{S+40}{v_1+v}=\frac{S-40}{v_1-3v}, \tag{4}$$

$$S=150\frac{2v}{v_1-3v}. \tag{5}$$

Из уравнения (4) находим

$$S=20\frac{v_1-v}{v}. \tag{6}$$

Из уравнений (5) и (6) имеем $\frac{20(v_1-v)}{v}=150\frac{2v}{v_1-3v}$, или $\left(\frac{v_1}{v}\right)^2-4\frac{v_1}{v}-12=0$. Это уравнение имеет действительные корни разных знаков; положительный корень $\frac{v_1}{v}=6$. Но тогда $S=\frac{20(v_1-v)}{v}=\frac{20\cdot 5v}{v}=100$.

Ответ: 100 *км*.

543. Пусть S_1 и S_2 — расстояния от озера соответственно до портов M и N, а S_3 — длина пути, пролегающего по озеру. По условию задачи $S_1+S_2+S_3=S$. Очевидно, что время t, затраченное пароходом на путь от M до N, равно

$$\frac{S_1}{v+v_1}+\frac{S_3}{v}+\frac{S_2}{v-v_2};$$

аналогично, подсчитывается время и на обратный путь. Таким образом, получается система трех уравнений с тремя неизвестными S_1, S_2, S_3:

$$\begin{cases} S_1+S_2+S_3=S, \\ \frac{S_1}{v+v_1}+\frac{S_3}{v}+\frac{S_2}{v-v_2}=t, \\ \frac{S_1}{v-v_1}+\frac{S_3}{v}+\frac{S_2}{v+v_2}=t, \end{cases} \tag{1}$$

из которой нам необходимо определить величину S.

Если учесть, что v, v_1, v_2, S, t — заданные постоянные, то система (1) есть система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Такая система может быть решена, например, обычным путем — последовательным исключением неизвестных. Однако этот путь решения очень трудоемок — он сопряжен с громоздкими выкладками, так как коэффициенты системы (1) довольно сложны.

Поэтому мы решим систему (1) несколько более искусственным, но зато более коротким способом. Второе уравнение этой системы можно переписать в виде

$$v^2S_1 - vv_2S_1 + v^2S_3 + (v_1 - v_2)\,vS_3 - v_1v_2S_3 + v^2S_2 + vv_1S_2 = \\ = tv\,(v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1v_2).$$

Заменяя в левой части сумму $v^2S_1 + v^2S_3 + v^2S_2$ через v^2S на основании первого уравнения системы и группируя члены, получаем

$$v^2S + v\,[v_1S_2 - v_2S_1 + (v_1 - v_2)\,S_3] - v_1v_2S_3 = \\ = tv\,(v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1v_2). \qquad (2)$$

Точно так же можно преобразовать и третье уравнение нашей системы:

$$v^2S + v\,[v_2S_1 - v_1S_2 + (v_2 - v_1)\,S_3] - v_2v_1S_3 = \\ = tv\,(v^2 + vv_2 - vv_1 - v_2v_1). \qquad (3)$$

Складывая равенства (2) и (3), будем иметь:

$$2v^2S - 2v_1v_2S_3 = tv\,(2v^2 - 2v_1v_2).$$

Откуда следует, что искомый путь по озеру

$$S_3 = v\,\frac{vS - v^2t + v_1v_2t}{v_1v_2}.$$

Ответ: $vt + \frac{v^2}{v_1v_2}\,(S - vt)$.

544. Ответ: скорость «Победы» 80 *км/час*, скорость «Москвича» — 60 *км/час*, скорость мотоцикла 40 *км/час*.

545. Пусть скорость автомобиля u *км/час*, мотоцикла v *км/час*, расстояние AB равно S *км* и t *час* — время от начала движения до встречи автомобиля с первым мотоциклистом. В этих обозначениях легко составляется система уравнений:

$$\begin{cases} tu + tv = S, \\ \dfrac{\frac{2}{9}S}{u} = \dfrac{vt - \frac{2}{9}S}{v}, \\ 3\,(u - 20) + 3v = S, \\ \dfrac{72}{u - 20} = \dfrac{3v - 72}{v}. \end{cases}$$

Исключив из этой системы вспомогательную неизвестную t и проведя необходимые упрощения, получаем систему:

$$S = 3(u + v - 20),$$
$$9uv = 2(u + v)^2,$$
$$v(u - 20) = 24(u + v - 20).$$

Воспользуемся тем, что второе уравнение системы однородно. Учитывая, что по условию задачи $v \neq 0$, из второго уравнения легко находим отношение $\frac{u}{v}$. Получаем, что $\frac{u}{v}$ равно либо 2, либо $\frac{1}{2}$. Поскольку по условию задачи $u > v$, то $u = 2v$. Подставляя это значение u в третье уравнение, находим, что либо $v = 40$, тогда $u = 80$, либо $v = 6$, а тогда $u = 12$. Так как по условию задачи $u > 20$, то остается лишь $v = 40$ и $u = 80$. Теперь из первого уравнения системы получаем ответ: расстояние AB равно 300 *км*. Ответ: 300 *км*.

546. 40 *мин*. **547.** 50 *км*. **548.** В данной задаче объем бассейна можно принять за единицу (единица времени уже имеется в условии — *час*). Отметим, что прежде чем заменить единицей неизвестное, нужно убедиться в возможности сделать это. При выборе неизвестных следует руководствоваться правилом, что через введенные величины условие задачи должно записываться наиболее удобно. С этой целью выбираем в качестве неизвестных скорости, с которыми трубы наливают воду в бассейн, соответственно: V_1 ед. *объема/час* (но не *л/час*, так как единица объема уже выбрана), V_2 ед. *объема/час*, V_3 ед. *объема/час*. Тогда, согласно условию, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V_1 + V_2} + \dfrac{16}{3} = \dfrac{1}{V_1 + V_2}, & (1) \\ \dfrac{1}{V_1 - V_3} + \dfrac{21}{16} = \dfrac{2}{V_1 + V_2}. & (2) \end{cases}$$

Искомое время наполнения бассейна первой и второй трубами $t = \frac{1}{V_1 + V_2}$. Кроме того, по условию, время наполнения бассейна первой и третьей трубами $\frac{1}{V_1 + V_2} > 8$. Тогда из первого уравнения системы находим $t > 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$. Итак, имеется система двух уравнений с тремя неизвест-

ными и дополнительным условием $t > \frac{8}{3}$. Ясно, что этого недостаточно для определения всех трех неизвестных, но в задаче требуется определить лишь их комбинацию, а именно величину $t = \frac{1}{V_1 + V_2}$. Это легко сделать. Обозначим $V_1 + V_2 = U$, $V_1 + V_3 = V$. Тогда $V_2 - V_3 = U - V$ и система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{U} + \frac{16}{3} = \frac{1}{V}, \\ \frac{1}{U - V} + \frac{21}{16} = \frac{2}{U}. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения V и подставляя во второе, получим для U квадратное уравнение

$$21U^2 - 16U + 3 = 0.$$

Его корни $U_1 = 3/7$, $U_2 = 1/3$. Отсюда находим соответствующие значения t: $t_1 = 7/3$, $t_2 = 3$. Согласно условию $t > \frac{8}{3}$ нужно взять лишь второе решение $t = 3$, которое дает ответ задачи. Ответ: за 3 *час*.

549. Своеобразие этой задачи заключается в том, что при ее решении неизвестна окончательная схема движения.

Пусть D — точка остановки машины (рис. 50), так что $DB > 18$ *км*, $DC > 15$ *км*.

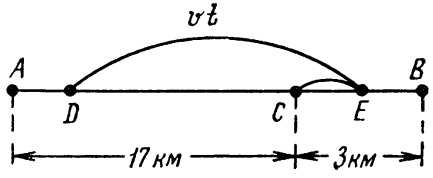


Рис. 50

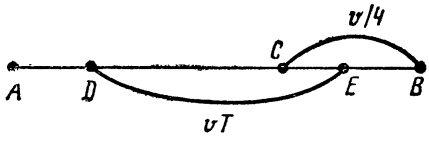


Рис. 51

Обозначим через v — скорость машины, $v/4$ — скорость велосипедиста, $v/8$ — скорость пешехода.

Поскольку скорость велосипедиста больше, чем скорость пешехода, то возможны две ситуации: либо машина раньше поравняется с пешеходом (обязательно на пути из C в B), либо раньше поравняется с велосипедистом (обязательно на его пути из B к A).

Рассмотрим, возможен ли первый случай. Пусть t — время до встречи машины и пешехода, а E точка этой встречи (рис. 51).

$$DC = DE - CE = vt - \frac{v}{8}t > 15\ км,$$

отсюда $vt > \frac{120}{7}\ км$. При этом пешеход прошел $CE = \frac{v}{8}t > \frac{15}{17} = 2\frac{1}{7}\ км$, а велосипедист проехал расстояние $\frac{v}{4}t > \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}\ км$. Очевидно, этот случай невозможен, так как велосипедист проехал все расстояние $CB = 3\ км$ и еще отрезок $1\frac{2}{7}\ км$ в сторону A больший, чем $BE\left(BE = 3 - CE < \frac{2}{7}\ км\right)$. Значит машина раньше поравнялась бы с велосипедистом.

Рассмотрим второй случай.

Пусть T — время до встречи машины и велосипедиста. Тогда (рис. 51)

$$DB = vT + \frac{v}{4}T - 3\ км > 18\ км;\ vT > \frac{84}{5} = 16{,}8\ км.$$

За это время велосипедист проехал расстояние

$$\frac{v}{4}T > \frac{21}{5} = 4{,}2\ км,$$

а пешеход прошел расстояние

$$\frac{v}{8}T > \frac{21}{10} = 2{,}1\ км.$$

Сравнив эти результаты, видим, что к моменту встречи машины и велосипедиста пешеход отошел от C более чем на 2,1 $км$, а велосипедист отъехал от B больше чем на 1,2 $км$, а значит, прежде чем поравняться с машиной встретился с пешеходом.

Выполняется рассматриваемый случай. Ответ: машина раньше поравняется с велосипедистом.

550. 16 *час* 30 *мин*. **551.** 4 *час*. **552.** 13 *час*. **553.** Указание. Обозначим через t *час* время, которое потребовалось мотоциклисту, чтобы догнать велосипедиста. Расстояние S *км* до момента обгона мотоциклистом велосипедист проехал за $(t+2)$ *час*. Так как мотоциклист двигался равнозамедленно, то его скорость равна $v = 22 - 2t$, а расстояние, пройденное им к моменту t, $S = 22t - t^2$.

Согласно условию

$$v_в(t+2)=22t-t^2, \qquad (1)$$
$$v_в=12\,км/час.$$

Из уравнения (1) получаем

$$12(t+2)=22t-t^2,$$
$$t^2-10t+24=0,$$
$$t_1=6, \quad t_2=4.$$

Расстояния, соответствующие найденным временам, суть $S_1=12\cdot 8=96$, $S_2=12\cdot 6=72$, и на таких расстояниях от пункта A велосипедист будет находиться соответственно к 17 *час* и 15 *час*. Дальнейшее решение аналогично задаче 549. Ответ: успеет.

554. Так как величины с размерностью длины не входят в условие задачи, то расстояние между пунктами A и B можно обозначить через 1: $AB=1$. Пусть $S_1=AC_1$ и $S_2=BC_2$ (рис. 52) — соответственно расстояния от пунктов A и B до места обгона и встречи автомобилиста и велосипедиста; v_a *ед. дл./час*, и $v_в$ *ед. дл./час* — скорость автомобилиста и велосипедиста. Тогда условия задачи можно записать в виде следующей системы уравнений и неравенств:

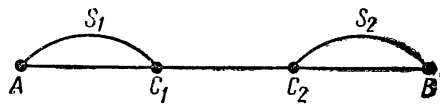


Рис. 52

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{v_в}=\dfrac{S_1}{v_a}+2 & (1)\\ 0<\dfrac{S_1}{v_в}\leqslant 3, & (2)\\ \dfrac{1-S_1+S_2}{v_a}=\dfrac{1-S_1-S_2}{v_в}, & (3)\\ 6v_a=2, \quad \dfrac{1-S_1+S_2}{v_a}\leqslant 3. & (4) \end{cases}$$

Требуется определить время движения велосипедиста от A до B $t=\dfrac{AB}{v_в}=\dfrac{1}{v_в}$. Принимая во внимание, что $v_a=\dfrac{1}{3}$, уравнение (1) системы можно записать в виде

$$S_1(t-3)=2. \qquad (1')$$

С учетом (1′) из неравенства (2) получаем

$$0<3S_1+2\leqslant 3, \quad 0<S_1\leqslant \frac{1}{3}. \qquad (2')$$

Исключая $t=\frac{1}{v_в}$ из уравнений (1′) и (3), после преобразований найдем

$$S_2=\frac{1-S_1}{1+3S_1}. \qquad (5)$$

Далее, из неравенства (4) следует $S_2 \leqslant S_1$ или, с учетом (5) и неравенства $S_1>0$, получаем $\frac{1-S_1}{1+3S_1} \leqslant S_1$, $3S_1^2+2S_1-1 \geqslant 0$,

$$S_1 \geqslant \frac{1}{3}. \qquad (6)$$

Сравнивая (2′) и (6), находим, что $S_1=\frac{1}{3}$.

А тогда из (1′) найдем $t=\frac{2}{S_1}+3=9$.

Ответ: велосипедист прибывает в пункт B в 18 *час*.

555. Пусть S_0 — первоначальное расстояние между охотниками; v, u — соответственно скорости охотников и собаки. Обозначив через t_1 и t_1' соответственно время до встречи собаки со вторым охотником и время ее возвращения к первому, найдем

$$t_1=\frac{S_0}{u+v},\quad t_1'=\frac{S_0-2vt_1}{u+v}=t_1-\frac{2v}{u+v}\cdot t_1=t_1\frac{u-v}{u+v}.$$

Учитывая, что на первую пробежку собака затратила 9 *мин*, получим уравнение $t_1+t_1'=9$

или $t_1\left(1+\frac{u-v}{u+v}\right)=9$, $t_1\frac{2u}{u+v}=9$,

$$\frac{S_0}{u+v}\cdot\frac{2u}{u+v}=9. \qquad (1)$$

Принимая во внимание уравнение (1), аналогично можно подсчитать время второй пробежки собаки. Имеем уравнение

$$\frac{S_0-18v}{u+v}\cdot\frac{2u}{u+v}=4. \qquad (2)$$

Система уравнений (1)—(2) является неопределенной: два уравнения с тремя неизвестными S_0, u, v. Но тем не менее составленная система позволяет решить задачу, так как требуется найти не все неизвестные, а их комбинацию $\frac{u}{v}$. Поэтому можно исключить v, поделив

на v числитель и знаменатель каждого сомножителя в левых частях уравнений (1), (2) и введя новые неизвестные $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{S_0}{v}$.

Получаем

$$\begin{cases} \frac{y}{x+1}\cdot\frac{2x}{x+1}=9, \\ \frac{y-18}{x+1}\cdot\frac{2x}{x+1}=4. \end{cases}$$

Поделив почленно первое уравнение этой системы на второе, находим $y=\frac{18\cdot 9}{5}$. Тогда для определения x (искомого отношения скоростей) получаем уравнение

$$\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{5}{18},\quad 5x^2-26x+5=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$.

Второй корень x_2 является посторонним, так как по условию скорость собаки больше скорости охотников: $x>1$. Ответ: скорость собаки в 5 раз больше скорости охотника.

556. 4 *км/час*.

557. Для удобства составления уравнений целесообразно ввести скорости лодок и реки v_1, v_2, u, а также расстояние, например $DA=S$.

Используя условие задачи, составим систему 2-х уравнений с 4-мя неизвестными.

$$\begin{cases} \frac{3S}{v_1}:\left(\frac{7}{4}\frac{S}{v_1-u}+\frac{S}{v_1+u}\right)=\frac{45}{47}, \\ \frac{3S}{v_2}:\left(\frac{7}{4}\frac{S}{v_2-u}+\frac{3}{4}\frac{S}{v_2+u}\right)=\frac{16}{17}. \end{cases}$$

Однако в задаче требуется сравнить лишь времена движений лодок t_1 и t_2:

$$t_1=\frac{3S}{v_1}+\frac{7}{4}\frac{S}{v_1-u}+\frac{S}{v_1+u},$$

$$t_2=\frac{3S}{v_2}+\frac{7}{4}\frac{S}{v_2-u}+\frac{3}{4}\frac{S}{v_2+u}.$$

Из системы находим, что $v_1=4u$, $v_2=3u$ и, далее, $t_1=1\frac{8}{15}\frac{S}{u}$, $t_2=2\frac{1}{16}\frac{S}{u}$, т. е. $t_2>t_1$. Ответ: первая.

558. 60 *км/час*.

559. Напомним, что при равнозамедленном движении справедливо соотношение:

скорость $$v = v_0 + at; \tag{1}$$

расстояние $$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{2}$$

(v_0 — начальная скорость, $a < 0$ — ускорение, t — время). В нашем случае $v_0 = 24$ *м/сек*. Времена t_1 и t_2 торможения автомобилей до полной остановки (т. е. когда $v = 0$) определяем из равенства (1)

$$v_0 + a_1 t_1 = 0 \text{ или } t_1 = -\frac{v_0}{a_1} = 6 \text{ сек}, \tag{3}$$

$$v_0 + a_2 t_2 = 0 \text{ или } t_2 = -\frac{24}{a_2}.$$

К моменту времени, когда задний автомобиль начал торможение, расстояние между автомобилями было равно

$$S_0 = 20 - 2v_0 + \left(2v_0 + \frac{2^2 a_1}{2}\right) = 20 - 8 = 12 \text{ (м)}, \tag{4}$$

а скорость переднего автомобиля

$$v_{01} = v_0 + 2a_1 = 24 - 8 = 16 \text{ (м/сек)}. \tag{5}$$

Обозначим через t *сек* время, прошедшее с начала торможения заднего автомобиля. Подсчитаем расстояние $S(t)$ между автомобилями в произвольный момент времени t:

$$S(t) = S_0 - S_2(t) + S_1(t). \tag{6}$$

Здесь

$$S_1(t) = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} \text{ и } S_2(t) = v_0 t + \frac{a_2 t^2}{2} \tag{7}$$

суть расстояния, пройденные передним и задним автомобилями к моменту времени t.

После преобразований и подстановки величин (4) и (5) в равенства (6) и (7), находим

$$S(t) = 12 - 24t - \frac{a_2 t^2}{2} + 16t - 2t^2 = at^2 - 8t + 12 =$$

$$= a\left(t - \frac{4}{a}\right)^2 - \frac{16}{a} + 12, \tag{8}$$

где введено обозначение $a = -\left(\frac{a_2}{2} + 2\right)$.

Квадратный трехчлен (8) принимает наименьшее значение $S_{\min}$ лишь при условии $a>0$, т. е. $\frac{a_2}{2}+2<0$ и $a_2<-4$. В этом случае наименьшее значение функции (8) равно

$$S_{\min}=-\frac{16}{a}+12$$

и достигается при $t=t_0=4/a$.

Согласно условию задачи, наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равно 4 *м*. Имеем поэтому

$$-\frac{16}{a}+12=4,\quad -\frac{16\cdot 2}{a+4}=8.$$

Отсюда находим $a_2=-8$.

Время торможения заднего автомобиля находим из равенства (3)

$$t_2=\frac{24}{8}=3\ сек.$$

Ответ: второй автомобиль остановился раньше: $a_2=-8\ м/сек^2$.

560. Если S_1 *руб*, S_2 *руб* — искомые суммы денег, а t — срок, на который положена в сберкассу первая сумма, то условия задачи можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} S_1+S_2=5000, \\ 0{,}03S_1t=60, \\ 0{,}03\left(t+\frac{1}{3}\right)S_2=60. \end{cases}$$

Исключая S_2 и t, получим уравнение

$$S_1^2+7000\,S_1-30\cdot 10^6=0,$$

единственный положительный корень которого $S_1=3000$ и дает решение задачи. Ответ: 3 000 *руб*, 2 000 *руб*, 8 месяцев, 1 год.

561. Обозначим через v *л* объем каждого из сосудов. После первого отливания в первом сосуде осталось $v-a$ *л* спирта. После того как в сосуд добавили a *л* воды, крепость спирта, т. е. отношение объема спирта в первом сосуде к объему смеси спирта с водой, стала равной $\frac{v-a}{v}$. Во второй раз из первого сосуда отлили a *л*, в которых содержалось $\frac{v-a}{v}a$ *л* спирта и, значит, в первом

сосуде осталось $v-a-\frac{v-a}{v}a=\frac{(v-a)^2}{v}$ литров спирта. Крепость смеси в первом сосуде стала равной $\frac{(v-a)^2}{v^2}$. После того, как из второго сосуда отлили $2a$ л спирта, в нем осталось $v-2a$ л спирта, и когда второй сосуд дополнили $2a$ литрами воды, то крепость смеси оказалась равной $\frac{V-2a}{V}$.

Во второй раз из второго сосуда отлили $2a$ литров смеси, содержащей $\frac{V-2a}{V}2a$ литров спирта, и в нем осталось $v-2a-\frac{(V-2a)\,2a}{V}=\frac{(V-2a)^2}{V}$ литров спирта. Крепость смеси во втором сосуде оказалась равной $\frac{(V-2a)^2}{V^2}$.

По условию задачи

$$\frac{(V-a)^2}{V^2}:\frac{(V-2a)^2}{V^2}=\frac{25}{16}.$$

После упрощения получим уравнение $9V^2-68aV+84a^2=0$,
откуда

$$V_1=6a,\ V_2=\frac{14}{9}a.$$

Так как $V_2-2a=\frac{14}{9}a-2a<0$, то $V=\frac{14}{9}a$ не является решением данной задачи.

Таким образом, $V=6a$ и, значит, $a:V=1:6$. Ответ: a литров составляет 1/6 объема сосуда.

562. Обозначим через x вес одного из отрезанных кусков, через u и v — количество меди в 1 кг соответственно первого и второго кусков. Тогда в остатке первого куска содержится $(m-x)\,u$ кг меди; в остатке второго куска $(u-x)\,v$ кг меди; в первом отрезанном куске xu кг меди и, наконец, во втором отрезанном куске xv кг меди.

После того как куски снова сплавили, в первом куске оказалось $(m-x)u+xv$ кг меди, а во втором $(u-x)\,v+xu$ кг меди. Содержание меди в первом куске (в процентах) $100\frac{(m-x)\,u+xv}{m}\%$, а во втором $100\frac{(u-x)v+xu}{n}\%$.

По условию имеем уравнение

$$100\frac{(m-x)\,u+xv}{m}=100\frac{(u-x)\,v+xu}{n},$$

или

$$mnu-xn\,(u-v)=mnv+xm\,(u-v),$$

или

$$x(m+n)(u-v)=mn(u-v).$$

По условию процентное содержание меди в данных кусках различно, т. е. $u \neq v$. Поэтому из предыдущего уравнения находим. Ответ: $x=\frac{mn}{m+n}$.

563. Пусть V_1 и V_2 — объемы жидкостей, составляющих смесь. Тогда удельный вес смеси (отношение веса смеси к объему смеси) равен

$$\gamma=\frac{2V_1+3V_2}{V_1+V_2}.$$

Для определения V_1 и V_2 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 50\gamma=3V_2, \\ 4\gamma\cdot 10=2V_1, \\ \gamma=\frac{2V_1+3V_2}{V_1+V_2}. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $\frac{V_2}{V_1}=\frac{5}{6}$. Тогда

$$\gamma=\frac{2+3\frac{V_2}{V_1}}{1+\frac{V_2}{V_1}}=\frac{27}{11},\ V_1=20\gamma=\frac{20\cdot 27}{11},\ V_2=\frac{50}{3}\gamma=\frac{450}{11}.$$

Вес жидкостей непосредственно определяется $P_1=2V_1=\frac{1080}{11}$, $P_2=3V_2=\frac{1350}{11}$.

Ответ: $\frac{1080}{11}$ *г*, $\frac{1350}{11}$ *г*, $\frac{27}{11}$ *г/см*^{3}.

564. 20:6:3. **565.** 18 лет.

566. 1°. Пусть у школьника было n монет достоинством в 15 *коп* и k монет достоинством в 20 *коп*, причем из условия задачи $n<k$. За билет в кино школьник заплатил не менее 30 *коп* (15 + 15). За обед школьник заплатил в два раза дороже, чем за билет в кино, т. е. не менее 60 *коп*, но известно, что за обед школьник отдал 3 монеты, т. е. заплатил не более 60 *коп*. Отсюда ясно, что за обед школьник заплатил 60 *коп* (20 + 20 + 20), а за билет в кино 30 *коп* (15 + 15).

После того как школьник оплатил билет в кино и обед, у него осталось 60 *коп*. Эти 60 *коп* могут составить 4 монеты достоинством в 15 *коп*, или 3 монеты достоинством в 20 *коп*.

Если бы у него осталось 4 монеты достоинством в 15 *коп* каждая, то вначале у него было бы 6 монет достоинством в 15 *коп* и 3 монеты достоинством в 20 *коп*, т. е. $n > k$, что противоречит условию задачи. Значит, у школьника осталось 3 монеты достоинством в 20 *коп*.

Таким образом, у школьника вначале было 2 монеты достоинством в 15 *коп* и 6 монет достоинством в 20 *коп*. Ответ: 2 монеты по 15 *коп* и 6 монет по 20 *коп*.

2°. Пусть портфель стоит x *руб*, авторучка y *руб*, а книга z *руб*.

Первое уравнение составляется из условия, что покупка стоит 8 *руб*:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=8. \tag{1}$$

Аналогично составляется второе уравнение:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12. \tag{2}$$

Упрощая уравнения (1) и (2), будем иметь

$$\begin{cases} 6x+3y+4z=144, \\ 2x+5y+4z=80. \end{cases} \tag{3}$$

Складывая почленно, получим $x+y+z=28$.
Таким образом, вся покупка стоила 28 *руб*. Вычитая почленно из второго уравнения системы (3) первое, получим

$$2x-y=32. \tag{4}$$

Предположим, что $x \leqslant y$, тогда уравнение (4) можно переписать так:

$$x=32+y-x.$$

В этом случае $x \geqslant 32$ (так как, по предположению, $y-x \geqslant 0$). Но если $x \geqslant 32$, то такое x не может удовлетворять уравнению (2) $\left(\text{так как } \frac{x}{2} \geqslant 16, \text{ а числа } y, z \text{ положительны}\right)$, значит, этот случай невозможен.

Таким образом, остается лишь случай $x > y$, т. е. портфель дороже авторучки.

Выяснить, что дороже, портфель или авторучка, можно и так: из системы (3) находим, что $y=8-\frac{2}{3}z$, а $x=20-\frac{1}{3}z$, так как $x=8-\frac{2}{3}z+12+\frac{1}{3}z=y+12+\frac{1}{3}z$ и $z>0$, то ясно, что $x > y$.

567. Характерной особенностью этой задачи является сведение к решению лишь одного неравенства (а не уравнения). Но тем не менее задача имеет единственное решение, поскольку неравенство решается в целых числах.

Действительно, пусть было куплено x тетрадей; тогда согласно условию имеем:

$$\frac{6,6}{x+4}x+\frac{0,72}{x}(x+4)<4,44,$$

причем x — натуральное число по смыслу задачи. После упрощений из последнего неравенства получаем

$$2,88x^2-12x+11,52<0,$$
$$6x^2-25x+24<0,$$
$$\frac{3}{2}<x<\frac{8}{3}.$$

В последнем интервале содержится лишь одно целое число: $x=2$, оно и дает решение задачи. Ответ: куплено 2 тетради.

568. Пусть куплено n книг стоимостью x *руб* каждая, m альбомов по y *руб* за каждый. Тогда условия задачи дают соотношения:

1) $nx=10,56$, 3) $n-m=6$,
2) $m\cdot y=0,56$, 4) $x-y>1$.

Из третьего уравнения видно, что число купленных книг $n>6$. Выражая x, y, m из первых трех уравнений и подставляя в неравенство, получим $\frac{10,56}{n}-\frac{0,56}{n-6}>1$. Учитывая, что $n>6$, имеем неравенство

$$n^2-16n+63,36<0,$$
$$8-0,8<n<8+0,8.$$

Поскольку n — число целое, находим, что куплено 8 книг. Ответ: купили 8 книг.

569. Пусть A *м* — общее количество ткани, а в первом куске содержится x_1-ая часть (от общего количества A), во втором куске — x_2-ая часть, в третьем куске — x_3-ая часть $\left(\text{причем } x_3=\frac{1}{3}\right)$. По условию, продано $\left(A-\frac{A}{2}x_2\right)$ ткани. Искомое процентное содержание проданной ткани x

равно отношению количества проданной ткани ко всей ткани, выраженному в процентах, т. е.

$$x=\frac{A-\frac{A}{2}x_2}{A}\cdot 100\%=\left(1-\frac{x_2}{2}\right)\cdot 100\%.$$

Для определения x_2 остальные условия задачи запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1A+x_2A+\frac{1}{3}A=A, \\ \frac{1}{2}x_1A+\frac{2}{3}x_2A+\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}x_2A=A. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2}{3}, \\ \frac{x_1}{2}+\frac{7}{6}x_2=\frac{2}{3}, \end{cases}$ откуда находим $x_2=\frac{1}{2}$. Тогда

$$x=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot 100\%=75\%.$$

Ответ: продано 75% ткани.

Замечание. Поскольку единица длины ткани не входит в условие задачи, можно сразу положить $A=1$.

570. 12 листов. **571.** За $\frac{60}{7}$ мин. **572.** За $\frac{12}{7}$ дня.

573. После введения неизвестных V *м*^{3} — искомый объем бака, V_1 *м*^{3}/*час* и V_2 *м*^{3}/*час* — производительности каждого насоса из первой и второй групп насосов соответственно условия задачи приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} 3V_1\frac{5}{2}+(3V_1+2V_2)\,1=V-15, \\ (3V_1+2V_2)\cdot 1=15, \\ 40V_2=V. \end{cases}$$

Исключая из второго и третьего уравнений системы V_2 и подставляя выражения для V_1 через V в первое уравнение, находим.

Ответ: объем бака равен 60 *м*^{3}.

574. 10 деталей.

575. Пусть x, y, z, u — соответственно количество „двоек“, „троек“, „четверок“ и „пятерок“. Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} x+y+z+u=30, & (1) \\ 2x+3y+4z+5u=93, & (2) \\ u<y<z, \end{cases}$$

причем u делится на 2, а z — на 10.

Очевидно, согласно условию, нельзя взять $z=0$, так как при $z=0$ условие $y<z$ не может быть выполнено. Далее, из уравнений (1) и (2) следует:

$$y+2z+3u=33, \tag{3}$$

а отсюда следует, что $z\neq 20$. Таким образом, $z=10$ — количество „четверок", полученных на экзамене, равно 10.

Теперь уравнение (3) принимает вид:

$$y=13-3u.$$

Очевидно, $u\neq 0$, так как если $u=0$, то $y=13>7$, что противоречит условию. Так как u четное, то можно взять $u=2$, тогда $y=7$ (если же взять $u=4$, то $y=1<u$, что противоречит условию задачи).

Итак, количество „троек" равно 7, а количество „пятерок" равно 2. Тогда, количество „двоек" равно 11.

576. 2 *м*³/*час*.

577. 29%. **578.** Объем первого бака 3000 *л*, объем второго — 3900 *л*; 1-й насос вливает 100 *л*/*мин*, 2-й насос выливает 40 *л*/*мин*. **579.** 2 *часа* 30 *мин*.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1°. Тригонометрические уравнения

580. Используя формулы $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, получим квадратное уравнение относительно $\cos 2x$

$$4-(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)-\frac{5}{3}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=0,$$

$$2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0.$$

Отсюда имеем

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$,

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$,

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$;

2) $\cos 2x = -1$,

$2x = \pi + 2\pi k$,

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ: 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

581. Представляя $\cos x$ как $1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, получим квадратное уравнение относительно $\sin \frac{x}{2}$

$$1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = 1.$$

Отсюда $\sin \frac{x}{2} = 0$,

1) $\frac{x}{2} = \pi k$,

$x = 2\pi k$,

2) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{x}{2} = (-1)^{k+1} \frac{3\pi}{4} + \pi k$,

$x = (-1)^{k+1} \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

Ответ: 1) $x = 2\pi k$, 2) $x = (-1)^{k+1} \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

582. Используя формулы $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, получаем

$$2(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) - 2\cos^2 2x + 1 = 1,$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

583. Так как $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$, то

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x.$$

Отсюда следует

1) $\sin x + \cos x = 0$,

$\operatorname{tg} x = -1$,

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$;

2) $\sin x + \cos x = 1$,

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

а) $x = 2k\pi$, б) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Ответ: 1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 3) $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

584. С помощью формул

$$\sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1 - \cos \frac{2x}{3}}{2}; \quad \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1 + \cos \frac{2x}{3}}{2}$$

это уравнение приводится к квадратному относительно $\cos \frac{2x}{3}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

585. С помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

уравнение приводится к квадратному относительно $\cos 2x$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

586. Решается аналогично задаче 584.

Ответ: 1) $x = \pi k$, 2) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

587. Решается аналогично предыдущей задаче.

Ответ: 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

588. Представляя $\sin\frac{x}{2}$ как $2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$, получим

$7\cos\frac{x}{4}=4\cos^3\frac{x}{4}+8\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}$.

Отсюда находим

а) $\cos\frac{x}{4}=0$,

$\frac{x}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,

$x=2\pi+4k\pi$;

б) $4\cos^2\frac{x}{4}+8\sin\frac{x}{4}-7=0$,

$4\sin^2\frac{x}{4}-8\sin\frac{x}{4}+3=0$.

Решение дает лишь уравнение

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Ответ: 1) $x=2\pi+4\pi k$, 2) $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k=0$, ± 1, ± 2 ...

589. Решается аналогично предыдущей задаче.

Ответ: 1) $x=\pi+2k\pi$, 2) $x=(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0$, ± 1, ± 2 ...

590. Используя формулу $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, находим $4\cos^3 x+6\cos^2 x-4\cos x=0$:

а) $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; б) $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$.

Решение дает лишь уравнение $\cos x=\frac{1}{2}$,

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k=0$, ± 1, ± 2 ...

591. Отметив, что $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, запишем уравнение в виде

$$-1=2\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right),$$

$$-1=2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

$$-1=2\cos x,$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$$

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$

592. Отметив, что $\sin x\neq 0$, запишем уравнение в виде $3-2(1-\cos^2 2x)=2\frac{1-\cos 2x}{2}$, $2\cos^2 2x+\cos 2x=0$

а) $\cos 2x=0$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$;

б) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

593. Уравнение можно упростить, записав его в виде $\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$, $1-2\sin^2 x=1-\sin x$,

$$2\sin^2 x-\sin x=0.$$

Решение находится из соотношений

$$1)\ \sin x=0,\quad 2)\ \sin x=1/2,$$

$$x=\pi k;$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

Ответ: 1) $x=\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$, 2) $x=(-1)^n\times$ $\times\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

594. Представим уравнение в виде $2(\cos x-\sin x)\times$ $\times(\cos x+\sin x)=\sqrt{6}(\cos x-\sin x)$

а) $\cos x - \sin x = 0$,

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

б) $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Отсюда находим $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решения можно записать так:

1) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$$x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi;$$

2) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$$

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, 2) $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, 3) $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

595. Указание. Представить левую часть уравнения в виде

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, 2) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

596. Выражая $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$, получим

$$5(\sin x + \cos x) + 3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x) =$$
$$= 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x).$$

Разлагая сумму кубов синуса и косинуса, имеем

$$8(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) =$$
$$= 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x).$$

И далее

$$2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) =$$
$$= \sqrt{2}(1 + \sin x \cdot \cos x);$$

$$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x) = \sqrt{2}(1 + \sin x \cos x).$$

Отсюда

а) $1+\sin x\cdot\cos x=0$,

$2\sin x\cdot\cos x=-2$,

$\sin 2x=-2$, уравнение не имеет решений;

б) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

597. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ **598.** 1) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, 2) $x=\pi k,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

599. Уравнение можно представить в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)=1-\cos x$$

а) $1-\cos x=0$,

$\cos x=1,\ x=2k\pi$;

б) $\operatorname{tg} x=1;\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; 2) $x=2k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2\ldots$

600. Перепишем уравнение, разложив его левую часть на множители

$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cdot\cos x)=1-\sin x\cdot\cos x.$$

Отсюда находим

а) $1-\sin x\cdot\cos x=0$,

$\sin 2x=2$, уравнение не имеет решений,

б) $\sin x+\cos x=1$,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Здесь существуют две группы решений:

1) $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$,

$x=2k\pi$;

2) $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$,

$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Ответ: 1) $x=2k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

601. Указание. Сгруппировав первый и четвертый, а также второй и третий члены в левой части уравнения, разложите ее на множители. Ответ: 1) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, 2) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

602. 1) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, 2) $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

603. Отметим, что допустимы лишь те x, для которых

$$\cos x \neq 0, \ \cos 2x \neq 0, \ \cos 4x \neq 0.$$

Переписав исходное уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 4x-\operatorname{tg} x,$$

разложим обе части на множители:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}=\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 4x}.$$

В области допустимых значений, это уравнение равносильно двум

а) $\sin 3x=0$; $x=\frac{\pi k}{3}$,

б) $\cos 2x-\cos 4x=0$;
$2 \sin x \cdot \sin 3x=0$.

1) $x=\pi k$, 2) $x=\frac{\pi}{3}k$.

Очевидно, что решения случая а) включают в себя все решения случая б). Непосредственной проверкой убеждаемся, что все решения входят в область допустимых значений. Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

604. Разложив левую часть уравнения, получим

$$(\cos x \neq 0, \ \cos 2x \neq 0)$$

$$-\frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos 2x}=\sin x$$

а) $\sin x=0$, $x=\pi k$,

б) $\cos x \cdot \cos 2x=-1$.

Запишем левую часть этого уравнения в виде суммы

$$\cos 3x+\cos x=-2.$$

Очевидно, чтобы сумма двух слагаемых, каждое из которых по модулю больше или равно единице, равнялась —2, необходимо и достаточно одновременное выполнение уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \cos x = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим, что $x = \pi + 2\pi k$. Подставляя эти решения в первое уравнение, убеждаемся, что оно выполняется при всех $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Значит формула $x = \pi + 2\pi k$ дает все решения уравнения случая б). Но они включаются в решения случая а), которые, как легко видеть, допустимы. Ответ: $x = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

605. Уравнение приводится к квадратному

$5 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$ или $2 \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x - 5 = 0$.

Ответ:

1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; 2) $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

606. Решается аналогично предыдущей задаче. Ответ:

1) $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$; 2) $x = \operatorname{arctg} \frac{7}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

607. Уравнение можно представить в виде

$$4 \cos^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 3 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right).$$

Здесь использовано тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 0;$$

а) $\cos \frac{x}{2} = 0$; $x = \pi + 2\pi k$;

б) $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0$,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ответ: 1) $x = \pi + 2k\pi$, 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

608. Уравнение приводится к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$

$$7\operatorname{tg}^2 x + 10\operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Ответ: 1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; 2) $x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{7} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

609. Уравнение приводится к квадратному относительно $\operatorname{tg} 2x$

$$2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 6\sin 2x \cdot \cos 2x = \sin^2 2x + \cos^2 2x,$$

$$3\sin^2 2x + 6\sin 2x \cdot \cos 2x - \cos^2 2x = 0,$$

$$3\operatorname{tg}^2 2x + 6\operatorname{tg} 2x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{-3 \pm \sqrt{12}}{3}; \quad x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-3 \pm \sqrt{12}}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-3 \pm \sqrt{12}}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

610. $x = \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3}) + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

611. $x = \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{3}) + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

612. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin 2x\cos\frac{\pi}{3}\right) + 3\,\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}{2} = 3$$

и, далее,

$$\frac{3}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sin 2x = 3,$$

$$\cos 2x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\sin 2x = 1,$$

$$1 - 2\sin^2 x - \frac{2(3 + \sqrt{3})}{3}\sin x\cos x = 1,$$

$$\sin^2 x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\sin x\cos x = 0$$

а) $\sin x = 0$, $x = \pi k$;

б) $\sin x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\cos x = 0$,

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \quad x = -\operatorname{arctg}\frac{3 + \sqrt{3}}{3} + k\pi.$$

Ответ: 1) $x=\pi k$, 2) $x=-\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{3}}{3}+k\pi$, $k=0$, ± 1, $\pm 2\ldots$

613. 1) $x=\pi+2k\pi$; 2) $x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2k\pi$, $k=0, \pm 1$, $\pm 2\ldots$

614. Если $\cos y\neq 0$, то исходное уравнение равносильно такому:

$$\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)^2+\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)+1=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\frac{\cos x}{\cos y}$ не имеет действительных решений. Итак, необходимо, чтобы $\cos y=0$, т. е. $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ В этом случае из уравнения следует, что и $\cos x=0$, т. е. $x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, $m=0$, $\pm 1, \pm 2\ldots$ Значит все пары чисел x и y, удовлетворяющие уравнению, суть следующие

$$x=\frac{\pi}{2}+m\pi,\ m=0, \pm 1, \pm 2\ldots,$$

$$y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

Замечание. m и k—независимо друг от друга пробегают все целые числа. Любая пара целых чисел m и k определяет некоторое решение задачи. Поставить одинаковую букву в равенстве для x и y—значит сделать грубую ошибку.

615. Записав уравнение как

$$\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right]-\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right]=1,$$

преобразуем его левую часть в произведение синусов

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x=1,$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

616. Представим уравнение в виде

$$2\sin 2x\cdot\cos x=4\cos^3 x,$$
$$\sin x\cdot\cos^2 x=\cos^3 x.$$

Отсюда находим

а) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$

б) $\operatorname{tg} x=1,\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2\ldots$

617. Запишем уравнение в виде

$$2\cos 2x\cdot\cos x-2\cos 2x=0,$$
$$\cos 2x\,(\cos x-1)=0.$$

Отсюда

а) $\cos 2x=0,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};$

б) $\cos x=1,\ x=2k\pi.$

Ответ: 1) $x=2k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0,\pm 1,\pm 2\ldots$

618. Представим

$$\cos 3x\cdot\cos 4x=\frac{1}{2}[\cos 7x+\cos x],$$

$$\sin 2x\cdot\sin 5x=\frac{1}{2}[\cos 3x-\cos 7x].$$

Тогда уравнение примет вид

$$\cos x+\cos 3x=\cos 2x+\cos 4x,$$
$$2\cos 2x\cdot\cos x=2\cos 3x\cdot\cos x.$$

Отсюда находим решения:

а) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi;$

б) $\cos 2x-\cos 3x=0,$

$$2\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=0.$$

В этом случае имеем

1) $\sin\frac{x}{2}=0,\ x=2k\pi,$

2) $\sin\frac{5x}{2}=0,\ x=\frac{2k\pi}{5}.$

Очевидно, что решения вида $x=\frac{2k\pi}{5}$ включают в себя все решения вида $x=2k\pi$. Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 2) $x=\frac{2k\pi}{5}$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

619. $x=\frac{k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

620. 1) $x=\pi k$, 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

621. Допустимыми являются те x, для которых $\sin x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$, $\sin 3x\neq 0$. В области допустимых значений имеем

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\frac{\sin 4x}{\sin x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\sin x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}.$$

Отсюда находим

а) $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (так как $\sin x\neq 0$),

б) $2\cos^2 2x=\sin x\cdot\sin 3x$,

или

$$2\cos^2 2x=\frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 4x],$$

или

$$4\cos^2 2x=\cos 2x-2\cos^2 2x+1,$$

или же, наконец,

$$6\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

И мы имеем

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$;

2) $\cos 2x=-\frac{1}{3}$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi$.

Непосредственно убеждаемся, что все указанные решения допустимы. Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 2) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, 3) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

622. 1) $x=k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 3) $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$

623. Допустимыми являются те x, для которых $\cos x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$. В области допустимых значений имеем

$$5\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x,$$

$$\frac{5\cos 2x}{\cos x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin x}{\cos 2x\cdot\cos x}$$

и, далее,

$$5\cos^2 2x-\sin x\cdot\sin 3x=0,$$

$$5\cos^2 2x-\frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 4x]=0,$$

$$10\cos^2 2x-\cos 2x+2\cos^2 2x-1=0,$$

$$12\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

Отсюда находим

а) $\cos 2x=\frac{1}{3}$; $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi$;

б) $\cos 2x=-\frac{1}{4}$; $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi$.

Найденные решения допустимы. Ответ: 1) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi$, 2) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$

624. 1) $x=\frac{\pi k}{6}$, 2) $x=\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{6}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

625. $x=\frac{\pi k}{4}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

626. 1) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

627. Указание. Покажите, как это сделано в задаче 604, что уравнение $\sin 2x\cdot\cos 3x=1$ не имеет решений. Ответ: 1) $x=\frac{\pi k}{3}$, 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

628. 1) $x=k\pi$, 2) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

629. $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

630. Запишем уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x\right)-\cos(\pi\sin x)=0.$$

Тогда, заменяя разность косинусов произведением синусов, получим

$$2\sin\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi(\sin x-\cos x)}{2}\right]\sin\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi(\sin x+\cos x)}{2}\right]=0.$$

Отсюда находим

а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi(\sin x-\cos x)}{2}=\pi n,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$

$$\sin x-\cos x=2n-\frac{1}{2}.$$

Так как $|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, то для n следует взять значение только $n=0$.

$$\sin x-\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$x=\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi k;$$

б) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi(\sin x+\cos x)}{2}=\pi n,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{2}-2n.$$

Учитывая, что $|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, находим

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi k.$$

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi k$, 2) $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$

631. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x=\sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x.$$

Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\cos 6x=\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x$$

или

$$\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Отсюда имеем

а) $8x-\frac{\pi}{3}=6x+\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi;$

б) $8x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi, \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{7}.$

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{7}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

632. Решается аналогично предыдущей задаче.

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}$, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

633. 1) $x=-\frac{\pi}{108}+\frac{\pi k}{9}$, 2) $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2)$.

634. 1) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$, 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$

635. Уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$(1-\sqrt{2}\cos a)\sin x+(\sqrt{2}\sin a)\cos x=1.$$

Это выражение вида $A\sin x+B\cos x$ (см. предварительные замечания). Разделив обе части уравнения на выражение $\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}\neq 0$, получим

$$\frac{1-\sqrt{2}\cos a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}\sin x+\frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}\cos x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}.$$

Вводя обозначения

$$\cos\varphi=\frac{1-\sqrt{2}\cos a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}, \qquad (1)$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}, \qquad (2)$$

запишем уравнение в виде

$$\sin(x+\varphi)=\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}.$$

Если $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} > 1$, т. е. $\cos a > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение решений не имеет. Если $\cos a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant$ $\leqslant a \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$, решениями уравнения будут

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} + \pi n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

Величину φ (достаточно, хотя бы одно ее значение) можно определить по ее синусу. Поскольку из формулы (1) видно, что при рассматриваемых a $\cos\varphi > 0$, то φ — угол первой или четвертой четверти. Значит, его можно записать как

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}.$$

Ответ: при всех $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant a \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

$$x = -\arcsin \frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} +$$

$$+ (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots).$$

При остальных a решений нет.

636. Эта задача решается аналогично предыдущей.

Ответ: при всех $-\frac{\pi}{6} + \pi k < a \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$x = -\arcsin \frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + \pi n$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$. При остальных a решений нет.

637. Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

638. Уравнение решений не имеет.

$$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

639. Уравнение решений не имеет. Это доказывает цепочка неравенств

$$|\sin x - \sin 15x \cos x| \leqslant \sqrt{1+\sin^2 15x} \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

640. Представим это уравнение в виде

$$\sin x - \sin 3x + 2 \sin 2x = 3$$

или

$$-2 \cos 2x \sin x + 2 \sin 2x = 3$$

и, наконец, так:

$$\sin 2x - \cos 2x \cdot \sin x = \frac{3}{2}.$$

Слева стоит выражение вида $A \sin 2x + B \cos 2x$. Здесь

$$A = 1, \quad B = -\sin x.$$

При любом x справедливы неравенства

$$|\sin 2x - \cos 2x \cdot \sin x| \leqslant \sqrt{1+\sin^2 x} \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Следовательно, ни одно значение x не может служить решением уравнения.

Ответ: уравнение вообще не имеет решений.

641. Уравнение равносильно следующему:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 4x = 1$$

или

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 2.$$

Это уравнение равносильно системе (см. задачу 604)

$$\begin{cases} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \\ \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

Решая каждое уравнение независимо друг от друга, находим

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ 5x = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi, \end{cases} \quad k,\ m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Система будет иметь решения в том и только в том случае, если существуют такие целые числа k и m, что выполняется равенство

$$\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{2\pi}{15}+\frac{2m\pi}{5}.$$

Это уравнение в целых числах можно записать как

$$5+30k=6+18m$$

или

$$30k-18m=1.$$

Очевидно, что не существует целых чисел k и m, являющихся решением этого уравнения. Слева стоит четное число, справа — нечетное. Итак, уравнение не имеет решений.

642. Указание. Уравнение приводится к виду

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}5x+\frac{1}{\operatorname{tg}5x}\right).$$

Известно, что сумма взаимно обратных чисел $a+\frac{1}{a}$ удовлетворяет неравенству

$$\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2.$$

Пользуясь этим, решите задачу.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

643. Для того чтобы не получить посторонних решений, необходимо учесть, что допустимыми являются лишь те значения x, для которых $\cos x\geqslant 0$ и $\sin x\geqslant 0$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}\sin x=\cos x,\\ \sin x\geqslant 0;\ \ \cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

Из уравнения находим $\operatorname{tg}x=1$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Если k — четное число, то x — угол первой четверти и, значит, $\sin x>0$ и $\cos x>0$. Такие x — удовлетворяют уравнению. Если k — нечетное число, то x — угол третьей четверти. Для таких x: $\cos x<0$ и $\sin x<0$; ясно, что они недопустимы.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

644. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=-\cos 2x. \qquad (1)$$

Прежде чем возвести обе части уравнения в квадрат, заметим, что необходимо условие $\cos 2x \leqslant 0$. Тогда

$$\frac{1-\sin 2x}{2} = \cos^2 2x.$$

Очевидно, что для решений этого уравнения, подкоренное выражение в уравнении (1) должно быть неотрицательным. Имеем

$$\frac{1-\sin 2x}{2} = 1-\sin^2 2x,$$

или

$$2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0.$$

Отсюда получаем

а) $\sin 2x = 1$ (очевидно, что $\cos 2x = 0$)

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

б) $\begin{cases} \sin 2x = -\frac{1}{2}, \\ \cos 2x \leqslant 0. \end{cases}$

$$2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, 2) $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

645. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

646. Уравнение можно переписать в более простом виде

$$\sqrt{\frac{17 + 8\sin x - 16\cos^2 x}{\cos^2 x}} = 2\frac{\sin x}{\cos x}(1 + 4\sin x).$$

Допустимыми являются те x, для которых $\cos x \neq 0$. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 17 + 8\sin x - 16\cos^2 x = 4\sin^2 x (1 + 4\sin x)^2, \\ 2\frac{\sin x}{\cos x}(1 + 4\sin x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Заменяя $\cos^2 x$ в левой части уравнения через $1 - \sin^2 x$, получим

$$(1 + 4\sin x)^2 = 4\sin^2 x (1 + 4\sin x)^2,$$
$$(1 + 4\sin x)^2 (4\sin^2 x - 1) = 0.$$

Отсюда находим 1) $\sin x = -\frac{1}{4}$, 2) $\sin x = -\frac{1}{2}$, 3) $\sin x = \frac{1}{2}$. Рассмотрим первый случай. Если $\sin x = -\frac{1}{4}$, то неравенство выполняется. Имеем $x = (-1)^{k+1} \times \arcsin \frac{1}{4} + \pi k$.

Для решений $\sin x = -\frac{1}{2}$ неравенство системы дает

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\cos x}(1-2) \geqslant 0, \quad \text{т. е. } \cos x > 0.$$

С учетом этого ограничения получаем

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad (x\text{—угол четвертой четверти}).$$

Для решений $\sin x = \frac{1}{2}$ неравенство дает ограничение

$$\frac{\frac{1}{2}}{\cos x}(1+2) \geqslant 0, \text{ т. е. } \cos x > 0.$$

Получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (x—угол первой четверти).

Ответ: 1) $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k$, 2) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

647. Заменив произведение синусов в обеих частях уравнения по соответствующим формулам, после сокращений получаем

$$-\cos x = 2\sqrt{1+\cos x}.$$

Отметим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^2 x = 4(1+\cos x), \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

(Условие $\cos x \leqslant 0$ необходимо для соблюдения равносильности при возведении обеих частей уравнения в квадрат.)

$$\cos x = 2 - 2\sqrt{2},$$

$$x = \pm \arccos(2 - 2\sqrt{2}) + 2k\pi.$$

Ответ: $x = \pm \arccos(2-2\sqrt{2}) + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

648. $x=k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2 \ldots$ **649.** 1) $x=2k\pi$, 2) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2 \ldots$

650. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (1+\cos x)^2+\sin^2 x-4\sin^2 x=0, \\ \sin x \leqslant 0. \end{cases}$$

(Неравенство $\sin x \leqslant 0$ необходимо для сохранения равносильности при возведении обеих частей уравнения в квадрат.) Из первого уравнения, записанного как

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0,$$

находим

1) $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi k$,

2) $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ (так как $\sin x \leqslant 0$).

Рассмотрим решения первого случая. По условию необходимо найти такие решения, для которых выполняется неравенство $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$. Решение 1) дает следующее неравенство для чисел $k=0, \pm1, \pm2 \ldots$

$$\frac{3\pi}{2}<\pi+2\pi k<\frac{5\pi}{2}.$$

Очевидно, что таких k нет. Рассмотрим решения для второго случая.
Имеем

$$\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}+2\pi k<\frac{5\pi}{2}.$$

Отсюда находим $k=1$, т. е. $x=\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{3}$.

651. Решается аналогично предыдущей задаче

$$\left(\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ответ: $x=\frac{13\pi}{4}$.

652. Решается аналогично предыдущей задаче. Ответ: $x_1=\frac{11\pi}{8}$, $x_2=\frac{21\pi}{16}$.

653. При x, для которых $\cos x \neq 0$, получим

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=2\sin 2x.$$

Очевидно, что $\sin 2x \geqslant 0$. Для рассматриваемого интервала это выполняется при а) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и б) $\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$. Используя формулы

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\quad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},$$

а также учитывая, что $\sqrt{a^2}=|a|$, находим

$$\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|+\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|=2\sin 2x.$$

а) В области $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{x}{2} \geqslant 0$, $\cos\frac{x}{2} > 0$

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin 2x,$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.$$

В рассматриваемой области лежит только одно решение этого уравнения $x=\frac{\pi}{6}$ (проверьте).

б) В области $\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$: $\sin\frac{x}{2} \geqslant 0$, $\cos\frac{x}{2} < 0$,

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin 2x,$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.$$

В рассматриваемой области лежат два решения этого уравнения: $x_2=\frac{7\pi}{6}$; $x_3=1{,}3\pi$ (проверьте)

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{7\pi}{6}$, $x_3=1{,}3\pi$, $x_4=\frac{3\pi}{10}$.

654. $x=\frac{\pi k}{6}$, $k=0, \pm 1; \pm 2 \ldots$ **655.** $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ **656.** $x=\frac{k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ **657.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

658. Допустимыми являются те x, для которых $\cos 2x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$. Уравнение можно записать, как

$$\frac{4 \sin x}{\cos 4x \cdot \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x (\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 4x + 1),$$

$$4 \sin x = \operatorname{tg} 2x \cdot \cos x.$$

Поскольку $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ не являются решениями последнего уравнения, то можно написать $4 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$

$$4 \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$2 \operatorname{tg} x \left[2 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right] = 0.$$

Отсюда имеем

а) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = k\pi$,

б) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$; $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$.

Все найденные решения допустимы. Ответ: 1) $x = k\pi$, 2) $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

659. Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, 2) $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

660. Воспользовавшись формулой

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

перепишем уравнение в другом виде

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} + 2 \cos^2 2x - 1 = 0$$

или после умножения на $(1 + \cos 2x)$ и сокращений:

$$\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x = 0.$$

Отсюда находим

а) $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$;

б) $\cos 2x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + k\pi$

$\left(\text{очевидно, уравнение } \cos 2x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \text{ решений не имеет}\right)$.

Ответ: 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, 2) $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

661. Уравнение можно переписать в следующем виде:

$$2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1+\cos\frac{3x}{2}}{2},$$

$$4\cos^3\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}+3=0,$$

$$4\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=0.$$

Отсюда находим

а) $\cos\frac{x}{2}=1$, $x=4k\pi$;

б) $\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Ответ: 1) $x=4k\pi$, 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2\ldots$

662. В области допустимых значений ($x\neq\pi k$) уравнение равносильно следующему:

$$\operatorname{ctg}x-2\frac{\operatorname{ctg}^2x-1}{\operatorname{ctg}^2x+1}=1,$$

$$\operatorname{ctg}^3x-3\operatorname{ctg}^2x+\operatorname{ctg}x+1=0,$$
$$(\operatorname{ctg}x-1)(\operatorname{ctg}^2x-2\operatorname{ctg}x-1)=0.$$

Отсюда находим

а) $\operatorname{ctg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$;

б) $\operatorname{ctg}x=1\pm\sqrt{2}$, $x=\operatorname{arcctg}(1\pm\sqrt{2})+k\pi$.

Покажите, что $\operatorname{arcctg}(1+\sqrt{2})=\frac{\pi}{8}$ и $\operatorname{arcctg}(1-\sqrt{2})=\frac{5\pi}{8}$.

Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, 2) $x=\operatorname{arcctg}(1\pm\sqrt{2})+k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2\ \ldots$

663. Задача решается несколько нестандартным способом. Заметим, что уравнению удовлетворяют только те x, для которых $\sin x>0$ и $\cos x>0$. Поскольку $|\sin x|\leqslant1$ и $|\cos x|\leqslant1$, то справедливы неравенства

$$\sin^5x\leqslant\sin^2x,$$
$$\cos^5x\leqslant\cos^2x,$$

$$\sin^5x+\cos^5x\leqslant\sin^2x+\cos^2x=1.$$

Знак равенства в этих неравенствах относится к случаю, когда $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$ равны 1 или 0. Итак, если $\sin x \neq 1$ ($\cos x \neq 0$ соответственно) или $\sin x \neq 0$ ($\cos x \neq 1$ соответственно) сумма $\sin^5 x + \cos^5 x < 1$. Для того чтобы выполнялось равенство, необходимо и достаточно выполнение одной из систем условий

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 2k\pi$.

Из второй системы: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Ответ: 1) $x = 2k\pi$, 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

664. $x = (-1)^k \arcsin\left(\pm \frac{1}{4}\right) + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

665. 1) $x = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, 2) $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, 3) $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

666. Запишем уравнение в следующем виде:

$$2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x-a}{2} = 2 \sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2},$$

$$\left(\sin \frac{x+a}{2} - \sin \frac{x-a}{2}\right) \cos \frac{x-a}{2} = 0.$$

Преобразуя разность синусов в произведение, получим

$$2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{x-a}{2} = 0.$$

1) Если $\sin \frac{a}{2} = 0$, т. е. $a = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$), то равенство выполняется тождественно: x — любое действительное число.

2) Если $a \neq 2k\pi$, то решения уравнения находятся следующим образом:

а) $\cos \frac{x}{2} = 0$, $x = \pi + 2m\pi$,

б) $\cos \frac{x-a}{2} = 0$, $x = \pi + a + 2m\pi$,

причем, если $a = \pi + 2l\pi$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то решения, даваемые случаями а) и б), совпадают.

667. Поскольку обе части уравнения неотрицательны, то при возведении в квадрат получается уравнение равносильное исходному

$$\cos^2 2x = \sin^4 x + a^2 - 2a\sin^2 x,$$

$$\cos^2 2x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - 2a\,\frac{1-\cos 2x}{2} + a^2,$$

$$3\cos^2 2x + 2\cos 2x\,(1-2a) - (1-2a)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$1)\ \cos 2x = 1-2a; \quad 2)\ \cos 2x = \frac{2a-1}{3}.$$

Рассмотрим первый случай. Решения здесь будут при условии $|1-2a| \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant a \leqslant 1$,

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(1-2a) + k\pi.$$

Во втором случае решения существуют при условии $\left|\frac{2a-1}{3}\right| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 2$; имеем

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2a-1}{3} + k\pi.$$

Ответ: при $-1 \leqslant a < 0$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2a-1}{3} + k\pi$,

при $0 \leqslant a \leqslant 1$ 1) $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2a-1}{3} + k\pi$,

2) $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(1-2a) + k\pi$,

при $1 < a \leqslant 2$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2a-1}{3} + k\pi$.

При остальных значениях a решений нет.

668. Ответ: 1) $x = \pi k$, 2) $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

669. Преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму, запишем уравнение в следующем виде:

$$\cos x - \sin a + \sin a + \sin(a-6x) = 0,$$

$$\cos x + \sin(a-6x) = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(a-6x) = 0,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} - \frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + \frac{5x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда для всех a, находим решения. Ответ: 1) $x = \frac{\pi+2a}{14} + \frac{2\pi k}{7}$, 2) $x = \frac{\pi+2a}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

670. Уравнение равносильно следующему:

$$\frac{1}{\cos^2 \pi (a+x)} = 2a - a^2.$$

Для того чтобы уравнение имело решения, необходимо, чтобы

$$2a - a^2 \geqslant 1 \text{ (так как } 0 \leqslant \cos^2 \pi (a+x) \leqslant 1).$$

Отсюда находим

$$a^2 - 2a + 1 \leqslant 0,$$
$$(a-1)^2 \leqslant 0.$$

Это соотношение имеет место только при $a = 1$.
Если $a = 1$, то находим

$$\cos^2 \pi x = 1,$$
$$\pi x = k\pi,$$
$$x = k.$$

Ответ: уравнение имеет решения только при $a = 1$

$$x = k, \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

671. Уравнение решений не имеет.

672. Уравнение равносильно системе (докажите!)

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Решив независимо оба уравнения, находим

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} k, & k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \\ x = \frac{\pi}{4} m, & m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \end{cases} \tag{1}$$

Для существования решения этой системы необходимо, чтобы нашлись такие целые числа k и m, при которых выполняется равенство:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} k = \frac{\pi}{4} m,$$

т. е.

$$2 + 8k = 5m.$$

Решим это уравнение «в целых числах». Запишем его как отношение

$$m=\frac{2+(10k-2k)}{5}=\frac{(2-2k)+10k}{5}. \qquad (2)$$

Для того чтобы нашлись целые m, необходимо, чтобы выражение $(2-2k)$ делилось на 5, т. е.

$$2-2k=5^l, \quad l=0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

$$k=\frac{(2-4l)-l}{2}. \qquad (3)$$

В свою очередь, это выражение определяет целые k, если l — четное число

$$l=2s, \quad s=0, \pm 1, \pm 2\ldots \qquad (4)$$

Отсюда и из формулы (3) находим, что $k=1-5s$, и далее из формулы (1)

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}(1-5s)=\frac{\pi}{2}-2\pi s.$$

Это и есть общие решения равенств в формуле (1) и, значит, решения уравнения задачи.

Найдем, при каких s полученные решения удовлетворяют неравенству $|x|<10$

$$\left|\frac{\pi}{2}-2\pi s\right|<10.$$

Непосредственным вычислением находим $s=-1, 0, 1$. Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}\,(s=0)$, $x_2=\frac{5\pi}{2}\,(s=-1)$, $x_3=-\frac{3\pi}{2}\,(s=1)$.

673. Задача решается аналогично предыдущей. Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}$, $k=4, \pm 5, \pm 6\ldots$ 2) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, $k=-3, \pm 4, \pm 5, \ldots$

2°. Тригонометрические неравенства

674. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}-2>0,$$

или $\frac{-2-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}>0$, или $\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+1}<0$.

Это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$-2<\operatorname{tg} x<-1.$$

Значит, все решения данного неравенства

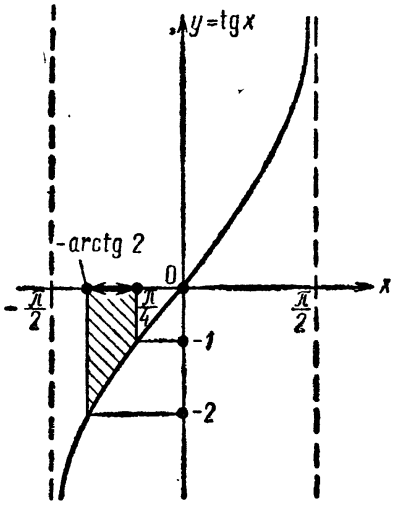


Рис. 53

$$k\pi - \operatorname{arctg} 2 < x < k\pi - \frac{\pi}{4},$$

где k принимает все целые значения (рис. 53).

675. Переписав данное неравенство

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} - \frac{1}{2} < 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < 0,$$

получаем

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 1)} < 0.$$

Отсюда

$$-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < -1,$$

$$1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}.$$

Следовательно (рис. 54),

$$k\pi - \frac{\pi}{3} < x < k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3},$$

где k — принимает все целые значения.

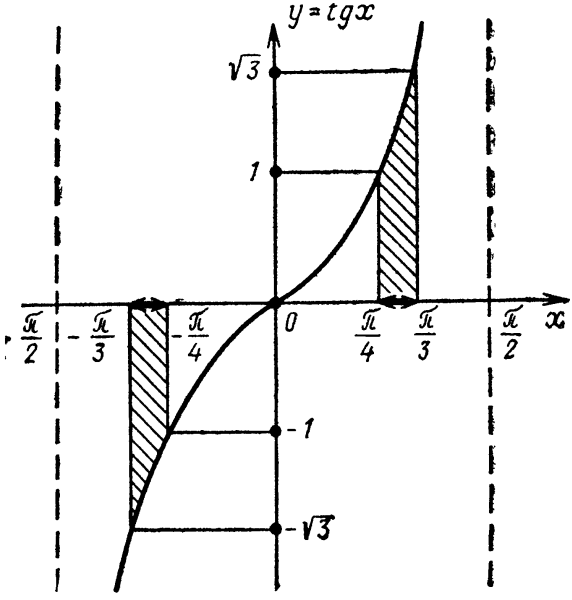


Рис. 54

676. $0 \leqslant x < \pi - \arcsin(1-\sqrt{2})$,

$2\pi + \arcsin(1-\sqrt{2}) < x \leqslant 2\pi$.

677. $0 \leqslant x < \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi < x \leqslant 2\pi$.

678. Неравенство эквивалентно двум системам неравенств

а) $\begin{cases} t^2 - t - \frac{1}{2} \geqslant 0, \\ t^2 - t - 1 > 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} t^2 - t - \frac{1}{2} < 0, \\ t^2 - t < 0, \end{cases}$

где $t = \cos x$, $|t| \leqslant 1$.

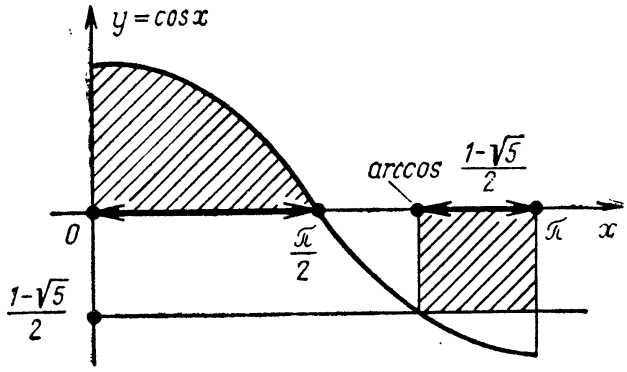


Рис. 55

Система а) имеет решение: $t > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Первое решение не подходит, так как $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Значит, $t < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\cos x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \pi$ (рис. 55). Система б) имеет решение: $0 < t < 1$, откуда $0 < \cos x < 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

679. Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} - 2 > 0, \quad \text{или} \quad \frac{\sin x - 8\sin^2 x}{4\sin^2 x - 1} > 0,$$

или

$$\frac{\sin x\left(\sin x - \frac{1}{8}\right)}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)} < 0,$$

отсюда $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$ и $\frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2}$. Все решения:

$$2k\pi + \arcsin\frac{1}{8} < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$2k\pi + \frac{5}{6}\pi < x < (2k+1)\pi - \arcsin\frac{1}{8},$$

$$(2k+1)\pi < x < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения (рис. 56).

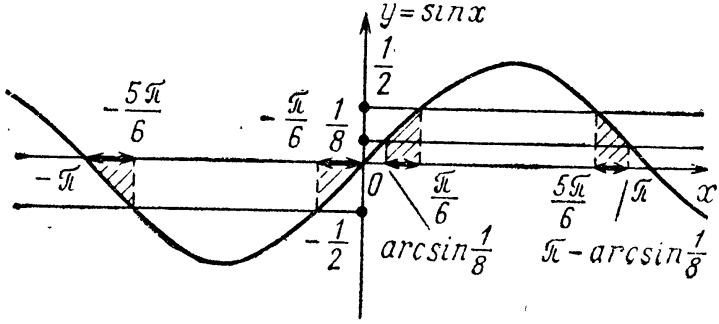


Рис. 56

680. $\frac{7}{12}\pi < x < \frac{13}{12}\pi$. **681.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

682. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \pi$; $\pi + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 2\pi$.

683. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$.

684. Перепишем данное неравенство так:

$$1 - \frac{\cos x}{4\cos^2 x - 3} + \frac{1}{4\cos^2 x - 3} < 0,$$

или

$$\frac{4\cos^2 x - \cos x - 2}{4\cos^2 x - 3} < 0,$$

или

$$\frac{\left(\cos x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(\cos x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}{\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} < 0.$$

Отсюда

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{1-\sqrt{33}}{8}; \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно,

$$\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} < x < \frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

Получим

$$3(2y^2-1) > y\sqrt{2}+1,$$

или $6y^2-y\sqrt{2}-4>0$, причем $-1\leqslant y\leqslant 1$. Решая уравнение $6y^2-y\sqrt{2}-4>0$, получим

$$y_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

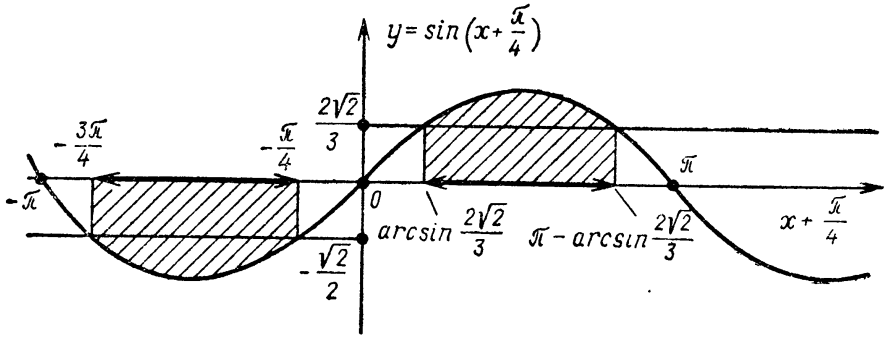


Рис. 57

Неравенства $6y^2-y\sqrt{2}-4>0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ выполняются одновременно в случае

$$-1\leqslant y<-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}<y\leqslant 1,$$

или

$$-1\leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1.$$

Решения первого неравенства (рис. 57)

$$2k\pi+\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}<x+\frac{\pi}{4}<(2k+1)\pi-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

т. е.

$$2k\pi-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}<x<2k\pi+\frac{3}{4}\pi-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (1)$$

Решения второго неравенства

$$2n\pi - \frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi n - \frac{\pi}{4},$$

откуда

$$2n\pi - \pi < x < 2\pi n - \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Все решения данного неравенства даются неравенствами (1) и (2), где

$$k,\ n = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots$$

685. $0 < x < \frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi < x < \pi$. **686.** $2\pi n + \frac{\pi}{4} < x < 2\pi n + \frac{3}{4}\pi$; $2\pi k + \pi < x < 2\pi k + \frac{5}{4}\pi$; $2\pi m - \frac{\pi}{4} < x < 2\pi m$ ($n, k, m = 0, \pm 1 \ldots$). **687.** $\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k$ ($n, k = 0, \pm 1 \ldots$). **688.** $\frac{\pi}{2}n + \frac{5}{24}\pi < x < \frac{\pi}{2}(n+1) + \frac{\pi}{24}$ ($n = 0, \pm 1 \ldots$).

689. Указание. При решении уравнений и неравенств, содержащих одновременно $\sin 2x$ и $\sin x + \cos x$ или $\sin 2x$ и $\sin x - \cos x$, полезно ввести новое неизвестное

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

и соответственно

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

В первом случае $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 2y^2 - 1$, во втором $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2y^2$. Примените это соображение к решению данного неравенства, т. е. положите

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

690. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi$; $\pi + 2k\pi < x \leqslant \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **691.** $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leqslant x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **692.** $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

693. Рассмотрим два случая:

1) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда данное неравенство эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 5+2(1-2\sin^2 x) \leqslant 3(2\sin x-1), \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2\sin x+5)(\sin x-1) \geqslant 0, \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

и так как $2\sin x+5>0$, то

$$\begin{cases} \sin x-1 \geqslant 0, \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $\sin x=1$ и, значит, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k принимает все целые значения.

2) $\sin x < \frac{1}{2}$. В этом случае данное неравенство эквивалентно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 5+2(1-2\sin^2 x) \leqslant 3-6\sin x, \\ \sin x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(\sin x-2)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right) \geqslant 0, \\ \sin x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и так как $\sin x-2<0$, то

$$\begin{cases} \sin x+\frac{1}{2} \leqslant 0, \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ и, значит, $-\frac{5}{6}\pi+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

694. Прежде всего заметим, что должны быть выполнены неравенства $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, где k принимает

все целые значения. Далее, $\operatorname{tg}^2 x \leqslant \left| 1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} \right|$,

$$\operatorname{tg}^4 x \leqslant |\operatorname{tg}^2 x - 2|.$$

Если $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 2$, то $\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x + 2 \leqslant 0$ — неравенство решений не имеет. Если же $\operatorname{tg}^2 x < 2$, то неравенство принимает вид

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \leqslant 0$$

или

$$(\operatorname{tg}^2 x + 2)(\operatorname{tg}^2 x - 1) \leqslant 0,$$

откуда $0 < \operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$, или $0 < |\operatorname{tg} x| \leqslant 1$, или $-1 \leqslant \operatorname{tg} x < 0$, $0 < \operatorname{tg} x \leqslant 1$ и окончательно

$$k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

695. $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi$. **696.** $-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. **697.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

698. Область определения функции $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ такова: $\sin x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 0$, т. е.

$$2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

При $x = 2k\pi$ и при $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ сумма $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ обращается в 1. Если же $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\sin x} > \sin^2 x,$$

$$\sqrt{\cos x} > \cos^2 x$$

и, значит,

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

Итак, все решения данного неравенства состоят из бесконечного множества интервалов:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

699. $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **700.** $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

701. Так как при всех действительных значениях x выполняются неравенства $0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, причем знак равенства имеет место только при $x=0$, то все решения неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > 1$$

находятся из условия

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{1+x^2},$$

откуда

$$|x| < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}};$$

таким образом, все решения неравенства

$$\sin^2 x \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x$$

таковы:

$$0 \neq |x| < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$$

или

$$-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} < x < 0, \quad 0 < x < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

702. Перепишем данное неравенство в виде

$$2\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x > 0,$$

или $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 < 0$, или

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x + 2) < 0.$$

Все решения данного неравенства находятся из неравенств

$$\operatorname{tg} x < -2, \quad -1 < \operatorname{tg} x < 1,$$

т. е.

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\operatorname{arctg} 2 + k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

703. $0 \leqslant x < \arccos\frac{1}{7}$, $2\pi - \arccos\frac{1}{7} < x \leqslant 2\pi$.

704. $0 < x < \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **705.** $10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}} < x < 10^{2k\pi+\frac{7\pi}{12}}$, $10^{-2k\pi-\frac{7}{12}\pi} < x < 10^{-2k\pi+\frac{\pi}{12}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $10^{-\frac{7}{12}\pi} < x < 10^{\frac{7}{12}\pi}$.

706. Воспользуемся тем, что

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \qquad (*)$$

Положим $\sin x = t$. После преобразований получим:

$$t^2 \leqslant a^2 (3t - 4t^3)^2,$$

или

$$t^2 [a^2 (4t^2 - 3)^2 - 1] \geqslant 0, \qquad (**)$$

или

$$t^2 \left(t^2 - \frac{3a-1}{4a}\right)\left(t^2 - \frac{3a+1}{4a}\right) \geqslant 0.$$

Учитывая, что (при $a > 0$)

$$\frac{3a-1}{4a} < 1;\ \frac{3a-1}{4a} \leqslant \frac{3a+1}{4a};\ 0 < \frac{3a+1}{4a};$$

$$0 \leqslant \frac{3a-1}{4a} \text{ или } a \geqslant \frac{1}{3},\ \frac{3a+1}{4a} \leqslant 1 \text{ или } a \geqslant 1$$

находим решения неравенства (**), удовлетворяющие условию $|t| \leqslant 1$.

1) $t = 0$, при любом $a > 0$,

2) $t^2 \leqslant \frac{3a-1}{4a}$, при $a > \frac{1}{3}$,

3) $t^2 \leqslant \frac{3a+1}{4a}$, при $a \geqslant 1$.

Соответственно получаем три серии решений данного неравенства:

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2) $|\sin| \leqslant \sqrt{\frac{3a-1}{4a}}$,

$$\pi n - \arcsin \sqrt{\frac{3a-1}{4a}} \leqslant x \leqslant \pi n + \arcsin \sqrt{\frac{3a-1}{4a}}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3) $|\sin x| \geqslant \sqrt{\frac{3a+1}{4a}}$,

$$\pi n + \arcsin \sqrt{\frac{3a+1}{4a}} \leqslant x \leqslant \pi n + \pi - \arcsin \sqrt{\frac{3a+1}{4a}}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

причем при $0 < a \leqslant \frac{1}{3}$ имеется одна серия решений (1), при $\frac{1}{3} < a < 1$ — одна серия решений (2) (она включает серию (1)), при $a \geqslant 1$ — две серии решений (2) и (3).

707. Для этого неравенства ОДЗ будет

$$|\cos x| \neq 1, \quad x \neq \pi k.$$

Перепишем неравенства в виде

$$\frac{2 - \sin 2x}{\sin^2 x} \leqslant a, \text{ или } a \sin^2 x \geqslant 2 - \sin 2x$$

или $a \sin^2 x + \sin 2x \geqslant 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, $\sin x \neq 0$. Разделим обе части неравенства на $\sin^2 x$, тогда получим

$$a + 2 \operatorname{ctg} x \geqslant 2(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

или, обозначая $\operatorname{ctg} x$ через t,

$$2t^2 - 2t + 2 - a \leqslant 0. \qquad (*)$$

Дискриминант соответствующего квадратного трехчлена

$$D = \frac{-3 + 2a}{4};$$

рассмотрим три случая:

а) $-3 + 2a < 0$, $a < \frac{3}{2}$, тогда неравенство (*) не имеет решений;

б) $a = \frac{3}{2}$, тогда $t = \frac{1}{2}$;

в) $2a - 3 > 0$, $a > \frac{3}{2}$, тогда

$$\frac{1 - \sqrt{2a-3}}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1 + \sqrt{2a-3}}{2}.$$

Итак, при $a > \frac{3}{2}$

$$\operatorname{arcctg} \frac{1 + \sqrt{2a+3}}{2} + \pi k \leqslant x \leqslant \operatorname{arcctg} \frac{1 - \sqrt{2a-3}}{2} + \pi k,$$

при $a=\frac{3}{2}$, $x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

при $a<\frac{3}{2}$, нет решений.

708. При $a>0$

$$2\pi n < x < \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2\pi n,$$

$$2\pi+2\pi n-\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}<x<2\pi n \ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3°. Системы тригонометрических уравнений

709. Последовательно складывая и вычитая уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(x-y)=0. \end{cases}$$

Решая независимо каждое из уравнений, находим

а) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ x-y=\pi m, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \\ x-y=\pi m, \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2n+m), \\ y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2n-m); \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(2n+m), \\ y=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(2n-m), \end{cases}$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$
$m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

710. Второе уравнение системы можно переписать в виде

$$\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{1}{3}.$$

Заменяя числитель этой дроби согласно первому уравнению, получаем

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Это уравнение совместно с первым уравнением системы образуют новую систему, равносильную исходной. Последовательно складывая и вычитая уравнения этой новой системы, получаем

$$\begin{cases} \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos(x+y)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \end{cases}$$

откуда находим

а) $\begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m, \\ x+y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n, \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m, \\ x+y=-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n \end{cases}$

и, далее,

а) $\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi(m+n), \\ y=\mp\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-m); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi(m+n), \\ y=\mp\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-m), \end{cases}$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$$

Знаки в системах а) и б) берутся одновременно первые и одновременно вторые.

711. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=2\cos x\cos y-2\sin x\sin y,$$

$$3\sin x\cdot\sin y=\cos x\cdot\cos y.$$

Учитывая второе уравнение системы, находим

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}.$$

Объединим это и второе уравнение системы в новую систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Отсюда (складывая и вычитая) находим

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

и, далее,

$$\begin{cases} x-y = 2\pi n, \\ x+y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(m+n), \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(m-n), \end{cases}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

В последней системе знаки берутся одновременно первые или одновременно вторые.

712. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y - \sin y \cos x = 3 \sin x \cdot \cos y - 1, \\ \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = -2 \cos x \cdot \sin y. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{5}, \\ \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Отсюда (складывая и вычитая уравнения системы) находим

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{2}{5}, \\ \sin(x-y) = \frac{4}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = (-1)^n \arcsin\frac{2}{5} + \pi n, \\ x-y = (-1)^m \arcsin\frac{4}{5} + \pi m; \end{cases}$$

и, далее,

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left[(-1)^n \arcsin\frac{2}{5}+(-1)^m \arcsin\frac{4}{5}\right]+\frac{\pi}{2}(m+n), \\ y=\frac{1}{2}\left[(-1)^n \arcsin\frac{2}{5}-(-1)^m \arcsin\frac{4}{5}\right]+\frac{\pi}{2}(n-m); \end{cases}$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots; \qquad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$$

713. Систему можно решать несколькими способами. Приведем один из них.

Представив $(3x+2y)$ как $(2x+2y)+x$, а $(2x+3y)$ как $(2x+2y)+y$, запишем систему в виде

$$\begin{cases} [4\sin(2x+2y)]\cos x+[4\cos(2x+2y)+1]\sin x=0, \\ [4\sin(2x+2y)]\cos y+[4\cos(2x+2y)+1]\sin y=0. \end{cases}$$

Эту систему можно рассматривать как систему двух линейных уравнений относительно неизвестных $4\sin(2x+2y)$ и $4\cos(2x+2y)+1$. Из теории систем линейных уравнений известно, что если определитель системы Δ отличен от 0, т. е.

$$\Delta=\cos x\cdot\sin y-\sin x\cdot\cos y\neq 0, \quad \sin(y-x)\neq 0,$$
$$x-y\neq \pi m,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots,$$

то система имеет единственное решение. Это решение, очевидно, нулевое, т. е.

$$\begin{cases} 4\sin(2x+2y)=0, \\ 4\cos(2x+2y)+1=0. \end{cases}$$

Эта система несовместна, (так как если $\sin(2x+2y)=0$, то $\cos(2x+2y)$ равен 1 или -1, и второе уравнение не выполняется).

Итак, единственно возможный случай $\Delta=0$

$$x-y=\pi m, \quad x=y+\pi m. \tag{1}$$

В этом случае уравнения исходной системы совпадают. Берем любое из них, например, второе. Подставляя $x=y+\pi m$ получим:

$$4\sin 4y\cos y+(4\cos 4y+1)\sin y=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$16\cos 2y\cdot\sin y\cdot\cos^2 y+(8\cos^2 2y-3)\sin y=0,$$
$$8\cos 2y\cdot\sin y(1+\cos 2y)+\sin y(8\cos^2 2y-3)=0,$$
$$\sin y(16\cos^2 2y+8\cos 2y-3)=0.$$

Отсюда находим

а) $\sin y = 0$, $y = \pi k$;

б) $16\cos^2 2y + 8\cos 2y - 3 = 0$;

1) $\cos 2y = \frac{1}{4}$, $y = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + k\pi$,

2) $\cos 2y = -\frac{3}{4}$, $y = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

С помощью (1) окончательно находим решения

1) $\begin{cases} x = \pi(m+k), \\ y = \pi k; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi(m+k), \\ y = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi k; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi(m+k), \\ y = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k. \end{cases}$

714. Последовательно складывая и вычитая уравнения системы, получим новую систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} 3(\sin x + \sin y) = \cos x + \cos y, \\ 3(\sin x - \sin y) = -3(\cos x - \cos y). \end{cases}$$

Эту систему легко преобразовать к виду

$$\begin{cases} 3\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \\ \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \end{cases}$$

Если ни $\sin\frac{x-y}{2}$, ни $\cos\frac{x-y}{2}$ не равны нулю, то система противоречива $\left(\text{из первого уравнения находим } \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{3}, \right.$ $\left.\text{а из второго } \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = 1\right)$. Значит, возможны два случая:

а) $\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} = 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = 1. \end{cases}$

Последнее уравнение получилось из второго уравнения системы после сокращения на множитель $\sin\frac{x-y}{2}$, который в рассматриваемом случае отличен от нуля.

Решая систему, находим

$$\begin{cases} x-y=\pi+2\pi m, \\ x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$$

и, значит,

$$\begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+\pi(m+n), \\ y=-\frac{\pi}{4}+\pi(n-m), \end{cases} \qquad (I)$$

$m=0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Аналогичным образом во втором случае получаем

б) $$\begin{cases} \sin\frac{x-y}{2}=0, \\ \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\begin{cases} x-y=2\pi m, \\ x+y=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n \end{cases}$$

и, значит,

$$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(m+n), \\ y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi(n-m), \end{cases} \qquad (II)$$

$m=0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \qquad n=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

715. Здесь приводится один из возможных способов решения этой системы.

Отметим, прежде всего, что $\sin(x+y)\neq 0$; $\cos y\neq 0$; $\cos x\neq 0$. Тогда, разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\cos x=2\cos y. \qquad (1)$$

Далее, убедившись непосредственной подстановкой, что ни $y=\pi n$, ни $x=\pi m$ не являются решениями системы, умножим первое уравнение на $\sin y$, а второе — на $\sin x$

(в силу сказанного $\sin y \neq 0$ и $\sin x \neq 0$). Сложим затем оба уравнения друг с другом. Имеем

$$1 = \frac{3}{2}\sin y + \frac{3}{4}\sin x. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) в области допустимых значений образуют систему уравнений, равносильную исходной. Эту систему удобно написать в виде

$$\begin{cases} \cos x = 2\cos y, \\ \sin x = \frac{4}{3} - 2\sin y. \end{cases} \tag{3}$$

Возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные результаты.

$$1 = \frac{52}{9} - \frac{16}{3}\sin y,$$

откуда находим

$$\sin y = \frac{43}{48}. \tag{4}$$

Для того чтобы не получить посторонние решения (возведение в квадрат нарушило равносильность преобразований), будем брать не все решения уравнения (4), а лишь те из них, которые в действительности удовлетворяют системе (3). Равенство (4) и второе уравнение системы (3) показывают, что

$$\sin x = -\frac{11}{24} < 0.$$

Значит, x — угол третьей или четвертой четверти.

1) Пусть x — угол четвертой четверти. Тогда $\cos x > 0$, а из первого уравнения следует, что $\cos y > 0$. Итак, $\cos y > 0$ и $\sin y > 0$. Значит, y — угол первой четверти. Имеем решение

$$\begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{11}{24}\right) + 2\pi m, \\ y = \arcsin\frac{43}{48} + 2\pi n, \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

2) Пусть x — угол третьей четверти. Тогда $\cos x < 0$, а из первого уравнения следует, что $\cos y < 0$. Итак,

$\cos y < 0$, а $\sin y > 0$. Значит, y — угол второй четверти. Имеем еще одно решение

$$\begin{cases} x = \pi - \arcsin\left(-\frac{11}{24}\right) + 2\pi m, \\ y = \pi - \arcsin\frac{43}{48} + 2\pi n, \end{cases}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

716. Прежде всего отметим, что для того чтобы система имела решения, необходимо соблюдение условий

$$\left|\frac{5}{6}\sin a\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{5}{6}\cos a\right| \leqslant 1,$$

которые выполняются при всех a. Складывая и вычитая уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{5}{6}(\cos a + \sin a) = \frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right), \\ \cos(x+y) = \frac{5}{6}(\cos a - \sin a) = \frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Для существования решений необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло системе условий

$$\begin{cases} \left|\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1, \\ \left|\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \left|\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{6}{5\sqrt{2}}, \\ \left|\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{6}{5\sqrt{2}}. \end{cases}$$

На рис. 58 изображены графики функций $\left|\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ и $\left|\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ на периоде $0 \leqslant a+\frac{\pi}{4} \leqslant \pi$. На этом рисунке легко найти те значения a, которые удовлетворяют сразу обоим неравенствам

1) $\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n\leqslant a+\frac{\pi}{4}\leqslant\arcsin\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n,$

или

$$-\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n\leqslant a\leqslant-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n;$$

2) $\pi-\arcsin\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n\leqslant a+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi-\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n,$

или

$$\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n\leqslant a\leqslant\frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n.$$

При этих значениях a имеем

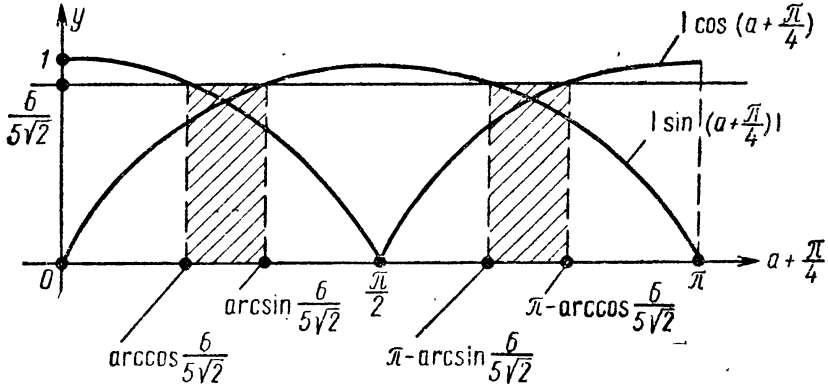


Рис. 58

а)
$$\begin{cases} x-y=\pm\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]+2\pi k, \\ x+y=+\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]+2\pi l; \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}\left\{\pm\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+\pi(k+l),$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mp\right.$$
$$\left.\mp\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+\pi(l-k);$$

б) $$\begin{cases} x-y=\pm\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]+2\pi k, \\ x+y=-\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]+2\pi l; \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}\left\{\pm\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+\pi(k+l);\right.$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{-\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mp\right.$$
$$\left.\mp\arccos\left[\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}+\pi(l-k).$$

Знаки в формулах а) и б) берутся одновременно верхние и одновременно нижние. $k=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots,\ l=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$

717. Решение существует при $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-1+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\pm1}{2}\left[(-1)^n\arcsin(a^2+a)+(-1)^m\arcsin(a^2-a)\right]+\frac{\pi}{2}(m+n),$$

$$y=\frac{1}{2}\left[(-1)^n\arcsin(a^2+a)-(-1)^m\arcsin(a^2-a)\right]+\frac{\pi}{2}(n-m).$$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$$

718. Решается аналогично задаче 700. Полагая

$$2x+y=(2x+2y)-y \text{ и } x+2y=(2x+2y)-x,$$

получим систему

$$\begin{cases} [a\cos(2x+2y)-1]\cos y+[a\sin(2x+2y)]\sin y=0, \\ [a\cos(2x+2y)-1]\cos x+[a\sin(2x+2y)]\sin x=0. \end{cases} \quad (1)$$

Если определитель этой системы, рассматриваемой относительно неизвестных $[a\cos(2x+2y)-1]$ и $[a\sin(2x+2y)]$, отличен от нуля, т. е.

$$\Delta=\cos y\cdot\sin x-\cos x\cdot\sin y=\sin(x-y)\neq0,$$

то приходим к противоречию. Действительно, из системы (1) в этом случае находим

$$\begin{cases} a\cos(2x+2y)-1=0, \\ a\sin(2x+2y)=0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \cos(2x+2y)=\frac{1}{a}, \\ \sin(2x+2y)=0. \end{cases}$$

Так как $a>1$, то эта система несовместна.

Итак, $\sin(x-y)=0$, $x-y=\pi m$, $m=0, \pm1, \pm2 \ldots$ Значит, $x=y+\pi m$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1), найдем

$$(a\cos 4y-1)\cos y+a\sin 4y\cdot\sin y=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$(a\cos 4y-1)\cos y+4a\sin^2 y\cdot\cos y\cdot\cos 2y=0,$$

$$\cos y\left[(2a\cos^2 2y-a-1)+4a\cos 2y\,\frac{1-\cos 2y}{2}\right]=0.$$

$$\cos y\,(2a\cos 2y-a-1)=0.$$

Отсюда

а) $\cos y=0$; $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$,

б) $\cos 2y=\frac{a+1}{2a}$.

Поскольку при $a>1$ дробь $\frac{a+1}{2a}$ меньше 1, то имеем

$$y=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi n.$$

Соответственно найденным значениям y, находим решения задачи при всех $a>1$.

а) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi(m+n), \\ y=\frac{\pi}{2}+\pi n; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi(m+n), \\ y=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi n; \end{cases}$

$m=0, \pm1, \pm2, \ldots, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

719. Если $\sin x=u$ и $\sec y=v$, то система имеет вид

$$\begin{cases} u+v=2, \\ uv=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда находим

а) $\begin{cases} u=\sin x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ v=\sec y=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u=\sin x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ v=\sec y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Первая система, очевидно, решений не имеет, так как $|\sin x|\leqslant 1$ вторая система дает

$$\begin{cases} x=(-1)^n \arcsin\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n, \\ y=\pm\arccos\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}+2\pi m, \end{cases}$$

$$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

720. Указание. Получите систему уравнений относительно $u=\cos\frac{x}{2}$ и $v=\cos\frac{y}{2}$.

Ответ:

1) $\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{2}+4\pi m, \\ y=2\pi+4\pi n, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2\pi+4\pi m, \\ y=\pm\dfrac{\pi}{2}+4\pi n. \end{cases}$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

721. Указание. Получите систему уравнений относительно $u=\sin x$ и $v=\operatorname{tg}(x+y)$.

Ответ:

$$\begin{cases} x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \\ y=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}+\pi(m-n), \end{cases}$$

$$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

722. Так как $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $y\neq m\pi+\frac{\pi}{2}$, $z\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ (в уравнения системы входят $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$, $\operatorname{tg}z$), а также $z\neq n\pi$, $x\neq k\pi$, $y\neq m\pi$ (легко убедиться непосредственной подстановкой этих значений в уравнения системы), то систему можно переписать в равносильном виде:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=3, \\ \operatorname{tg}y=2\operatorname{tg}x, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$$

Второе уравнение получено делением первого уравнения системы. Выразив теперь z через x и y, получим

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\pi - x - y) = 3, \\ \operatorname{tg} y = 2\operatorname{tg} x, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Используя первые два уравнения системы, находим систему уравнений для определения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -3, \\ \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x \end{cases}$$

или

$$3 \operatorname{tg}^2 x = 6 \operatorname{tg}^2 x - 3,$$
$$\operatorname{tg}^2 x = 1,$$
$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Затем находим:

1°. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $\operatorname{tg} y = 2$, $y = \operatorname{arctg} 2 + m\pi$.

Из последнего уравнения системы имеем $z = \pi - k\pi - \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2 - m\pi$. Итак,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \\ y = \operatorname{arctg} 2 + m\pi, \\ z = \dfrac{3\pi}{4} - (k + m)\pi - \operatorname{arctg} 2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2°. Если $\operatorname{tg} x = -1$, то аналогично находим

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \\ y = -\operatorname{arctg} 2 + m\pi, \\ z = \dfrac{5\pi}{4} - (k + m)\pi + \operatorname{arctg} 2. \end{cases} \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) дают все решения системы.

723. Полагая $u = \sin\sqrt{x}$ и $v = \cos\sqrt{y}$, систему можно записать в виде

$$\begin{cases} u - v = \dfrac{1}{2}, \\ uv = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда легко находим

1° $u=1$; $v=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\text{а)}\ \begin{cases}\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ \sqrt{y}=\frac{\pi}{3}+2\pi m.\end{cases}$$

Поскольку $\sqrt{x}\geqslant 0$ и $\sqrt{y}\geqslant 0$, то $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi^2}{4}(1+4k)^2,\\ y=\frac{\pi^2}{9}(1+6m)^2;\end{cases}\qquad(1)$$

$$\text{б)}\ \begin{cases}\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ \sqrt{y}=-\frac{\pi}{3}+2\pi m.\end{cases}$$

Здесь

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi^2}{4}(1+4k)^2,\\ y=\frac{\pi^2}{9}(-1+6m)^2;\end{cases}\qquad(2)$$

2° $u=-\frac{1}{2}$, $v=-1$. Тогда

$$\text{а)}\ \begin{cases}\sqrt{x}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ \sqrt{y}=\pi+2\pi m.\end{cases}$$

Здесь $k=1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi^2}{36}(12k-1)^2,\\ y=\pi^2(2m+1)^2;\end{cases}\qquad(3)$$

$$\text{б)}\ \begin{cases}\sqrt{x}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ \sqrt{y}=\pi+2\pi m.\end{cases}$$

Здесь $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi^2}{36}(12k-5)^2,\\ y=\pi^2(1+2m)^2.\end{cases}\qquad(4)$$

Формулы (1)—(4) дают все решения системы.

724. Указание. Сделайте замену неизвестных

$$\cos^2 x = u, \quad \cos^2 y = v.$$

Ответ: При $a=0$ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m$; при $0<a\leqslant\frac{1}{3}$

$$1)\begin{cases} x=\pm\arccos\sqrt{\frac{3+\sqrt{3a}}{4}}+\pi k, \\ y=\pm\arccos\sqrt{\frac{3-\sqrt{3a}}{4}}+\pi m, \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x=\pm\arccos\sqrt{\frac{3-\sqrt{3a}}{4}}+\pi k, \\ y=\pm\arccos\sqrt{\frac{3+\sqrt{3a}}{4}}+\pi m. \end{cases}$$

В этих системах берутся всевозможные сочетания знаков плюс и минус (по 4 варианта в каждом случае) $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $m=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ При $a>\frac{1}{3}$ и $a<0$ решений нет.

725. 1) $x=\frac{\pi}{2}(k-m)$ $y=\frac{\pi}{2}m$;

2) $x=-\frac{\pi}{6}+\pi(k-2m)$ $y=\frac{\pi}{3}+\pi m$,

3) $x=\frac{7\pi}{6}+\pi(k-2m)$ $y=-\frac{\pi}{3}+\pi m$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $m=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

726. Указание. Преобразовав левую часть второго уравнения, выразить y через x; подставить результат в первое уравнение. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}m$, $y=\pi(m+k)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $m=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

727. Первое уравнение системы удобно представить в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}=\frac{3}{4}$$

или

$$\cos 2x+\cos 2y=\frac{1}{2}.$$

Преобразуя сумму косинусов в произведение, получаем

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{4}.$$

Используя второе уравнение системы, находим

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\frac{1}{2},\\ x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.\end{cases}$$

Если $x-y=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, то сопоставляя это уравнение со вторым уравнением системы находим

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ y=-\pi k.\end{cases} \tag{1}$$

Если $x-y=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, аналогично предыдущему получаем

$$x=\pi k, \tag{2}$$

$$y=\frac{\pi}{3}-\pi k.\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Формулы (1) и (2) дают все решения системы.

728. Указание. Задача решается аналогично предыдущей. Представив первое уравнение системы в виде

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cdot\sin y}=3,$$

рассмотрите два случая: 1) $x-y=\frac{\pi}{3}$, 2) $x-y=-\frac{\pi}{3}$.

Ответ:

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi n}{2},\\ y=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi n}{2},\end{cases}$$

где $n=0,\pm 1,\pm 2\ldots$

729. Представив второе уравнение системы в виде

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right),$$

находим, что возможны два случая:

1) $x=-y+\frac{\pi}{2}+2\pi k$, т. е. $x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

2) $x = y - \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, т. е. $x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$.

В силу ограничений $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ и, значит, $0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi$ $-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi$ получим, что $k = 0$ и $m = 0$. В первом случае имеем

$$y = \frac{\pi}{2} - x \quad \left(\text{отсюда видно, что } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x = \sin(\pi - 2x),$$
$$\sin x = \sin 2x,$$

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$,

б) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Согласно полученному для x условию в случае а) имеем $x = 0$. Тогда $y = \frac{\pi}{2}$. В случае б) $x = \frac{\pi}{3}$. Тогда $y = \frac{\pi}{6}$. Во втором случае получаем

$$y = x + \frac{\pi}{2} \quad \left(\text{отсюда видно, что } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x = \sin(\pi + 2x),$$
$$\sin x = -\sin 2x,$$

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$,

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Согласно найденному для x условию в случае а) имеем $x = 0$. Тогда $y = \frac{\pi}{2}$. В случае б) решений нет. Итак, система имеет два решения $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

4°. Обратные тригонометрические функции

730. а) $0{,}3\pi$.

b) Если $\alpha = \arcsin(\sin 1{,}3\pi)$, то по определению арксинуса $\sin\alpha = \sin 1{,}3\pi$, причем

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Проще всего определить α по графику функции $y=\sin x$[1] (рис. 59). Отложите на оси абсцисс число $1{,}3\pi$, найдите геометрически отрезок $\sin 1{,}3\pi$ (это будет ордината точки графика, соответствующей абсциссе $1{,}3\pi$) и проведите прямую $y=\sin 1{,}3\pi$. Одна из точек пересечения этой прямой с графиком лежит на отрезке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, ее абс-

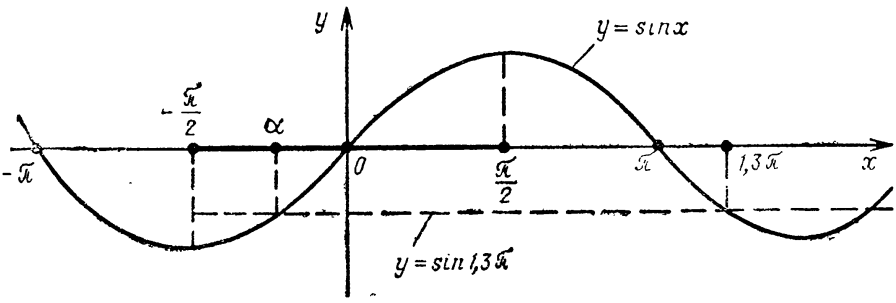


Рис. 59

цисса и есть искомый угол α (для него выполнены оба условия (1)). Для вычисления α заметим, что точки α и $1{,}3\pi$ симметричны относительно точки $\frac{\pi}{2}$ (рис. 59), так что $1{,}3\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$, откуда $\alpha=\pi-1{,}3\pi=-0{,}3\pi$.

Более формально вычисления можно выполнить, используя свойства арксинуса и формулы приведения. Имеем

$$\alpha=\arcsin(\sin 1{,}3\pi)=\arcsin[\sin(\pi+0{,}3\pi)]=$$
$$=\arcsin[\sin(-0{,}3\pi)]=-\arcsin(\sin 0{,}3\pi)=-0{,}3\pi.$$

c) Аналогично задаче 1b, найдем

$$\arcsin(\sin 1{,}7\pi)=1{,}7\pi-2\pi=-0{,}3\pi.$$

d) $3\pi-10$.

731. Указание. Для решения воспользуйтесь графиком функции $y=\cos x$ (аналогично задаче 1) и определением арккосинуса. Ответ: a) $0{,}97\pi$; b) $0{,}8\pi$; c) $\pi-\alpha=10-3\pi$, откуда $\alpha=\arccos(\cos 10)=4\pi-10$.

---

[1] Вместо графика можно воспользоваться интерпретацией тригонометрических функций на круге.

732. a) Для решения воспользуемся графиком функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 60). Если обозначить $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]=\alpha$, то, по определению арктангенса, имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-6)$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Угол α, удовлетворяющий двум последним условиям, легко подсчитать из геометрических соображений: $\alpha=-[-2\pi-(-6)]=2\pi-6$.

b) Аналогично предыдущей задаче $\operatorname{arctg}(-3)=\pi-3$. Тогда $2\operatorname{arctg}(-3)=2\pi-6$.

733. a) $2\pi/3$, b) $4\pi-10$.

734. a) Полагая в формуле $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ угол $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$, найдем

$$\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)=1-2\left[\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\right]^2=1-2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}.$$

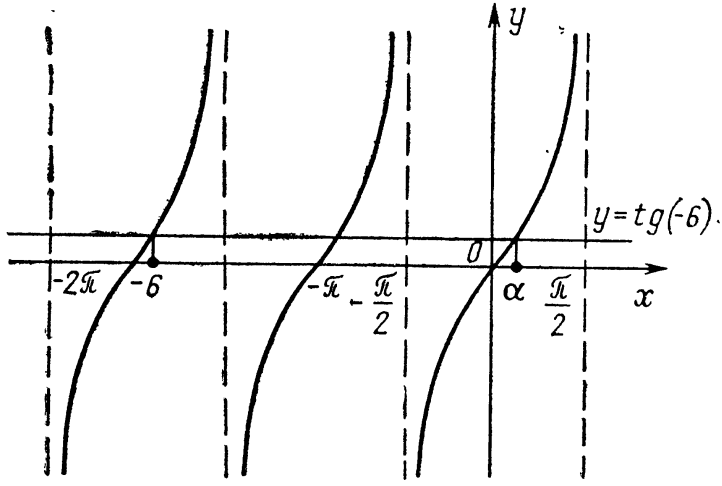


Рис. 60

b) известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$. Если положить $\alpha=\arccos\frac{1}{4}$, то, по определению арккосинуса, $\cos\alpha=\frac{1}{4}>0$ и, значит, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$. Поэтому в написанной выше формуле перед радикалом следует взять знак „плюс“. Имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

c) Если в формуле $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ положить $\alpha=$ $=\arcsin\frac{1}{5}$, то $\sin\alpha=1/5>0$ и, значит, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$. Тогда имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\frac{1}{25}}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

d) $\frac{1}{3}$. e) $\frac{\sqrt{264}}{5}$.

f) Полагая в формуле $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ угол $\alpha=\arccos\frac{2}{3}$, найдем

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}.$$

a) Пусть

$$\alpha=\arccos\frac{4}{5}\text{ и }\beta=\arccos\frac{1}{4}.$$

Тогда $\cos\alpha=\frac{4}{5}>0$, $\cos\beta=\frac{1}{4}>0$ и, следовательно, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Поскольку функция $y=\cos x$ монотонно убывает при $0<x<\frac{\pi}{2}$, то из неравенства $\cos\alpha>\cos\beta$ следует неравенство $\alpha<\beta$ и, значит,

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0. \tag{1}$$

Подсчитаем $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$. Так как для данных α и β

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5},\ \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

то имеем

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{4\sqrt{15}-3}{20}. \tag{2}$$

По определению арксинуса, из (1) и (2) находим ответ:

$$\alpha-\beta=\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{1}{4}=\arcsin\left(-\frac{4\sqrt{15}-3}{20}\right)=$$
$$=-\arcsin\frac{4\sqrt{15}-3}{20}.$$

b) Заметим, что

$$\operatorname{arcctg}(-2)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)=\operatorname{arcctg}(-2)+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Пусть $\alpha=\operatorname{arcctg}(-2)$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Требуется найти $\alpha+\beta$. Имеем $\operatorname{ctg}\alpha=-2<0$ $\left(\text{и, значит, } \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\beta=$ $=\frac{2}{3}>0$; тогда $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, откуда $\frac{\pi}{2}<\alpha+$ $+\beta<\frac{3}{2}\pi$. Подсчитаем тангенс искомого угла

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}.$$

Итак, нужно найти угол, заключенный в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, тангенс которого равен $\frac{1}{8}$. Из графика функции $y=\operatorname{tg}x$ (сделайте чертеж) легко сообразить, что искомый угол равен $\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$.

c) Указание. Подсчитайте тангенс искомого угла и установите, в каком интервале заключен этот угол.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

d) Указание. Аналогично предыдущим задачам покажите, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}\frac{5}{7}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: π.

736. а) Отметим, что данное выражение определено, если

$$\begin{cases} -1 \leqslant x-1 \leqslant 1, \\ 2x-x^2 \geqslant 0, \ x \neq 0, \quad \text{откуда} \quad 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Обозначим

$$\alpha = \arcsin(x-1), \ \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}.$$

Требуется найти $\gamma = \alpha + 2\beta$. Имеем

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = x-1$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{2x-x^2};$$

2) $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$.

Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)^{1)}. \qquad (1)$$

Из неравенства $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ следует, что $0 \leqslant \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда, поскольку угол β лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, из равенства тангенсов (1) следует равенство самих углов, так что $\beta = \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}+\beta = \frac{\pi}{4}$.

Отсюда искомый угол $\gamma = 2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) = \frac{\pi}{2}$. Ответ: при любых $0 < x \leqslant 2$

$$\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

в) Оценим величину $\alpha = \pi(x^2+x-3)$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Имеем

$$0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \quad 0 \leqslant x^2+x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$-3\pi \leqslant \alpha \leqslant -\frac{5}{2}\pi$$

---

1) Использовали формулу „тангенс половинного аргумента".

или

$$\pi \leqslant 4\pi + \alpha \leqslant \frac{3}{2}\pi. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\arccos(\sin\alpha) &= \arccos[\sin(4\pi+\alpha)] = \\ &= \arccos\sin\left[\frac{3}{2}\pi - \left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right] = \\ &= \arccos\left[-\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right] = \\ &= \pi - \arccos\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha\right)\right],\end{aligned}$$

где, в силу неравенства (1),

$$0 \leqslant \frac{3}{2}\pi - 4\pi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда окончательно получаем

$$\arccos(\sin\alpha) = \pi - \frac{3}{2}\pi + 4\pi + \alpha = \frac{7}{2}\pi + \alpha.$$

Ответ: $\frac{7}{2}\pi + \pi(x^2 + x - 3)$.

737. a) Имеем $\arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{3}$, $\sqrt{x} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{3}{4}$.

b) Обозначив $\arccos x = y$, имеем

$$\frac{1}{5}y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y = \frac{5}{2}\pi + 10\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поскольку ни при каком целом n неравенство $0 \leqslant y \leqslant \pi$ не выполняется, то исходное уравнение не имеет решений.

c) Обозначив $\operatorname{arcctg} x = y$, имеем

$$5y = \frac{\pi}{2}(4n+1), \quad y = \frac{\pi}{10}(4n+1) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поскольку $0 < y < \pi$, то в последнем равенстве n может принимать лишь значения 0, 1, 2. Тогда найдем соответственно $y = \frac{\pi}{10}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{9}{10}\pi$.

Окончательно получим

$$x_1 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}, \quad x_2 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0, \quad x_3 = \operatorname{ctg}\frac{9}{10}\pi = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}.$$

738. Имеем

$$2\arcsin x = -\arccos(1-x).$$

Взяв косинус от обеих частей этого уравнения, получим следствие из него:

$$\cos(2\arcsin x) = \cos[-\arccos(1-x)]. \qquad (1)$$

Так как

$$\cos(2\arcsin x) = 1-2[\sin(\arcsin x)]^2 = 1-2x^2,$$
$$\cos[-\arccos(1-x)] = \cos[\arccos(1-x)] = 1-x,$$

то из (1) находим

$$1-2x^2 = 1-x, \quad 2x^2-x=0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что лишь первый корень удовлетворяет исходному уравнению. Ответ: $x=0$.

739. Следствием из данного уравнения является следующее:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\operatorname{arcctg} x),$$

или

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+[\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad (1)$$

Здесь мы воспользовались формулой $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Если обозначить $\alpha = \arcsin x = \operatorname{arcctg} x$, то $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ (поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$), поэтому

$$\sin\alpha > 0 \text{ и } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Уравнению (1), очевидно, могут удовлетворять лишь $x > 0$. С учетом этого требования из (1) находим:

$$\frac{1}{1+x^2} = x^2, \quad x^4+x^2-1=0,$$
$$x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Докажем, что найденная величина является решением исходного уравнения (непосредственная проверка здесь

затруднительна). Так как данное уравнение можно записать в эквивалентном виде

$$x=\sin\alpha=\operatorname{ctg}\alpha,\ 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

то решить его — значит найти такие значения x, которые являются синусом некоторого угла α, лежащего на полуинтервале, и котангенсом того же угла. Но при $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ существует единственное значение x, удовлетворяющее этим условиям, являющееся ординатой точки пересечения графиков функций $x=\sin\alpha$ и $x=\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 61). Значит, данное уравнение имеет единственное положительное решение. Но такое решение мы уже нашли. Итак, $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ — корень данного уравнения.

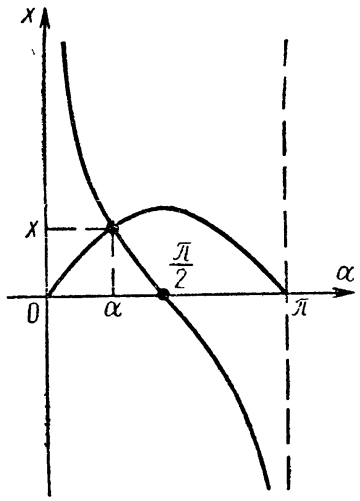


Рис. 61

740. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $\arccos(\sqrt{3}x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ и возьмите косинусы от обеих частей. Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

741. Перепишем данное уравнение в виде

$$2\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-3\operatorname{arcctg}x. \qquad (1)$$

Пусть $\operatorname{arctg}x=\alpha$, $\operatorname{arcctg}x=\beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=x$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\beta=x$, $0<\beta<\pi$. Взяв тангенс от обеих частей уравнения (1), получим следующее следствие из него:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3\beta\right),$$

или

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}3\beta. \qquad (2)$$

Используя формулы

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg}2\beta=\frac{\operatorname{ctg}^2\beta-1}{2\operatorname{ctg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}3\beta=\operatorname{ctg}(2\beta+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}2\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}2\beta+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Из последнего равенства получим

$$\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\frac{x^2-1}{2x}\cdot x-1}{\frac{x^2-1}{2x}+x}$$

или

$$\frac{2x}{1-x^2}=\frac{x(x^2-3)}{3x^2-1},$$

$$x\left(\frac{?}{1-x^2}-\frac{x^2-3}{3x^2-1}\right)=0,\quad x(x^4+2x^2+1)=0.$$

Поскольку $x^4+2x^2+1\neq 0$, то отсюда находим $x=0$. Проверка показывает (убедитесь в этом), что при $x=0$ исходное уравнение не удовлетворяется. Следовательно, $x=0$ — посторонний корень.

Но отсюда еще нельзя сделать вывод, что уравнение не имеет решений. Переходя к уравнению (2), мы могли потерять те корни, для которых $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 3\beta$ не существует, т. е. $\cos 2\alpha=0$ и $\sin 3\beta=0$.

Убедитесь, что при α и β, удовлетворяющих двум последним равенствам, исходное уравнение также не имеет решений.

Ответ. Уравнение не имеет решений.

742. Указание. Возьмите синус от обеих частей уравнения. Ответ: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Замечание. При проверке второго и третьего корня потребуется доказать или опровергнуть равенства

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

$$\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)+\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Покажем справедливость равенства (1). Угол $\arcsin\frac{4}{5}$ острый и его косинус равен $\sqrt{1-16/25}=3/5$ поэтому $\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{3}{5}$. Но тогда на основании тождества 3*а* (см. предварительные замечания к § 1, ч. II) имеем:

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}=\arcsin 1,$$

так что $x_2=1$ — корень исходного уравнения.

743. Аналогично убедитесь в справедливости равенства (2).

Обозначим

$$\operatorname{arctg}(2+\cos x)=\alpha, \quad \operatorname{arctg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)=\beta.$$

Так как $2+\cos x>0$ и $2\cos^2\frac{x}{2}\geqslant 0$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=2+\cos x$ и $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=2\cos^2\frac{x}{2}$. Тогда данное уравнение принимает вид:

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

И так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — интервал монотонности тангенса, то уравнение (1) равносильно следующему

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Переходя отсюда к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=1, \tag{2}$$

мы можем потерять те корни, для которых $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ не существуют. Но в нашем случае этого не произойдет, так как $\operatorname{tg}\alpha=2+\cos x$, $\operatorname{tg}\beta=2\cos^2\frac{x}{2}$, а правые части последних соотношений существуют всегда, и уравнение (2) равносильно исходному уравнению.

Тогда из (2) получаем уравнение

$$\frac{2+\cos x-2\cos^2\frac{x}{2}}{1+(2+\cos x)2\cos^2\frac{x}{2}}=1,$$

которое после преобразований принимает вид

$$2\cos^4\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0$$

или

$$\cos^2\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}+1\right)=0.$$

Поскольку $2\cos^2\frac{x}{2}+1\neq 0$, то отсюда лишь $\cos\frac{x}{2}=0$.

Ответ: $x=\pi+2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

744. Для этого уравнения ОДЗ определяется неравенствами

$$x^2+x\geqslant 0,\ 0\leqslant x^2+x+1\leqslant 1.$$

Из этих неравенств следует, что $x^2+x\geqslant 0$ и $x^2+x\leqslant 0$, т. е. $x^2+x=0$.

Итак, ОДЗ состоит всего из двух точек: $x=0$ и $x=-1$. Следовательно, корни уравнения могут быть лишь среди этих двух значений x. Подстановка этих значений в уравнение показывает, что уравнение при этом удовлетворяется, т. е. оба они являются корнями. Ответ $x_1=0$, $x_2=-1$.

Замечание. Отметим, что предварительное нахождение ОДЗ в уравнениях такого типа иногда существенно облегчает их решение.

745. Взяв синус от обеих частей первого уравнения данной системы, получим следующую смешанную систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\sin y=\frac{1}{2}\sin y-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y, & (1)\\ -1\leqslant\frac{x}{2}+\sin y\leqslant 1, & (2)\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{6}\leqslant y\leqslant\frac{5}{6}\pi, & (3)\\ x^2+2x\sin y+3\cos y=0. & (4)\end{cases}$$

Из уравнения (1) находим

$$x=-\sin y-\sqrt{3}\cos y. \qquad (1')$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (4), получим тригонометрическое уравнение для определения y:

$$(\sin y+\sqrt{3}\cos y)^2-2\sin y(\sin y+\sqrt{3}\cos y)+3\cos y=0,$$

которое после преобразований принимает вид:

$$4\cos^2 y+3\cos y-1=0.$$

Отсюда $\cos y=-1$ и $\cos y=\frac{1}{4}$. Принимая во внимание условие (3), получим, что первое уравнение не дает решений, а из второго находим: $y_1=\arccos\frac{1}{4}$, $y_2=-\arccos\frac{1}{4}$. Поскольку $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}>\cos y=\frac{1}{4}$, то $\frac{\pi}{3}<y_1<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<y_2<-\frac{\pi}{3}$;

следовательно, условию (3) удовлетворяет лишь

$$y_1 = \arccos \frac{1}{4}.$$

Тогда $\sin y_1 = \sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и из (1′) найдем

$$x_1 = -\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}.$$

Легко проверить, что найденная пара чисел (x_1, y_1) удовлетворяет условию (2).

Проверка в данном случае не нужна, поскольку первое уравнение исходной системы равносильно соотношениям (1)—(3). Ответ: $x = -\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}$, $y = \arccos\frac{1}{4}$.

746. Указание. Возьмите тангенс от обеих частей первого уравнения системы. Проверьте, не приводит ли это к потере корней. Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 0$; $x_2 = 3$, $y_2 = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = 3$, $y_3 = -\frac{\pi}{6}$.

5°. Смешанные задачи

747. Используя формулу $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$, перепишем уравнение в виде

$$(\sin x)^{-\sin x} = (\sin x)^{-2}. \qquad (1)$$

I способ. Если основание степени $\sin x = 1$, то уравнение удовлетворяется, каков бы ни был показатель.

Если $\sin x = -1$, то уравнение не удовлетворяется (проверьте!). Если же $\sin x \neq \pm 1$ и $\sin x \neq 0$, то показатели степеней равны, т. е. $-\sin x = -2$, $\sin x = 2$. А это уравнение не имеет решений. Таким образом, наше уравнение сводится к следующему:

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

II способ. Прологарифмируем обе части уравнения (1) по основанию 10:

$$-\sin x \lg|\sin x| = -2 \lg|\sin x|,$$
$$\lg|\sin x| \cdot (\sin x - 2) = 0,$$
$$|\sin x| = 1, \quad \sin x = 2.$$

Проверка показывает, что исходному уравнению удовлетворяют лишь корни уравнения $\sin x = 1$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

748. Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi\ (2n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

749. Данное неравенство равносильно следующим двум смешанным системам $\left(t = \cos \frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \left|t + 2 - \frac{3}{4t}\right| = 1, & \text{(а)} \\ x^2 + 3x - 10 \geqslant 0; & \text{(б)} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0, \\ t + 2 - \frac{3}{4t} \neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

I. Решим систему (1). Запишем уравнение (1, а) в виде

$$\left|\frac{4t^2 + 8t - 3}{4t}\right| = 1. \qquad (3)$$

Освобождаясь от знака модуля и учитывая, что $|t| \leqslant 1$ $\left(\text{ибо } t = \cos \frac{x}{2}\right)$, получим

1) $\frac{4t^2 + 8t - 3}{4t} \geqslant 0$ при $-1 \leqslant t < 0$ и $\frac{-2 + \sqrt{7}}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

В этом случае уравнение (3) примет вид

$$4t^2 + 8t - 3 = 4t, \quad 4t^2 + 4t - 3 = 0,$$

откуда $t = \frac{1}{2} > \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}$ (второй корень этого квадратного уравнения является посторонним в силу условия $|t| \leqslant 1$). Тогда

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 4\pi n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (4)$$

Теперь из найденных решений уравнения (1, а) нужно отобрать те, которые удовлетворяют неравенству (1,б). Решения неравенства (1,б) суть

$$x \geqslant 2 \quad \text{и} \quad x \leqslant -5. \qquad (5)$$

Легко проверить, что все значения x, даваемые формулой (4), удовлетворяют условиям (5), кроме $x=-\frac{2}{3}\pi$. Таким образом, для рассматриваемого случая решения исходного неравенства можно записать в виде

$$x=\frac{2}{3}\pi,\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+4\pi n \quad (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

2) $\frac{4t^2+8t-3}{4t}<0$ при $0<t\leqslant\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$ (6);

в этом случае уравнение (3) дает:

$$4t^2+8t-3=-4t,\quad 4t^2+12t-3=0,$$

$$t=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{3}<1{,}8$, $\sqrt{7}>2{,}6$, то $0<\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}<\frac{0{,}6}{2}=$ $=0{,}3$; $\frac{-2+\sqrt{7}}{2}>\frac{0{,}6}{2}=0{,}3$; поэтому $t=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет условию (6) и является решением уравнения (3). Тогда $\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$, $x=\pm 2\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2}+4\pi n$, где n — любое целое число.

Легко видеть, что при $n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ найденные решения удовлетворяют ограничениям (5). Случай $n=0$ требует более детального анализа. При $n=0$ имеем

$$x_1=2\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2},\ x_2=-2\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2}.$$

Обозначим $\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2}=\alpha$, тогда $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}>0$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Цепочка неравенств $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}<0{,}3<$ $<\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ позволяет заключить, что $\alpha>\frac{\pi}{3}>1$ [1], а тогда $x_1=2\alpha>2$. Таким образом, x_1 удовлетворяет условиям (5). Аналогично можно показать, что x_2 этим условиям не удовлетворяет и не является решением уравнения.

---

[1] Функция $y=\cos x$ является монотонно убывающей при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

II. Система (2) дает два решения $x=2$ и $x=-5$. Итак, окончательно имеем ответ:

$$x_1=\frac{2}{3}\pi,\quad x_2=2\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2},$$

$$x_3=2,\quad x_4=-5,\quad x_5=\pm\frac{2}{3}\pi+4\pi n,$$

$$x_6=\pm 2\arccos\frac{2\sqrt{3}-3}{2}+4\pi n\quad (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

750. $x_{1,2}=4\pm\sqrt{10}$, $x_3=\frac{3}{2}\pi$, $x_4=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $x_5=\frac{\pi}{2}$, $x_6=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

751. $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=\frac{\pi}{3}$, $x_4=\frac{5}{3}\pi$, $x_5=2\pi-2\arcsin\frac{1}{5}$.

752. 1) $x=6\pm\sqrt{30}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=2\operatorname{arctg}(\sqrt{7}-2)+2\pi k$, $k\neq 0,1$; 3) $x=-\operatorname{arctg}3+2\pi n$, $x=-2\operatorname{arctg}(\sqrt{7}+2)+2\pi n$, $n\neq 1,2$.

753. Данное уравнение распадается на две смешанные системы:

$$\begin{cases} |\cos x|=1, & \text{(а)}\\ \sin 2x\neq 0,\ \sin x\neq 0. & \text{(б)}\end{cases}\qquad (1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}2x+a\operatorname{ctg}x=0, & \text{(а)}\\ \sin x\neq 0,\ \sin 2x\neq 0. & \text{(б)}\end{cases}\qquad (2)$$

Решения уравнения (1,а) $x=\pi k$ являются посторонними, так как при этих значениях x $\sin x=0$ и $\operatorname{ctg}x$ не определен.

Уравнение (2,а) запишем в виде

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+a\frac{\cos x}{\sin x}=0,$$

откуда $\sin x(\cos 2x+2a\cos^2 x)=0$.

1) $\sin x=0$ (это уравнение решений не дает в силу условий (2,б)).

2) $\cos 2x+2a\cos^2 x=0$,

$2\cos^2 x-1+2a\cos^2 x=0$,

$2(1+a)\cos^2 x=1$.

При $a=-1$ последнее уравнение решений не имеет. Если $a\neq -1$, то имеем:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2(1+a)}.$$

Это уравнение имеет решения, если

$$0<\frac{1}{2(1+a)}\leqslant 1.$$

Отсюда $a\geqslant -\frac{1}{2}$.

При $a=-\frac{1}{2}$ $\cos^2 x=1$, $|\cos x|=1$. Решения этого уравнения, как мы видели, являются посторонними для исходного.

При $a>-\frac{1}{2}$ имеем $|\cos x|=\frac{1}{\sqrt{2(1+a)}}$, $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2(1+a)}}+\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Легко проверить, что найденные значения x удовлетворяют условиям (2,б) и, следовательно, являются решениями исходного уравнения. Ответ: При $a\leqslant -\frac{1}{2}$ уравнение не имеет решений; при $a>-\frac{1}{2}$ $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2(1+a)}}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

754. Обозначив $3^{\operatorname{tg}\pi x}=t$ и учитывая, что $t>0$ при любых x, получим

$$\left|t-\frac{3}{t}\right|\geqslant 2,$$

$$|t^2-3|\geqslant 2t.$$

Рассмотрим два случая:

1) $t\geqslant\sqrt{3}$. Тогда

$$t^2-2t-3\geqslant 0,$$

откуда $t\geqslant 3$ (интервал $t\leqslant -1$ является посторонним, поскольку $t\geqslant\sqrt{3}$). Возвращаясь к неизвестному x, найдем

$$3^{\operatorname{tg}\pi x}\geqslant 3,\quad \operatorname{tg}\pi x\geqslant 1,$$

$$\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant\pi x<\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

$$\frac{1}{4}+k\leqslant x<\frac{1}{2}+k,$$

где k — любое целое число.

2) $0 < t < \sqrt{3}$. Тогда

$$t^2 + 2t - 3 \leqslant 0.$$

Отсюда $0 < t \leqslant 1$.

Тогда

$$3^{\operatorname{tg} \pi x} \leqslant 1, \quad \operatorname{tg} \pi x \leqslant 0.$$

Отсюда находим

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < \pi x \leqslant \pi k,$$

$-\frac{1}{2} + k < x \leqslant k$, где k — любое целое число. Заметим, что при этом ОДЗ, которая находится из неравенства

$$\cos \pi x \neq 0, \quad \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$x \neq \frac{1}{2} + k$, удовлетворяется автоматически. Ответ: $\frac{1}{4} + k \leqslant x < \frac{1}{2} + k$, $-\frac{1}{2} + k < x \leqslant k$, где k — любое целое число.

755. Для решений данного неравенства ОДЗ определяется условиями

$$\operatorname{tg} x > 0, \ \log_{1/2} \operatorname{tg} x \geqslant 0.$$

По свойству показательной функции данное неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{\log_{1/2} \operatorname{tg} x} - 1 < 0,$$
$$\sqrt{\log_{1/2} \operatorname{tg} x} < 1.$$

Это последнее неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 \leqslant \log_{1/2} \operatorname{tg} x < 1,$$

которое, в свою очередь, приводится к виду

$$\frac{1}{2} < \operatorname{tg} x \leqslant 1.$$

Отсюда получаем, что решением исходного неравенства будут все x из промежутков

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поскольку при решении использовались только равносильные преобразования.

756. Данное неравенство равносильно системе

$$\lg \sin x \cdot \lg x \geqslant 0, \quad x > 0.$$

Область определения функции $\lg \sin x$ состоит из множества интервалов:

$$2\pi k < x < \pi + 2\pi k.$$

В силу условия $x > 0$ в последних неравенствах k принимает все целые неотрицательные значения.

Во всех выписанных интервалах $\lg \sin x \leqslant 0$ и, значит, неравенство $\lg \sin x \cdot \lg x \geqslant 0$ выполняется только тогда, когда или $\lg \sin x = 0$, т. е. $x = \pi/2 + 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ или $\lg x \leqslant 0$ (если $\lg \sin x < 0$), т. е. $0 < x \leqslant 1$. Значит, все решения исходного неравенства имеют вид

$$0 < x \leqslant 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

757. Указание. Данная система неравенств равносильна следующей:

$$x^{2 \sin x - \cos 2x + 1} < 1, \quad x > 0$$

или

$$x^{2 \sin x (\sin x + 1)} < 1, \quad x > 0,$$

откуда

$$\sin x (\sin x + 1) \lg x < 0.$$

Ответ: $0 < x < 1$, $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

758. Данная система неравенств равносильна следующей:

$$(\sin x - a) \lg x > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1) Пусть $a \geqslant 1$. Тогда $\sin x - a < 0$, и значит, должно быть

$$\lg x < 0, \quad \text{т. е.} \quad 0 < x < 1.$$

2) Пусть теперь $0 < a < 1$. Для этого случая результаты исследования знака $\lg x$ и $\sin x - a$ приведены в таблице.

	$\lg x$	$\sin x - a$
больше 0 (> 0)	$1 < x < \frac{\pi}{2}$	$\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$
меньше 0 (< 0)	$0 < x < 1$	$0 < x < \arcsin a$

$\left(\text{при этом всюду учитывается, что } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда $(\sin x - a)\cdot \lg x > 0$ в двух случаях:

а) $\begin{cases} 0 < x < \arcsin a, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$

Отсюда

1) $0 < x < \arcsin a$, если $\arcsin a \leqslant 1$, т. е. $0 < a \leqslant \sin 1$;

2) $0 < x < 1$, если $\arcsin a > 1$, т. е. $a > \sin 1$.

б) $\begin{cases} \arcsin a < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Отсюда

1) $1 < x < \frac{\pi}{2}$, если $\arcsin a \leqslant 1$, т. е. $0 < a \leqslant \sin 1$;

2) $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$, если $\arcsin a > 1$, т. е. $a > \sin 1$.

Итак, окончательно имеем Ответ: При $a \leqslant \sin 1$, $0 < x < \arcsin a$, $1 < x < \frac{\pi}{2}$.

При $\sin 1 < a < 1$, $0 < x < 1$, $\arcsin a < x < \frac{\pi}{2}$.

При $a \geqslant 1$, $0 < x < 1$.

759. Указание. Запишем уравнение в виде

$$81^{\sin^2 x} + 81^{1-\sin^2 x} = 30,$$

$$81^{\sin^2 x} + \frac{81}{81^{\sin^2 x}} = 30.$$

Обозначив $81^{\sin^2 x} = t > 0$, получим

$$t + \frac{81}{t} = 30, \quad t^2 - 30t + 81 = 0 \quad (t > 0).$$

Ответ: $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$.

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

760. Указание. Заметив, что

$$\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1 - \sin x}{2},$$

запишем данное уравнение в виде

$$\frac{1}{2} + 16^{\sin x} = \frac{6}{4} \cdot 16^{\frac{\sin x}{2}}.$$

Обозначив $16^{\frac{1}{2}\sin x}=2^{2\sin x}=t>0$, отсюда найдем

$$\frac{1}{2}+t^2=\frac{3}{2}t,\quad 2t^2-3t+1=0.$$

Ответ: $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

761. Указание. Заметив, что $\sin^2\frac{5x}{2}=\frac{1-\cos 5x}{2}$, и обозначив $4^{\cos 5x}=t>0$, сведем задачу к решению квадратного уравнения

$$2t^2-9t+4=0.$$

Ответ: $x_1=\frac{2}{5}\pi k$, $x_2=\pm\frac{2}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi k$, где k — любое целое число.

762. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

763. Указание. Заметив, что $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}=\frac{\cos x-\sin x}{2\cos x}=$ $=\frac{1-\operatorname{tg}x}{2}$ и обозначив $2^{\operatorname{tg}x}=t>0$, придем к уравнению

$$1+t=\frac{6}{t},\quad t^2+t-6=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

764. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

765. Указание. Используя определение логарифма, получим

$$(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}\sin x)^{\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}=$$
$$=\sqrt{2}-1$$

при условии, что

$$\sin x>0,\ \sin x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Заметив, далее, что

$$2^{5/2+2\cos 2x}=2^{5/2}\cdot 2^{2(2\cos^2 x-1)}=\sqrt{2}\cdot 4^{2\cos^2 x}$$

и введя обозначение $4^{\cos^2 x}=t>0$,
приведем уравнение к квадратному

$$\sqrt{2}\,t^2-(2\sqrt{2}-1)\,t+\sqrt{2}-1=0.$$

Задача сводится к нахождению положительных корней этого уравнения ($t>0$) и последующему отбору решений в соответствии с условиями (1). Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$).

766. Указание. Заметим, что $\log_{\sqrt[3]{4}} 16=6$;

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right),\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

Тогда, обозначив $4^{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=t>0$, запишем данное уравнение в виде

$$4t^2-16{,}5t+2=0.$$

Ответ: $x_1=2\pi n,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ ($n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$).

767. Указание. Обратите внимание, что преобразование

$$\log_{\sin x}\frac{1-\cos 2x}{2}=\log_{\sin x}\sin^2 x=2$$

справедливо лишь с учетом условий $\sin x>0$, $\sin x\neq 1$. Заметив далее, что $(1+\cos 2x)^{-1}=(2\cos^2 x)^{-1}=\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 x)$, введите новое неизвестное $t=4^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}>0$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$).

768. Указание. Заменой $t=4^{\sin^2\pi x}$ данное неравенство сводится к системе

$$\begin{cases} t+\frac{12}{t}\leqslant 8, \\ t>0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{4}+k\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}+k$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$).

769. Данное уравнение равносильно следующему [1]:

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{8\cos^2 x}}. \qquad (1)$$

[1] На первый взгляд может показаться, что уравнение (1) является лишь следствием исходного и имеет более широкую ОДЗ. Очевидно, однако, что условие $\sin x>0$ выполняется автоматически (в правой части уравнения (1) стоит арифметический корень). Условие $(8\cos^2 x)^{-1}\neq 1$ также удовлетворяется, иначе мы имели бы $\cos^2 x=\frac{1}{8}$ и $\sin x=1$, что невозможно.

Далее имеем

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|\cos x|}. \qquad (2)$$

Рассмотрим два случая:

1) $\cos x > 0$. Тогда из уравнения (2) имеем

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

откуда $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$. $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Чтобы из найденных значений x отобрать те, которые удовлетворяют условию $\cos x > 0$, используем интерпретацию решений на тригонометрическом круге. При $k = 0, 1, 2, 3$ соответствующие углы показаны на рис. 62 (для других значений k углы начинают повторяться). Условию $\cos x > 0$ удовлетворяют лишь углы $x_0 = \frac{\pi}{8}$ и $x_1 = \frac{3}{8}\pi$ и получающиеся из них множества (при $k = 4n$ и $k = 4n + 1$), т. е. углы

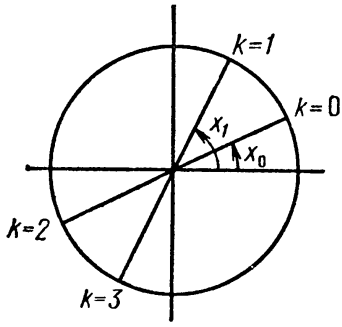


Рис. 62

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + 2\pi n, \; x_2 = \frac{3}{8}\pi + 2\pi n \; (n = 0, \pm 1, \pm 2).$$

2) $\cos x < 0$. Этот случай разбирается аналогично и дает еще две группы решений

$$x_3 = \frac{5}{8}\pi + 2\pi n, \; x_4 = \frac{7}{8}\pi + 2\pi n.$$

Полученные четыре группы решений могут быть объединены в две:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \pi n \text{ и } x = (-1)^n \frac{3}{8}\pi + \pi n$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

770. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

771. Указание. Данное уравнение равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 1 + \cos x = 2\sin^2 x, \\ \sin x > 0, \; \sin x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

(приняли во внимание, что $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\geqslant 0$).

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

772. Для решения данного уравнения ОДЗ определяется совокупностью неравенств:

$$\sin x>0,\ \cos x>0,\ \cos 2x>0.$$

Следствием данного уравнения являются следующие уравнения:

$$\lg\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lg 4\frac{\cos 2x}{\cos x},$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}=4\frac{\cos 2x}{\cos x},\ 2\cos^2 x=4\cos 2x,$$

$$1+\cos 2x=4\cos 2x,\ \cos 2x=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Общий наименьший положительный период функций $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$ равен 2π. Находим корни уравнения (1), удовлетворяющие условию $0\leqslant x<2\pi$:

$$x_1=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3},\ x_2=\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3},\ x_3=2\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}.$$

Так как $\cos x_2<0$, $\sin x_3<0$, то x_2 и x_3 не являются корнями данного уравнения; x_1 — корень данного уравнения, поскольку $\sin x_1>0$, $\cos x_1>0$, $\cos 2x_1>0$. Тогда все решения могут быть представлены формулой:

$$x=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+2\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

773. $x=\frac{\pi}{8}+2\pi k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

774. Указание. Переходя во всех логарифмах к основанию 2 и потенцируя, придем к системе неравенств

$$\begin{cases}\log_2(\cos 2x\cdot\sin x\cdot\cos x)<-3,\\ 0<x<\frac{\pi}{4},\end{cases}$$

равносильной исходной.

Первое неравенство этой системы легко преобразовать к виду

$$0<\cos 2x\cdot\sin x\cdot\cos x<\frac{1}{8},\ 0<\sin 4x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $0<x<\frac{\pi}{24},\ \frac{5}{24}\pi<x<\frac{\pi}{4}$.

775. Следствием данного уравнения является уравнение

$$\sin\frac{x}{2}=\cos 2x,$$

которое равносильно такому:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos 2x.$$

Откуда $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\pm 2x+2\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Из последнего соотношения находим:

$$x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi k, \tag{1}$$

$$x=\frac{\pi}{5}+\frac{4}{5}\pi k. \tag{2}$$

Поскольку общий период функций $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равен 4π, то достаточно проверить, удовлетворяют ли данному уравнению значения x, лежащие на отрезке $[0,\ 4\pi]$. Из формулы (1) берем следующие значения x:

$$x=\pi,\ x=\frac{7}{3}\pi,\ x=\frac{11}{3}\pi.$$

Ни одно из этих чисел не является корнем исходного уравнения (проверьте!). Из формулы (2) берем следующие значения x:

$$x=\frac{\pi}{5},\ x=\pi,\ x=\frac{9}{5}\pi,\ x=\frac{13}{5}\pi,\quad x=\frac{17}{5}\pi.$$

Данному уравнению удовлетворяют лишь $x=\pi/5$ и $x=9\pi/5$ (убедитесь в этом!). Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x_1=\frac{\pi}{5}+4\pi k,\ x_2=\frac{9}{5}\pi+4\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

776. Следствием данного уравнения является следующее равенство:

$$\frac{\sin x}{\cos x\,(1-\operatorname{tg}^2 x)}=2,$$

откуда

$$2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0,$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Значение $\operatorname{tg} x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ не дает решений данного уравнения, так как если $\operatorname{tg} x < 0$, то либо $\sin x < 0$, либо $\cos x < 0$, и хотя бы одна из функций, входящих в уравнение, не определена.

Если $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, то на полуинтервале $0 \leqslant x < 2\pi$ имеется только один корень, удовлетворяющий данному уравнению,

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

(второй корень $x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ является посторонним; почему?!).

Тогда общее решение исходного уравнения (2π — период) имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

777. Указание. Решается аналогично задачам 772 — 776. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Общие замечания к задачам 765—777. Указанные задачи сводятся, как правило, к решению смешанных систем, состоящих из уравнений и совокупности неравенств. Наиболее существенным моментом при решении такого типа задач является отбор среди решений уравнения тех, которые удовлетворяют дополнительным условиям (системе тригонометрических неравенств в рассмотренных задачах). Для отбора решений мы использовали два подхода:

1) интерпретация решений на тригонометрическом круге (например, задача 769);

2) выписывание частных решений тригонометрического уравнения в пределах общего периода и их последующая проверка (например, задача 758).

Первый подход удобно использовать тогда, когда все функции, входящие в уравнение, имеют одинаковый период. Второй подход является более универсальным.

Отметим, что иногда оказывается удобным проверять справедливость дополнительных соотношений (неравенств) непосредственной подстановкой общих решений уравнений в эти неравенства.

778. Указание. Поскольку $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$,

$$\log_2 (1 - \cos 2x) = \log_2 (2 \sin^2 x) = 1 + 2 \log_2 \sin x$$

(так как $\sin x > 0$), то заменой $t = \log_2 \sin x$ данное уравнение сводится к квадратному

$$3t^2 + 2t + 1 = 2, \; 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

779. Указание. Сделайте замену $t=\log_{\cos x}\sin x$ и используйте свойство логарифмов

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

780. Обозначая $\log_{\operatorname{tg} x} 3=t$, приходим к неравенству

$$t^2\leqslant t+2,$$

решение которого есть

$$-1\leqslant t\leqslant 2.$$

Возвращаясь к первоначальному неизвестному x, имеем:

$$-1\leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2.$$

Поскольку в ОДЗ $0<\operatorname{tg} x\neq 1$, то нужно рассмотреть два случая.

1) $\operatorname{tg} x>1$. Тогда $\log_{\operatorname{tg} x} 3>0$ неравенство $-1\leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3$ выполняется автоматически, а из неравенства $\log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2$ следует

$$\operatorname{tg}^2 x\geqslant 3,$$

откуда $\operatorname{tg} x\geqslant\sqrt{3}$ и

$$\frac{\pi}{3}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (1)$$

2) $0<\operatorname{tg} x<1$. В этом случае $\log_{\operatorname{tg} x} 3<0$ и, значит, неравенство $\log_{\operatorname{tg} x} 3\leqslant 2$ выполняется.

А из неравенства $-1\leqslant \log_{\operatorname{tg} x} 3$ получаем $0<\operatorname{tg} x\leqslant\frac{1}{3}$, откуда

$$\pi k<x\leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (2)$$

Множество интервалов (1) и (2) и дает решение исходного неравенства.

781. Сделав замену $t=\log_{2\sin x}(2\cos x)$, придем к рациональному неравенству

$$t+\frac{2}{t}>3$$

или

$$\frac{t^2-3t+2}{t}>0,\quad \frac{(t-1)(t-2)}{t}>0.$$

Решая последнее неравенство, найдем: $t > 2$, $0 < t < 1$.

Возвращаясь к неизвестному x, имеем:

1° $$\log_{2 \sin x}(2 \cos x) > 2. \qquad (1)$$

а) $2 \sin x > 1$, т. е. $\sin x > \frac{1}{2}$.

Тогда из неравенства (1) получим:

$$2 \cos x > 4 \sin^2 x, \quad \cos x > 2(1 - \cos^2 x),$$
$$2 \cos^2 x + \cos x - 2 > 0,$$

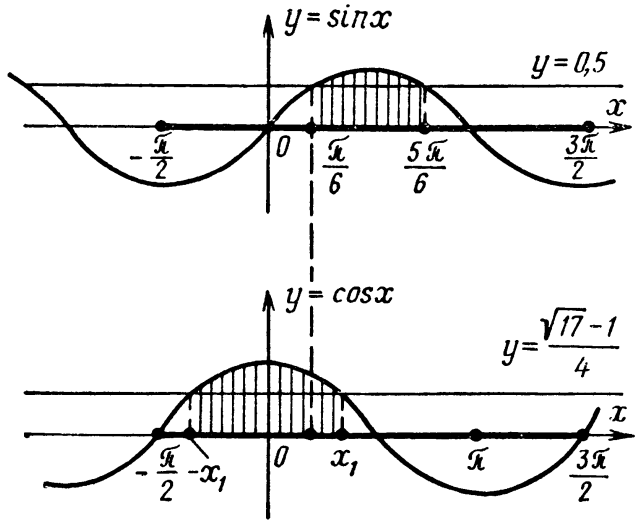


Рис. 63

откуда с учетом ограниченности косинуса ($|\cos x| \leqslant 1$) имеем

$$\cos x > \frac{\sqrt{17} - 1}{4}.$$

Итак, неравенство (1) в данном случае равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2}, \\ \cos x > \frac{\sqrt{17} - 1}{4}. \end{cases}$$

Решения каждого неравенства системы в пределах периода синуса и косинуса $\left(\text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\right)$ имеют вид соответственно рис. 63

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi, \\ -\arccos\frac{\sqrt{17} - 1}{4} < x < \arccos\frac{\sqrt{17} - 1}{4}. \end{cases}$$

Чтобы найти общую часть из этих двух интервалов, достаточно сравнить величины $\frac{\pi}{6}$ и $\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. Если $x_1 = \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, то $\cos x_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{4} < \frac{4{,}2-1}{4} = 0{,}8$; с другой стороны, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1{,}7}{2} = 0{,}85$. Отсюда следует, что $\cos x_1 < \cos\frac{\pi}{6}$, т. е.

$$x_1 = \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} > \frac{\pi}{6}\ ^{1})$$

и общим интервалом будет $\frac{\pi}{6} < x < \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

Тогда общее решение неравенства (1) для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k$$
$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (2)$$

б) $0 < 2\sin x < 1$, т. е. $0 < \sin x < \frac{1}{2}$.

В этом случае из (1) имеем

$$0 < 2\cos x < 4\sin^2 x,$$

откуда

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{17}-1}{4}.$$

Аналогично предыдущему случаю убедитесь, что система

$$\begin{cases} 0 < \sin x < \frac{1}{2}, \\ 0 < \cos x < \frac{\sqrt{17}-1}{4}, \end{cases}$$

которой в данном случае равносильно неравенство (1), не имеет решений.

2°. $0 < \log_{2\sin x}(2\cos x) < 1$.

Это двойное неравенство равносильно совокупности двух систем:

(а) $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2}, \\ 1 < 2\cos x < 2\sin x, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2},\ \cos x > \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1; \end{cases}$

---

1) Функция $y = \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ монотонно убывает.

(б) $\begin{cases} 0 < \sin x < \frac{1}{2}, \\ 1 > 2\cos x > 2\sin x > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < \sin x < \frac{1}{2}, \\ 0 < \cos x < \frac{1}{2}, \\ 0 < \operatorname{tg} x < 1. \end{cases}$

Решения системы (а) суть

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (3)$$

Система (б) не имеет решений: уже первые два неравенства этой системы $0 < \sin x < \frac{1}{2}$ и $0 < \cos x < \frac{1}{2}$ ни при каких x одновременно не удовлетворяются. Итак, окончательный ответ дается формулами (2) и (3).

782. Для решений неравенства ОДЗ определяется условием $0 < \sin x < 1$. Обозначая $\log_{\sin x} 2 = t$, перепишем данное неравенство в виде

$$t^2 - 2t - 3 < 0,$$

или

$$(t-3)(t+1) < 0.$$

Так как $0 < \sin x < 1$, то $t < 0$, а значит, и $t - 3 < 0$, и из последнего неравенства следует

$$t + 1 > 0, \quad t > -1,$$

или $\log_{\sin x} 2 > -1$, откуда $0 < \sin x < \frac{1}{2}$. Решения последнего двойного неравенства суть

$$2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \frac{5}{6}\pi + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

783. Указание. Сделав замену $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x = t$, сведите данное неравенство к такому:

$$t - \frac{2}{t} - 1 < 0,$$

откуда $0 < t < 2$, $t < -1$. Далее аналогично задаче 781. Ответ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $2\pi n + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

784. Обозначив $\lg \sin x = t$, сведем задачу к нахождению неположительных корней квадратного уравнения

$$t^2 - 2at - a^2 + 2 = 0 \qquad (1)$$

(так как $0 < \sin x \leqslant 1$, то $t = \lg \sin x \leqslant 0$). Это уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант $D = a^2 + a^2 - 2 = 2(a^2 - 1) \geqslant 0$, т. е. при $a \geqslant 1$ и $a \leqslant -1$.

1) Пусть $a \geqslant 1$. По теореме Виета для корней уравнения (1) имеем:

$$t_1 + t_2 = 2a > 0, \quad t_1 t_2 = 2 - a^2.$$

Поскольку мы ищем неположительные корни уравнения, то нужно потребовать, чтобы $2 - a^2 \leqslant 0$, т. е. $a \geqslant \sqrt{2}$. В этом случае меньший из корней уравнения (1) положителен, а другой не положителен. Значит, в случае $a \geqslant \sqrt{2}$ имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2) Пусть теперь $a \leqslant -1$. В этом случае сумма корней уравнения (1) $2a < 0$. Если произведение корней $2 - a^2 \geqslant 0$, т. е. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$, то оба корня не положительны, и, значит,

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если же $2 - a^2 < 0$, т. е. $a < -\sqrt{2}$, то корни уравнения (1) разных знаков и потому

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k.$$

Итак, резюмируем:

при $a < -\sqrt{2}$, $a \geqslant \sqrt{2}$

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k;$$

при $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k;$$

при $-1 < a < \sqrt{2}$ нет решений.

785. Указание. Сделайте замену $t = \log_a \sin x$. Далее аналогично предыдущей задачи.

Ответ: При $0 < a < 1$

$$x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}} + \pi k.$$

При $a > 1$

$$x = (-1)^k \arcsin a^{-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} + \pi k$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

786. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \frac{1}{2} \log_{|\sin x|} 3 = a$$

или

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_{|\sin x|} 2 = 2a,$$

или

$$\log^2_{|\sin x|} 2 = 2a \log_3 2$$

(использованы, свойства логарифмов $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$).

Из последнего равенства следует, что если $a \leqslant 0$, то уравнение не имеет решений. Если же $a > 0$, то

$$\log_{|\sin x|} 2 = \pm \sqrt{2a \log_3 2},$$

откуда

$$|\sin x| = 2^{\frac{1}{\pm \sqrt{2a \log_3 2}}}.$$

Поскольку $2^{\frac{1}{\sqrt{2a \log_3 2}}} > 1$, а $0 < 2^{-\frac{1}{\sqrt{2a \log_3 2}}} < 1$, то

$$|\sin x| = 2^{-\frac{1}{\sqrt{2a \log_3 2}}},$$

откуда

$$x = \pm \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}} + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

787. Учитывая ОДЗ для x, получим две системы, равносильные исходному неравенству:

$$1) \begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x > 1, \\ \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} x + 3 \geqslant 1; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 0 < \sin x + \sqrt{3} \cos x < 1, \\ 0 < \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} x + 3 \leqslant 1. \end{cases}$$

Используя известное преобразование тригонометрического выражения

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \alpha),$$

найдем

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда имеем

$$1) \begin{cases} 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) > 1 \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) > \frac{1}{2}, & (1) \\ x^2 - 5x + 4 \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Общее решение неравенства $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}$ имеет вид (см. рис. 64)

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x+\frac{\pi}{3}<\frac{5}{6}\pi+2\pi k,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

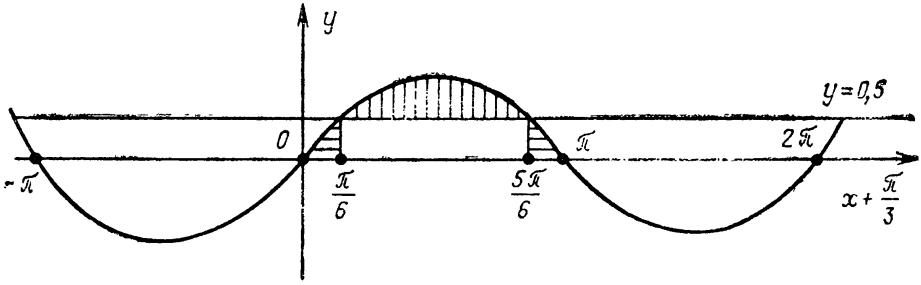


Рис. 64

где k — любое целое число.

Решение квадратного неравенства (2) суть $x\geqslant 4$, $x\leqslant 1$. Находя общие интервалы из выписанных выше (например, с помощью числовой оси), получим решения первой системы:

$$-\frac{\pi}{6}<x\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \text{где}$$

$$k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

$$2)\ \begin{cases}0<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1/2, & (3)\\ 0<x^2-5x+6\leqslant 2. & (4)\end{cases}$$

Общие решения неравенства (3) суть (рис. 64):

$$2\pi k<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

и

$$\frac{5}{6}\pi+2\pi k<x+\frac{\pi}{3}<\pi+2\pi k.$$

Откуда

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi k,$$

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{2}{3}\pi+2\pi k. \qquad (5)$$

Решая двойное неравенство (4), получим

$$3 < x \leqslant 4 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant x < 2. \tag{6}$$

Легко видеть, что рассматриваемая система имеет лишь решение $\frac{\pi}{2} < x < 2$, которое получается как общая часть интервала (5) при $k=0$ и интервалов (6). В других случаях система несовместна. Окончательный ответ имеет вид:

$-\frac{\pi}{6} < x \leqslant 1$, $\frac{\pi}{2} < x < 2$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

788. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1, \\ \sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x \geqslant \sqrt{2}(\sin x + \cos x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0 < \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 1, \\ 0 < \sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x \leqslant \sqrt{2}(\sin x + \cos x). \end{cases}$

Заметив, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{8}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, и упрощая вторые неравенства систем, получим:

1) $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$

Общее решение первого неравенства системы (1)

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi + 2\pi k.$$

Отсюда $-\frac{\pi}{12} + 2\pi k < x < \frac{7}{12}\pi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
Так как $\sin x \geqslant 0$, то решение первой системы имеет вид:

$$2\pi k \leqslant x < \frac{7}{12}\pi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3}$$

2) $\begin{cases} 0 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}, & (4) \\ \sin x \leqslant 0, \ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0. & (5) \end{cases}$

Общие решения двойного неравенства (4) суть

$$2\pi k < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2\pi k < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi k,$$

$$\frac{7}{12}\pi + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда, с учетом решений неравенства (5), окончательно получим (убедитесь в этом!)

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (6)$$

Итак, формулами (3) и (6) представлены решения исходного неравенства.

789. Указание. Решается аналогично задаче 774. Ответ: $-\frac{\pi}{6} < x < 0$, $2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

790. Указание. Решается аналогично задаче 775. Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

791. Поскольку 2π является периодом функции [1] $f(x) = \log_{a(x)} \cos x$, то достаточно решить данное неравенство на отрезке $[0, 2\pi]$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ и получить затем общее решение прибавлением чисел 2π.

Но из этих значений x только при $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $x \neq \frac{\pi}{6}$ существует функция $f(x)$. При $x = \frac{\pi}{6}$ имеем $a(x) = 1$ и $f(x)$ неопределена, при $\frac{\pi}{2} > x \geqslant \frac{\pi}{4}$ имеем $a(x) \leqslant 0$ и $f(x)$ также неопределена; при $2\pi < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ поведение $f(x)$ аналогично.

1) При $0 < x < \frac{\pi}{6}$ имеем $0 < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ и, следовательно, $a(x) > 1$. Тогда из данного неравенства следует $\cos x > 1$, что ни при каких x не выполняется.

---

[1]) Общий период $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ равен 2π.

2) При $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ имеем $\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$ и $0 < a(x) < 1$. Тогда из данного неравенства получим

$$0 < \cos x < 1.$$

Итак, в данном случае решением будут все $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$. Таким образом, общее решение исходного неравенства можно записать в виде

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

792. Данное неравенство равносильно двум системам:

1) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1, \\ 0 < \frac{1+\sin x}{1-\cos x} < \operatorname{ctg} x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} x < 1, \\ \frac{1+\sin x}{1-\cos x} > \operatorname{ctg} x. \end{cases}$

1) $\operatorname{ctg} x > 1$ (следовательно, $1 - \cos x > 0$)

$$0 < 1 + \sin x < \operatorname{ctg} x - \cos x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Условие $1 + \sin x > 0$ следует из неравенства $\operatorname{ctg} x > 1$. Неравенство $1 + \sin x < \operatorname{ctg} x - \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$ преобразуется к виду

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} < -1.$$

Так как $x \neq \pi k$, то $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и, значит, рассматриваемая система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} < -1. \end{cases}$$

Из неравенства $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < -1$ находим

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < \frac{x}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

откуда $-\pi + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. И так как $\operatorname{ctg} x > 1$, то окончательно находим

$$-\pi + 2\pi k < x < -\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (1)$$

2) Вторая система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} x < 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} > -1. \end{cases}$$

Из неравенства $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > -1$ находим

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k.$$

Но так как должно быть $0 < \operatorname{ctg} x < 1$, то окончательно

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (2)$$

Итак, решения исходного неравенства даются формулами (1) и (2).

793. Имеем $1 + 2\cos 2x = 4\cos^2 x - 1$. Тогда данное неравенство равносильно следующим двум системам:

$$\begin{cases} \frac{2\cos x}{\sqrt{3}} > 1, \\ 0 < \sqrt{4\cos^2 x - 1} < \frac{2\cos x}{\sqrt{3}}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{2\cos x}{\sqrt{3}} < 1, \\ \sqrt{4\cos^2 x - 1} > \frac{2\cos x}{\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (2)$$

1) Система (1) равносильна следующей:

$$\begin{cases} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 < 4\cos^2 x - 1 < \frac{1}{3}\cos^2 x \end{cases}$$

или, после замены $\cos x = t$,

$$\begin{cases} t > \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 < 4t^2 - 1 < \frac{4}{3}t^2, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Последняя система неравенств не имеет решений (убедитесь в этом).

2) Система (2) равносильна следующей:

$$\begin{cases} 0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 4\cos^2 x - 1 > \frac{4}{3}\cos^2 x \end{cases}$$

или, после замены $\cos x = t$,

$$\begin{cases} 0 < t < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 4t^2 - 1 > \frac{4}{3}t^2, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < t < \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k$,

$-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

794. Указание. Данное неравенство равносильно следующим двум системам:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 0 < \sin^2 x - \frac{5}{12} < \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \sin^2 x - \frac{5}{12} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}. \end{cases} \quad (2)$$

Система неравенств (2) не имеет решений, а все решения системы (1) дают решение задачи.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

795. Указание. Решается аналогично задачам 793, 794. Ответ: $2\pi k + \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \pi - \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi k$, $2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

796. Указание. После преобразования выражения под знаком модуля в данном неравенстве получим неравенство ему равносильное

$$\log_{\operatorname{tg} x}\left|\operatorname{tg}^2 x-\frac{3}{2}\operatorname{tg} x\right|<1.$$

Последнее неравенство равносильно двум системам (делаем замену $\operatorname{tg} x=t$):

1) $\begin{cases} t>1, \\ 0<t\cdot\left|t-\frac{3}{2}\right|<t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0<t<1, \\ t\cdot\left|t-\frac{3}{2}\right|>t. \end{cases}$

Ответ: $\pi k<x<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+$ $+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k<x<\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

797. Указание. Поскольку $|\sin x|<1$ и $\sin x\neq 0$, то $\log_2|\sin x|<0$, и данное неравенство равносильно следующему:

$$\log_2|\sin x|\cdot\log_{|\sin x|}(x^2-8x+23)<3.$$

Последнее неравенство с учетом ОДЗ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \log_2(x^2-8x+23)<3 \\ |\sin x|<1, \\ \sin x\neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $3<x<\pi$, $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<x<5$.

798. Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 0<|\cos x+\sqrt{3}\sin x|<1, \\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Далее, введя вспомогательный аргумент, запишите

$$|\cos x+\sqrt{3}\sin x|=2\cdot\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi<x<\pi$, $\frac{5}{3}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$.

799. Данное неравенство удовлетворяется в двух случаях:

1) Когда первый сомножитель обращается в нуль и функция, стоящая в квадратной скобке, определена, т. е.

$$\begin{cases} \log_{\operatorname{tg} x} 2 = 1, \\ 0 < \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases} \tag{1}$$

2) Подкоренное выражение положительно (т. е. радикал определен), а выражение в квадратной скобке неотрицательно:

$$\begin{cases} 1 - \log_{\operatorname{tg} x} 2 > 0, \\ 1 - 3\log_{\operatorname{tg} x} 2 + 2(\log_{\operatorname{tg} x} 2)^2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Из (1) находим

$$\operatorname{tg} x = 2, \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Система (2) равносильна следующей ($t = \log_{\operatorname{tg} x} 2$):

$$\begin{cases} t < 1, \\ 2t^2 - 3t + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $t \leqslant \frac{1}{2}$.

Тогда, возвращаясь к неизвестному x, имеем

$$\log_{\operatorname{tg} x} 2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство равносильно двум системам:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x} \geqslant 2. \end{cases}$$

Эта система дает $\operatorname{tg} x \geqslant 4$.

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x} \leqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $0 < \operatorname{tg} x < 1$.

Итак, решения этих систем имеют вид соответственно

$$\operatorname{arctg} 4 + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

и

$$\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

Окончательный ответ дается формулами (3), (4) и (5).

Замечание. Обратите особое внимание на то рассуждение при решении этой задачи, которое привело к

системам (1) и (2). Оно содержит логическую „тонкость", которая оставалась за пределами внимания большинства абитуриентов. Неверно считать, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1-\log_{\operatorname{tg} x} 2 \geqslant 0, \\ 1-3\log_{\operatorname{tg} x} 2+2(\log_{\operatorname{tg} x} 2)^2 \geqslant 0, \end{cases}$$

так как могут быть потеряны те решения исходного неравенства, для которых $1-\log_{\operatorname{tg} x} 2=0$, а выражение $1-3\log_{\operatorname{tg} x} 2+2(\log_{\operatorname{tg} x} 2)^2$ определено, но отрицательно.

В частности, в данной задаче были бы потеряны решения вида (3). Заметим, что в общем случае неравенство

$$f(x)\cdot g(x) \geqslant 0$$

с учетом ОДЗ равносильно двум системам:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Системы (1) и (2) являются частным случаем двух последних систем.

800. Данное неравенство равносильно двум системам:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} \sin x \leqslant 0, \\ \log_{2^x}\left[\frac{1}{9}(2^{2x-2}-3\cdot 2^{x-2}-1)\right] \geqslant 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} \sin x \geqslant 0, \\ \log_{2^x}\left[\frac{1}{9}(2^{2x-2}-3\cdot 2^{x-2}-1)\right] \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что вторые неравенства этих систем сводятся к квадратным относительно $t=2^x>1$ (так как в ОДЗ $x>0$ и, значит, $2^x>1$).

Система (1) равносильна следующим двум смешанным системам ($t=2^x$):

$$\begin{cases} x>1, \\ 0<\sin x \leqslant 1, \\ \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{4}t-1\right) \geqslant 1; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ \sin x = 1, \\ \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{4}t-1\right) \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, что система (1.2) решений не имеет, поскольку уже ни одно из решений уравнения $\sin x = 1$ не принадлежит интервалу $0 < x < 1$.

Система (1.1) равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2\pi k < x < \pi + 2\pi k \ (k = 1, 2, \ldots), \\ x > 1, \\ 2^x \geqslant 8. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$3 \leqslant x < \pi, \ 2\pi k < x < \pi + 2\pi k \ (k = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

Легко проверить, далее, что система (2) решений не имеет (убедитесь в этом, рассматривая случаи $x > 1$ и $0 < x < 1$). Итак, все решения исходного неравенства даются интервалами (3).

801. Указание. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 2 + 4\cos^2 x \geqslant \operatorname{tg}^2 x \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} t > 1, \\ 2 + \frac{4}{1+t} \geqslant t, \end{cases}$$

где обозначено $\operatorname{tg}^2 x = t$. Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

802. Указание. Аналогично задаче 799, данное неравенство равносильно двум системам:

$$1) \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \frac{x-5}{2x-1} > 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \frac{1}{2} < \sin x < 1, \\ 0 < \frac{x-5}{2x-1} \leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{3}{2}\pi < x \leqslant -4; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (k — любое целое число, отличное от нуля);

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \ (n \neq 0, -1),$$

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m \ (m \neq 0, 1).$$

803. С учетом ОДЗ данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 1+x^2+y^2+2xy=2x+2y, & (1)\\ 2x^2=2^{1-y^2} \text{ или } x^2=1-y^2, & (2)\\ y\neq 1,\ x+y\neq 0. & (3)\end{cases}$$

Из (1) и (2) получим

$$1+xy=x+y,$$

откуда, разлагая на множители, имеем:

$$(x-1)(y-1)=0.$$

Из последнего уравнения с учетом (3) находим $x=1$. А тогда $y=0$. Ответ: $x=1$, $y=0$.

804. Данная система равносильна следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} x>0,\ y>0,\ y\neq 1, & (1)\\ \log_y x=-1 \quad \text{или} \quad xy=1, & (2)\\ \sin(x+y)=1 \text{ или } x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots), & (3)\\ x+y<8. & (4)\end{cases}$$

Из (1), (3) и (4) получаем $0<\frac{\pi}{2}+2\pi n<8$, откуда $n=1, 0$. Тогда из (2) и (3) получаем две системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2},\\ xy=1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=\frac{5}{2}\pi,\\ xy=1. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений (убедитесь в этом). По теореме Виета решения второй системы являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-\frac{5}{2}\pi t+1=0.$$

Отсюда находим две пары решений:

$$x_1=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}, \qquad x_2=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4},$$

$$y_1=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4} \quad \text{и} \quad y_2=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}.$$

Очевидно, для этих пар чисел условия (1) и (4) выполнены, и они дают решение задачи.

805. Указание. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 1+\log_{\frac{x-y}{21}}\frac{21}{2}=\log_{\frac{x-y}{21}}(x+y), \\ \sin\frac{\pi(x-2)}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi y}{2}\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(x+y)=x-y,\ x+y>0,\ x-y>0,\ x-y\neq 21, \\ \frac{\pi(x-2)}{2}=(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi y}{2}\right)+\pi k\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots), \\ x+y>0,\ x-y>0,\ x-y\neq 21. \end{cases}$$

Ответ: 1) $x_m=\frac{15}{4}+6m$, $y_m=-\frac{5}{4}-2m$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$.

2) $x_n=\frac{21}{8}+3n$, $y_n=-\frac{7}{8}-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

806. Указание. Решается аналогично задачам 804, 805. Ответ: $x=2$, $y=1$.

807. Умножая обе части первого уравнения данной системы на $3^{3x+1}>0$, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 3x\cdot 3^{2y+x}+6y\cdot 3^{2x-y}=24\cdot 3^{x+y}, \\ 3x\cdot 3^{2y+x}+6y\cdot 3^{2x-y}=72\cdot 3^{2x-2y}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$24\cdot 3^{x+y}=72\cdot 3^{2x-2y},$$

$$3^{x+y}(3^{x-3y+1}-1)=0,\ 3^{x-3y+1}=1$$

или

$$x-3y+1=0. \qquad (1)$$

Комбинируя полученное соотношение с любым из двух уравнений данной системы, например со вторым уравнением, получим систему равносильную исходной.

Подставляя $x=3y-1$ во второе уравнение исходной системы, получим

$$(3y-1)\cdot 3^{5y-1}+2y\cdot 3^{5y-2}=24\cdot 3^{4y-2}$$

или

$$3^{5y}[3(3y-1)+2y]=24\cdot 3^{4y},$$

откуда

$$(11y-3)\cdot 3^{y}=24.$$

Так как $11y-3\neq 0$ (при $y=3/11$ последнее уравнение не удовлетворяется), то отсюда имеем

$$3^y=\frac{24}{11y-3}. \qquad (2)$$

Это трансцендентное уравнение не решается стандартными методами. Для его решения проведем следующие рассуждения. Поскольку левая часть уравнения (2) положительна, то должна быть положительна и его правая часть, т. е. нужно, чтобы $y>3/11$. Перепишем уравнение (2) в виде

$$3^y-\frac{24}{11y-3}=0. \qquad (3)$$

Первое слагаемое 3^y в формуле (3) представляет собой монотонно возрастающую функцию, а второе слагаемое $\frac{24}{11y-3}$ — монотонно убывающую функцию (при $y>3/11$). Разность этих функций есть, очевидно, монотонно возрастающая функция (докажите!) при всех $y>3/11$. Кроме того, можно заметить, что при $y=1$ эта разность обращается в нуль, т. е. $y=1$ есть решение уравнения (2). Значит $y=1$ есть единственное решение уравнения (2). Действительно, из доказанной монотонности для разности функций следует, что при $y>1$ эта разность больше нуля, а при $y<1$ — меньше нуля. Итак, $y=1$, а тогда из (1) получаем $x=2$. Ответ: $x=2$, $y=1$.

808. Умножая обе части первого уравнения системы на $2^{x+2y}>0$, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 2^{3x+3y}=2^{x+2y+1}, \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 2^{3x+3y}=1, \end{cases}$$

откуда

$$2^{x+2y+1}=1,$$
$$x+2y+1=0. \qquad (1)$$

Подставляя $x=-2y-1$ в первое уравнение данной системы, получим

$$-(2y+1)\cdot 2^{-3y}+3y\cdot 2^{-3y-2}=2,$$

откуда

$$8^{y+1}=-5y-4. \qquad (2)$$

Очевидно, $y=-1$ является решением последнего уравнения. Аналогично задаче 807 докажите, что это решение единственное. Тогда из (1) $x=1$. Ответ: $x=1$, $y=-1$.

809. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \log_2(x-3y)=2 \text{ или } x-3y=4, \\ 1+\log_x^2 y=\frac{5}{2}\log_x y \text{ или } \log_x y=\begin{cases}2\\1/2\end{cases}\Rightarrow y=x^2 \text{ или } y=\sqrt{x}. \end{cases}$$

Отсюда, учтя ОДЗ, $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, имеем:

$$1)\ \begin{cases} x-3y=4, \\ y=x^2 \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} x-3y=4, \\ y^2=x. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений (убедитесь в этом). Решение второй системы с учетом ОДЗ есть $x=16$, $y=4$. Эта пара чисел дает единственное решение задачи.

810. а) Для решения задачи удобно на одном чертеже изобразить графики функций $y_1=x^2+x+1$ и $y_2=\sin x$.

При этом сразу становится ясно, что уравнение не имеет решений. Действительно, при $x>0$ выражение x^2+x+1 больше 1, а $\sin x\leqslant 1$; при $x=0$ выражение x^2+x+1 равно 1, а $\sin x$ равен нулю. В области $-1\leqslant x<0$ решений тоже нет, так как

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

а $\sin x<0$.

Наконец, при $x<-1$ выражение x^2+x+1 больше 1, а $|\sin x|\leqslant 1$. Итак, ни при каких x правая часть не может равняться левой.

811. Решается аналогично предыдущей задаче. Ответ: Уравнение решений не имеет.

812. Указание. Представив уравнение в виде $2\cos x=1-3x^2$, изобразите на чертеже графики функций $y_1=2\cos x$ и $y_2=1-3x^2$. Рассмотрите случаи 1) $x>\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Ответ: Уравнение не имеет решений.

3) $0\leqslant x<\frac{1}{\sqrt{3}}$. Докажите неравенство $2\cos\frac{1}{\sqrt{3}}>1$.

813. Очевидны следующие неравенства:

$$2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant 2,\ 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2.$$

Для того чтобы уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно x, при котором одновременно выполнялись уравнения

$$\begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^x} = 2, \\ 2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2, \end{cases}$$

в противном случае либо правая часть уравнения больше двух, либо левая часть уравнения меньше двух. В обоих случаях равенство этих частей невозможно. Из первого уравнения системы находим, что $x = 0$. Значит, если система имеет решение, то им может быть только $x = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x = 0$ удовлетворяет и второму уравнению системы. Ответ: $x = 0$.

814. $x = 0$.

815. Уравнение равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \sin x^2 = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $|x| = 0$, т. е. $x = 0$. Но это значение неизвестного не удовлетворяет второму уравнению системы. Значит, исходное уравнение решений не имеет.

816. Уравнение решений не имеет.

817. $x = 0$.

818. Поскольку $3^{|\sin \sqrt{x}|} \geqslant 1$, а $|\cos x| \leqslant 1$, то уравнение равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 3^{|\sin \sqrt{x}|} = 1, \\ |\cos x| = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $\sin \sqrt{x} = 0$, т. е. $x = \pi^2 k^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, из второго $x = \pi m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для того чтобы система была совместной, необходимо выполнение равенства

$$\pi^2 k^2 = \pi m \quad \text{или} \quad \pi k^2 = m$$

для целых значений k и m. Если $k = 0$, то $m = 0$. Если $k \neq 0$, то должно иметь место равенство $\pi = m/k^2$. Это соотношение невыполнимо ни при каких целых k и m, так

как слева стоит иррациональное число, а справа — число рациональное. Итак, $k=m=0$. Этому соответствует решение уравнения $x=0$.

819. Указание. Поскольку

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2,$$

то решением уравнения могли бы быть только числа $x=\pm 1$. Покажите, что в этом случае левая часть уравнения меньше двух.

820. $x=\pm 1$, $y=1+4k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

821. Обозначим x через p, а $1-x$ через q. Тогда из условия задачи следуют уравнения

$$\begin{cases} p+q=1, \\ p^{\sin y}+q^{\cos y}=1 \end{cases}$$

и неравенства $0\leqslant p\leqslant 1$, $0\leqslant q\leqslant 1$.

1) Рассмотрим сначала случай, когда $0<p<1$ и $0<q<1$. Тогда, если $\sin y<0$ или $\cos y<0$, то система не будет иметь решений. Действительно, при этом либо $p^{\sin y}>1$ (а $q^{\cos y}>0$), либо $q^{\cos y}>1$ (а $p^{\sin y}>0$), и сумма $p^{\sin y}+q^{\cos y}$ больше 1.

Если же $0<\sin y<1$ и $0<\cos y<1$, то имеют место неравенства

$$p^{\sin y}>p, \text{ так как } p^{\sin y-1}>1$$

и

$$q^{\cos y}>q, \text{ так как } q^{\cos y-1}>1,$$

откуда следует неравенство

$$p^{\sin y}+q^{\cos y}>p+q=1.$$

Итак, сумма $p^{\sin y}+q^{\cos y}>1$ и второе равенство системы не выполняется.

Если $\sin y=0$ (при этом $\cos y=\pm 1$) или $\cos y=0$ (при этом $\sin y=\pm 1$), второе уравнение системы приводит к противоречию. Итак, если $0<p<1$ и $0<q<1$, система решений не имеет.

2) Рассмотрим случай $p=0$, $q=1$ $(x=0)$. В этом случае решениями системы являются любые y, при которых $\sin y\neq 0$ (т. е. $y\neq \pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2$).

3) В случае $p=1$, $q=0$ $(x=1)$ решениями являются любые y, при которых $\cos y\neq 0$ $\left(\text{т. е. } y\neq \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

Ответ: 1) $x=0$, y — любое действительное число, не равное πk. 2) $x=1$, y — любое действительное число, не равное $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

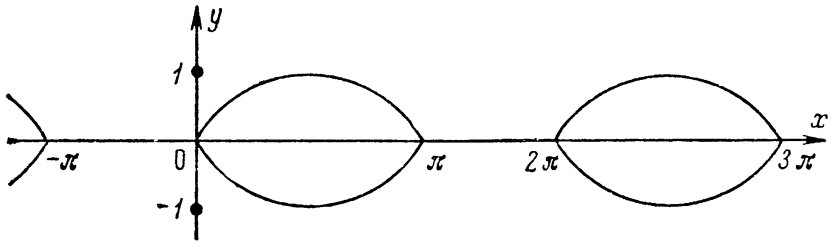


Рис. 65

822. а) Искомое множество состоит из точек, лежащих на графиках функций $y=\pm\sin x$, для значений x, удовлетворяющих неравенствам

$$2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(рис. 65).

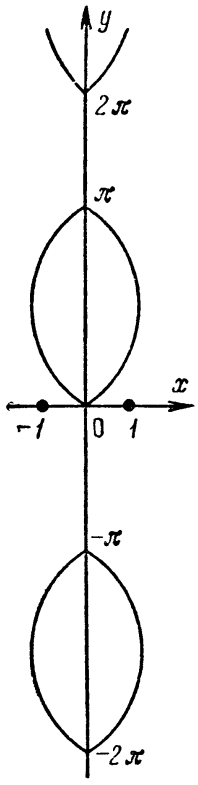


Рис. 66

b) Множество точек представлено на рис. 66. Оно симметрично множеству точек предыдущей задачи относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

823. Отметим, что неравенству удовлетворяют любые значения x, кроме значений $x=\frac{\pi}{2}k$ (где $\sin x=0$ или $\sin x=\pm 1$). Поскольку для остальных x $|\sin x|<1$, то неравенство дает

$$0<y<1.$$

Итак, нужно изобразить на плоскости множество точек, для которых выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} 0<y<1, \\ x\neq\frac{\pi}{2}k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots). \end{cases}$$

Это множество представлено на рис. 67. Оно состоит из внутренней части полосы $0<y<1$ (ограниченной прямыми $y=0$ и $y=1$, параллельными оси x), из которых выброшены отрезки верти-

кальных прямых, задаваемых уравнениям $x=\frac{\pi}{2}k\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

824. Множество состоит из полуплоскости $x>1$. При этом из полуплоскости выброшены горизонтальные прямые, уравнения которых

$$y=\frac{\pi}{2}k\,(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

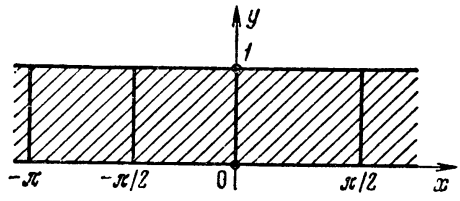


Рис. 67

825. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0<\sin(x-y)<1, \\ x+y=1, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} 2\pi n<x-y<\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x+y=1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \frac{\pi}{2}+2\pi n<x-y<\pi+2\pi n, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Решения этих систем изображаются точками незамкнутых отрезков прямой $y=1-x$, заключенных между прямыми $y=x-2\pi n$ и $y=x-\frac{\pi}{2}-2\pi n$ (для системы (1), и $y=x-\frac{\pi}{2}-2\pi n$ и $y=x-\pi-2\pi n$ (для системы (2). (Сделайте чертеж.)

Примечание. Пары прямых выбираются для каждого целого значения n.

826. Незамкнутые отрезки прямых $y=2\pi n-x$, заключенные между прямыми $y=x$ и $y=x-1$, и лучи прямых $y=2\pi n-x$, лежащие ниже прямой $y=x-1$.

827. Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} 0<1+y<1, \\ 0<1+\sin x<1+y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 1+y>1, \\ 1+\sin x>1+y, \end{cases}$$

откуда

$$1')\ \begin{cases} -1<y<0, \\ y>\sin x, \\ \sin x\neq -1; \end{cases} \qquad 2')\ \begin{cases} y>0, \\ y<\sin x. \end{cases}$$

Решения систем изображаются множеством точек, лежащих между синусоидой $y=\sin x$ и осью x. Из этого множества надо исключить граничные точки и множества точек $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. (Сделайте чертеж.)

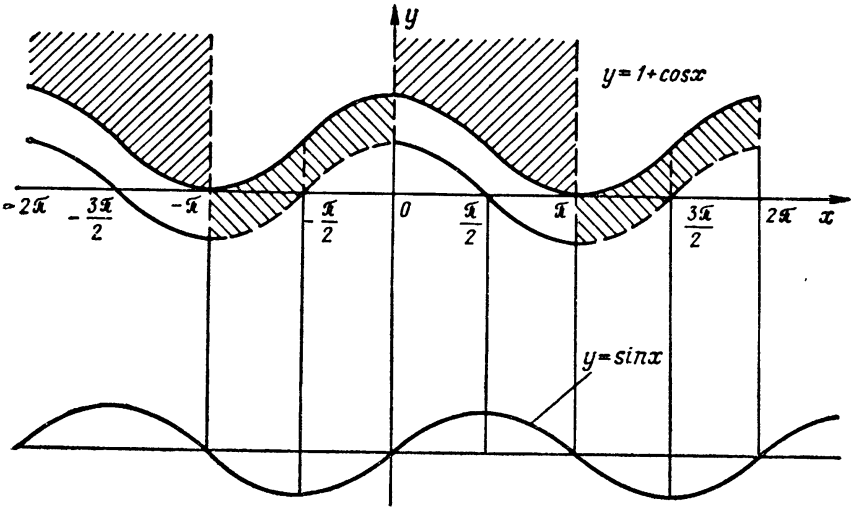


Рис. 68

828. Данное неравенство равносильно совокупности систем:

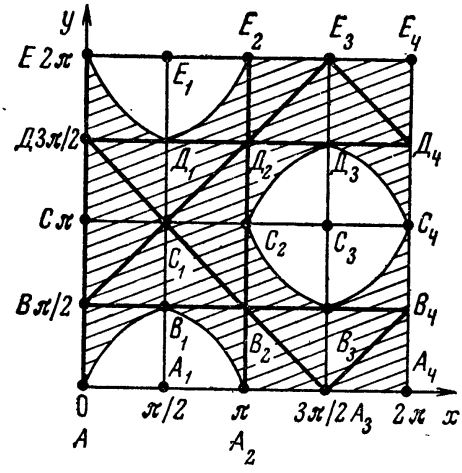


Рис. 69

$$1)\ \begin{cases} 0<1+\sin x<1, \\ 0<y-\cos x\leqslant 1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 1+\sin x>1, \\ y-\cos x\geqslant 1, \end{cases}$$

откуда

$$1')\ \begin{cases} -1<\sin x<0, \\ \cos x<y\leqslant \cos x+1. \end{cases}$$

$$2')\ \begin{cases} \sin x>0, \\ y\geqslant \cos x+1. \end{cases}$$

Решения изображаются точками областей, заштрихованных на рис. 68 (точки линий, проведенных пунктиром, не принадлежат множеству решений).

829. Указание. Используйте свойство симметрии по y первого из заданных условий.

830. 1) Отметим, прежде всего, что в силу периодичности по x и по y функций, входящих в неравенство, достаточно рассмотреть решение задачи не во всей плоскости, а только в квадрате (рис. 69), определяемом неравенствами

$$0 \leqslant x < 2\pi,$$
$$0 \leqslant y < 2\pi.$$

Тогда, сдвигая последовательно данный квадрат на $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) по оси x и на $2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) по оси y, получим полное решение задачи.

2) Допустимыми для неравенства являются те x и y, для которых

а) $\sin x \cdot \cos y \neq \pm 1$,
б) $\sin x \cdot \cos y \neq 0$,
в) $\sin x + \cos y \neq 0$.

Из неравенства а) следует, что нужно исключить те x и y, для которых одновременно $|\sin x| = 1$ и $|\cos y| = 1$, т. е. пары чисел

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k & (k = 0,\ 1), \\ y = \pi m & (m = 0,\ 1). \end{cases}$$

Это означает, что из рассмотрения нужно исключить точки A_1, A_3, C_1, C_3. Из неравенства б) следует, что нужно исключить x и y, для которых $\sin x = 0$ или $\cos y = 0$, т. е. отрезки прямых, для которых выполняется одно из условий

$$x = \pi k \qquad (k = 0,\ 1),$$
$$y = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad (m = 0,\ 1).$$

Это означает, что исключаются отрезки прямых AE, A_2E_2, BB_4, DD_4. Неравенство в) равносильно следующему:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) \neq 0.$$

Отсюда следует, что исключаются x и y, для которых $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) = 0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) = 0$, т. е. отрезки прямых

$$\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n, \text{ т. е. } y \neq x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = -1,\ 0),$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ т. е. } y \neq -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = 1,\ 2).$$

Это означает, что исключаются отрезки прямых A_3B_4, BE_3 и DA_3, E_3D_4. Остальные пары (x, y) могут служить решениями неравенства.

В области допустимых значений, учитывая, что $|\sin x \cdot \cos y| < 1$, запишем исходное неравенство в следующем виде:

$$|\sin x + \cos y| \leqslant 1$$

и, далее,

$$-1 - \sin x \leqslant \cos y \leqslant 1 - \sin x. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая: $\sin x > 0$ и $\sin x < 0$.

а) Пусть $\sin x > 0$, т. е. $0 < x < \pi$. Тогда неравенство (1) равносильно следующему:

$$\cos y \leqslant 1 - \sin x. \qquad (2)$$

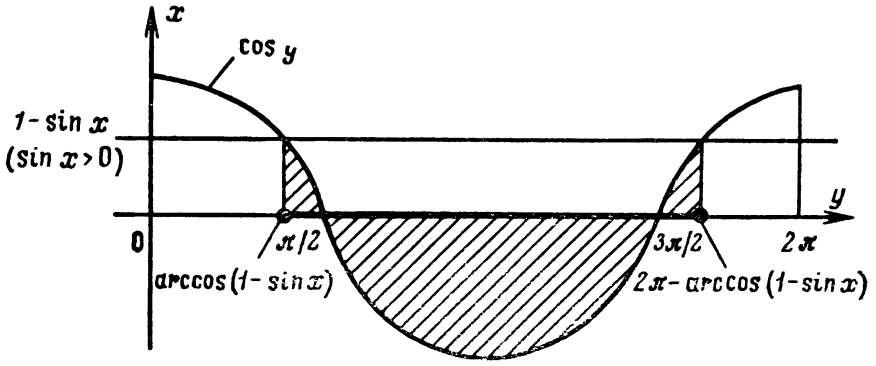


Рис. 70

Рассматривая x как параметр, и учитывая, что $0 < 1 - \sin x < 1$, запишем решения неравенства (2) в области $0 \leqslant y < 2\pi$. Нижеследующая запись легко понятна, если обратиться к (рис. 70)

$$\arccos(1 - \sin x) \leqslant y \leqslant 2\pi - \arccos(1 - \sin x).$$

Полученное решение означает, что неравенству удовлетворяет множество точек (разумеется, допустимых), лежащих выше (или на) графика функции $y_1 = \arccos(1 - \sin x)$ и ниже (или на) графика функции $y_2 = 2\pi - \arccos(1 - \sin x)$, $0 < x < \pi$. График первой из этих функций представляется кривой AB_1A_2 (рис. 69), а второй — кривой ED_1E_2. Нарисовать эти кривые можно, проведя качественные рассуждения такого типа: если x меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а, значит, $1 - \sin x$ убывает от 1

до 0. Функция $y_1 = \arccos z$ $(z = 1 - \sin x)$ при изменении аргумента z от 1 до 0 возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$; это отражает поведение кривой AB_1A_2 на участке $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Если x меняется от $\frac{\pi}{2}$ до π, то $\sin x$ убывает от 1 до 0, а, значит, $1 - \sin x$ возрастает от 0 до 1. Функция $y_1 = \arccos z$

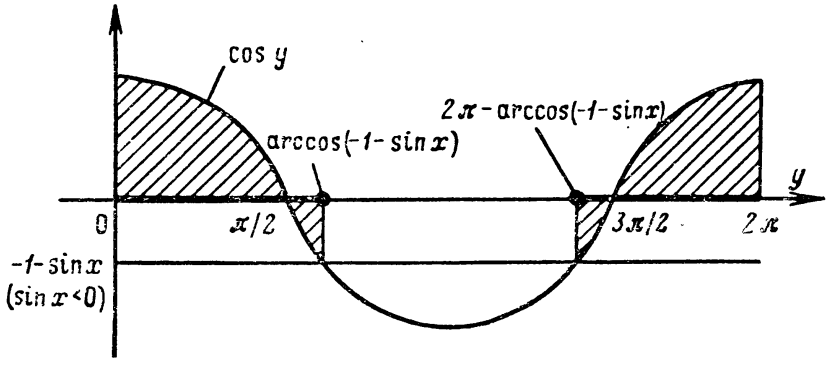


Рис. 71

при этом убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0; это отражает поведение кривой AB_1A_2, на участке $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Аналогично строится кривая ED_1E_2.

б) Пусть теперь $\sin x < 0$, т. е. $\pi < x < 2\pi$. Тогда неравенство (1) равносильно следующему

$$-1 - \sin x \leqslant \cos y. \qquad (3)$$

Запись решений этого неравенства иллюстрируется (рис. 71)

$$2\pi - \arccos(-1 - \sin x) \leqslant y < 2\pi,$$

а также

$$0 \leqslant y \leqslant \arccos(-1 - \sin x).$$

Полученное решение означает, что неравенству удовлетворяет множество точек (конечно, допустимых), лежащих ниже отрезка E_2E_4, но выше (или на) графика функции $y_1 = 2\pi - \arccos(-1 - \sin x)$, а также множество точек, лежащих выше (или на) отрезка A_2A_4, но ниже (или на) графика функции $y_2 = \arccos(-1 - \sin x)$. Построенные по указанному выше способу эти графики определяются кривыми $C_2D_3C_4$ и $C_2B_3C_4$ (рис. 69) соответственно. Интересующие нас области заштрихованы.

Итак, поставленная задача разрешена. Искомое множество точек представляет собой всю плоскость, из которой выброшены овалы и некоторые прямые, как это следует из рис. 69.

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ

1°. Планиметрия

831. Так как радиус окружности S, описанный вокруг треугольника ABC, равен 1, а основание AB в два раза меньше боковой стороны ($AC=CB$), то расстояние OM от центра окружности S до стороны AC равно $\frac{1}{4}$ (в силу подобия треугольников CAD и COM), а значит $CM=\sqrt{15}/4$.

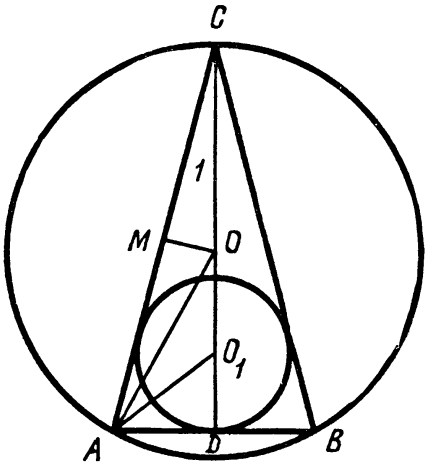


Рис. 72

Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник (рис. 72). Обозначая через r радиус этой окружности, имеем

$$\frac{AC}{AD}=4=\frac{CO_1}{O_1D}=\frac{CO_1}{r}.$$

Значит, $CO_1=4r$, а потому $OD=5r-1$ и, далее,

$$AD=\frac{\sqrt{15}}{8},\quad OA=1.$$

Из прямоугольного треугольника AOD находим $(5r-1)^2=1-\frac{15}{64}=\frac{49}{64}$, $5r-1=\frac{7}{8}$. Ответ: $r=\frac{3}{8}$.

832. Указание. Используйте свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности. Ответ: 24 *см*.

833. Указание. Обозначьте через R радиус вписанного круга, x — сторону ромба. Подставьте значение радиуса в формулу для площади ромба. Ответ: $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

834. Указание. Используйте свойство точки пересечения медиан треугольника, рассмотрите подобные треугольники. Ответ: $\frac{9}{4}$.

835. Указание. Используйте свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности. Ответ: 5.

836. Продолжите CM до пересечения с AB в точке D. Для вычисления стороны равностороннего треугольника ABC и его высоты воспользуйтесь теоремой Пифагора, рассмотрев треугольники BCD и BMD. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}(9+3\sqrt{5})$.

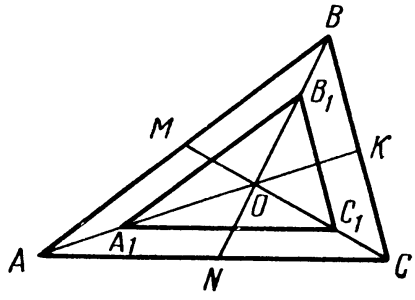


Рис. 73

837. Пусть ABC — произвольный треугольник, K, N, M соответственно середины сторон BC, CA и AB, а O — точка пересечения медиан AK, BN и CM. Возьмем на медианах AK, BN и CM соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что (рис. 73)

$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{BB_1}{B_1N}=\frac{CC_1}{C_1M}=\frac{1}{3}.$$

Так как по свойству медиан треугольника

$$\frac{AO}{OK}=\frac{BO}{ON}=\frac{CO}{OM}=2:1,$$

то из соотношений

$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{1}{3},\quad \frac{AO}{OK}=2$$

находим

$$\frac{AO-A_1O}{A_1O+\frac{AO}{2}}=\frac{1}{3},$$

откуда

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{5}{8}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{OB_1}{OB}=\frac{5}{8},\quad \frac{OC_1}{OC}=\frac{5}{8}.$$

Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ получается из треугольника ABC подобным преобразованием с центром O

и коэффициентом подобия, равным $\frac{5}{8}$. Поэтому отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC равно квадрату коэффициента подобия, т.е. $\frac{25}{64}$.

Отношение сходственных сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно коэффициенту подобия, т. е. $\frac{5}{8}$. Ответ: $\frac{25}{64}$.

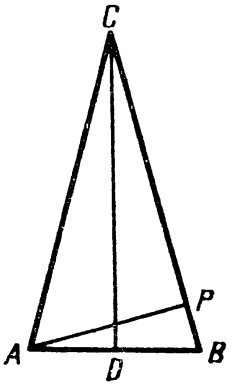


Рис. 74

838. Указание. Воспользуйтесь теоремой о сумме противоположных сторон описанного четырехугольника. Ответ: 7,2.

839. Указание. Вычислите площадь треугольника ABC по трем сторонам, определите высоту CD этого треугольника и рассмотрите подобные треугольники AHE и ACD. Ответ: $HE = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

840. Указание. Соединив центр описанной окружности с одной из вершин основания треугольника, рассмотрите полученные треугольники. Ответ: $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

841. См. указание к задаче 838. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

842. Указание. Докажите, что нижнее основание трапеции проходит через центр описанной окружности. Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

843. Так, как угол ACB равен 30°, то расстояние AP от вершины A треугольника ABC до стороны BC в два раза меньше боковой стороны AC треугольника ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AP \cdot BC = \frac{1}{4} AC^2$ (рис. 74). Для нахождения AC воспользуемся тем, что периметр треугольника равен 5:

$$5 = AC + BC + AB = 2AC + 2AD = 2AC(1 + \sin 15°).$$

Отсюда $AC = \frac{5}{2(1 + \sin 15°)}$ и так как

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}},$$

то

$$AC=\frac{5}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Ответ: $\frac{25}{4\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$.

844. Из вершины A опустите перпендикуляр на BC. Рассмотрите подобные треугольники. Ответ: 3.

845. Поскольку отрезок BC точкой L делится пополам и $LD=AL$, то фигура $ABDC$ — параллелограмм.

Введите обозначение: $AK=a$, тогда $KF=\frac{a}{3}$,

$$AL=LD=b,\ CL=c,$$

$$\angle KLA=\alpha,\ \angle KAL=x.$$

По теореме синусов из $\triangle AKL$ найдите:

$$\sin x=\frac{c\cdot\sin\alpha}{2a}.$$

Площадь четырехугольника $KLDF$ можно определить как разность площадей треугольников AFD и AKL. Учитывая, что $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ALB}$, найдем искомое отношение площадей.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{KLDF}}=\frac{12bc\sin\alpha}{5bc\sin\alpha}=\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\frac{12}{5}$.

846. Указание. Используйте свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника и формулу для определения площади треугольника $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C$. Ответ: $\frac{15}{2}$.

847. Обозначив угол ABC через α и воспользовавшись формулой $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, искомое отношение площадей треугольников ABC и AFD представьте в виде

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot 21\cdot BD\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}BF\cdot BD\cdot\sin\alpha}=\frac{20}{BD\,(21-BF)}.$$

Стороны BD и BF — определите, используя теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Ответ: 4 : 1.

848. Указание. Из точек E и D опустите перпендикуляры на AC, используйте свойство средней линии треуголь-

ника и рассмотрите подобные треугольники. Ответ: $4(1-\alpha)$.

849. Обозначив угол ABD через β, используйте для площади треугольника формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Искомое отношение площадей треугольников запишите в виде

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{AB}{DE}\cdot\frac{BD}{DC}.$$

Рассмотрев подобные треугольники ABC и EDC, получите ответ: $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$.

850. $\frac{1-\alpha}{\beta}$. **851.** $\frac{(\alpha-1)(\beta+1)}{2}$.

852. Указание. Сделайте чертеж. Для определения основания DE воспользуйтесь теоремой о равенстве произведений отрезков хорд, проходящих через точку внутри окружности. Ответ: $\frac{\sqrt{3-\cos\beta}}{4\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

853. $\frac{1-\sin\frac{\beta}{2}}{1+\sin\frac{3\beta}{2}}$.

854. Указание. Докажите, что искомая прямая не пересекает сторону BC. Сопоставьте площадь треугольника ADE, вычисленную по разным формулам, примените теорему косинусов. Ответ: 13.

855. См. указание к задаче 854. Ответ: 6.

856. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 75. Обозначим сторону четырехугольника AB через x. Из прямоугольного треугольника ABN находим $BN=NC=\frac{x}{2}$. Так как $AB=BC$ и $\angle B=60°$, то треугольник ABC равносторонний, $AC=x$. Из прямоугольного треугольника ABM находим $AM=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Тогда $MD=\frac{x}{2\sqrt{3}}$. Легко видеть, что $\alpha=60°$. Из треугольника ACD по теореме косинусов находим CD:

$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\alpha;\ CD=\frac{x}{2}.$$

Согласно условию $x+x+\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{3}}{2}=5+\sqrt{3}$, т. е. $x=2$. Стороны фигуры найдены: $AB=BC=2$, $AD=\sqrt{3}$, $CD=1$.

Площадь четырехугольника $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, так как

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $2,\ \sqrt{3},\ 1,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

857. Чертеж к этой задаче представлен рис. 76. Здесь l_1, l_2 — биссектрисы, c — гипотенуза, ab — катеты, 2α, 2β острые углы в треугольнике ABC: $\frac{l_1 \cdot l_2}{2} = \frac{1}{2}$; $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Легко видеть, что $a = l_1 \cdot \cos\beta$ и $b = l_2 \cos\alpha$. Тогда $l_1 l_2 \cos\alpha \times \cos\beta = ab$. Разделив обе части уравнения на c^2, получим

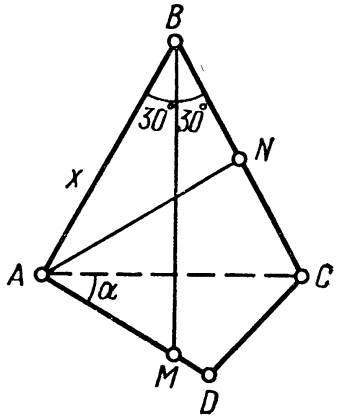


Рис. 75

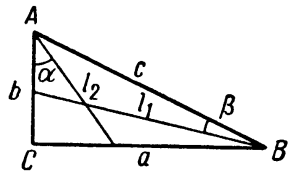


Рис. 76

$$\frac{l_1 l_2}{c^2} \cos\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Далее,

$$\frac{1}{8} = \sin\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),\ \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

В прямоугольном треугольнике один из острых углов всегда более 45°. Находим для него выражение:

$$2\alpha = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $A = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$,

$$B = \frac{\pi}{4} \mp \arccos\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

858. Чертеж к задаче представлен на рис. 77. Используя для площади треугольника формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, искомое отношение площадей можно записать в виде

$$\frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{AF\cdot AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{AE\cdot AC\cdot\sin\angle EAC}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\angle EAC}.$$

Подсчитаем углы, используя все условия задачи.

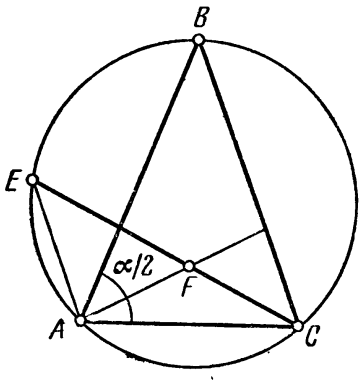


Рис. 77

$$\angle EAB=\angle ECB=\frac{3\alpha}{4},$$

как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Тогда

$$\angle EAC=\frac{3\alpha}{4}+\alpha=\frac{7\alpha}{4}.$$

Далее, $\angle AEC=\angle ABC=\pi-2\alpha$. Тогда

$$\angle AFE=\pi-(\angle AEF+\angle EAF)=\frac{3\alpha}{4}.$$

Итак, для определения искомого отношения достаточно найти отношение сторон $\frac{AF}{AE}$ через известные углы. Для этого используем теорему синусов. Рассмотрим треугольник AFE. Имеем по теореме синусов

$$\frac{AF}{AE}=\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle AFE}=\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{\sin\frac{3\alpha}{4}}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{4}}.$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot\sin\frac{7\alpha}{4}}$

$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

859. Чертеж к этой задаче представлен рис. 78. Рассмотрим окружность, касающуюся дуги полукруга и сторон (но не их продолжения) AC и BC треугольника. Легко заметить, что центр полукруга O, так же как и центр искомой окружности O_1, лежит на биссектрисе угла C. (Центры равноудалены от сторон угла C.) Оче-

видно также, что точка касания этих окружностей D также лежит на биссектрисе угла C (на линии центров). Тогда, обозначая через r — радиус искомой окружности, получим

$$CO_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad O_1D = r; \quad OD = R;$$

$$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r + R = l.$$

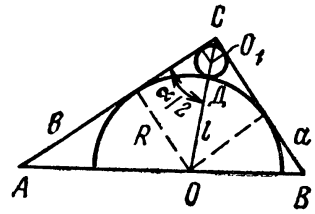


Рис. 78

l — биссектриса угла C. Для нахождения биссектрисы l воспользуемся выражением площади треугольника через стороны и синус угла между ними.

$$2S_{\triangle AOC} = bl\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$2S_{\triangle BOC} = al\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$2S_{\triangle AOC} + 2S_{\triangle BOC} = 2S_{\triangle ABC} = (a+b)\,l\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = ab\cdot\sin\alpha,$$

т. е.

$$(a+b)\,l\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = ab\cdot\sin\alpha.$$

Так как $\alpha \neq 0$, то

$$l = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Далее находим $R = l\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{ab\cdot\sin\alpha}{a+b}$ и получаем

$$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b} - \frac{ab\cdot\sin\alpha}{a+b}.$$

Ответ: $r = \frac{ab\sin\alpha}{a+b}\cdot\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

860. Легко доказать, что трапеция $ABCD$ равнобочная, центры вписанной в нее окружности O' и описанной вокруг нее окружности O лежат на линии LP, где P — середина стороны BC трапеции, а L — середина стороны

AD (см. рис. 79). Обозначим через M проекцию точки C на сторону AD. Через F — проекцию точки O на сторону CD. Точку пересечения перпендикуляра OF со стороной AD обозначим через K; радиус описанной окружности — через R, вписанной — через r.

В равнобедренной трапеции сумма боковых ребер равна сумме оснований. Следовательно, $AB=CD=6$. Из треугольника CMD имеем: $CM=\sqrt{CD^2-MD^2}=\sqrt{20}$ откуда

$$r=O'P=\frac{CM}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}.$$

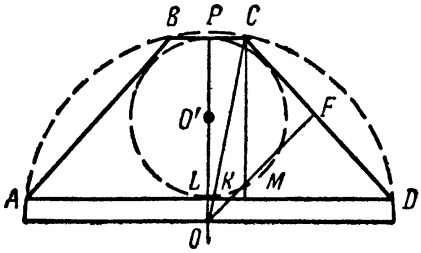


Рис. 79

Определим, где лежит центр описанной окружности, т. е. установим, что больше: KD или $LD=5$. В равнобедренном треугольнике OCD высота OF делит CD пополам, т. е.

$$CF=FD=3.$$

Треугольники KFD и MCD подобны (как треугольники со взаимно перпендикулярными сторонами); следовательно,

$$\frac{KD}{FD}=\frac{CD}{MD},\ \text{т. е.}\ \frac{KD}{3}=\frac{6}{4},\ \text{откуда},\ KD=\frac{18}{4}<5.$$

Таким образом, $KD<LD$, т. е. центр описанной окружности лежит вне трапеции $ABCD$.

Вычислим радиус описанной окружности R. Из прямоугольных треугольников OLD и OPC по теореме Пифагора имеем:

$$\left.\begin{aligned}R^2&=OL^2+LD^2,\\ R^2&=PC^2+|CM+OL|^2.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя значения $LD=5$, $PC=1$, $CM=\sqrt{20}$ и исключая из системы уравнений OL, получим

$$R^2=\frac{126}{5},$$

откуда $R=\sqrt{\frac{126}{5}}$. Следовательно, $\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{126}{5}}:\sqrt{5}=\frac{3}{5}\sqrt{14}$.

Ответ: Центр описанной окружности расположен вне трапеции;

$$\frac{R}{r}=\frac{3}{5}\sqrt{14}.$$

861. $\frac{6}{5}$.

862. Указание. См. решение задачи 860. Ответ: внутри; $\frac{7}{3}\pi$.

863. Указание. Рассмотрите равнобедренный треугольник ABD, примените теорему косинусов и теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Ответ: $\sqrt{b(b+c)}$.

864. Пусть точка M (рис. 80) расположена так, что

$$\angle CMD=2\angle BMA.$$

Введите обозначения:

$$AM=x,\quad \angle BMA=\alpha.$$

Требуется определить отношение $\frac{x}{5-x}$. Из треугольников ABM и CDM получите

$$\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\alpha, \\ 5-x=4\operatorname{ctg}2\alpha. \end{cases}$$

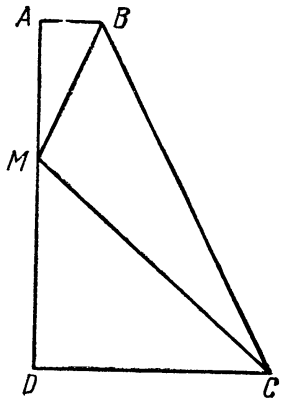


Рис. 80

Воспользовавшись формулой $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, решите систему. Ответ: $\frac{AM}{DM}=\frac{2}{3}$.

865. Указание. Докажите подобие треугольников ACM и BDM. Используйте теорему об отношении площадей подобных треугольников. Ответ: $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$.

866. Пусть радиус круга равен R (рис. 81). Тогда

$$S_{\triangle ABC}=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Половину площади общей части двух данных кругов можно определить как разность площадей сектора $AmDO$ и треугольника AOD. Для определения площади сектора удобно

применить формулу $S_{сек}=\frac{\alpha R^2}{2}$, где α — центральный угол сектора в радианах. Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$.

867. Введите обозначение угла BAD через α, рассмотрите треугольники ABD и DAC, примените к ним теорему синусов. Ответ: $R=\frac{m\sqrt{k^2+2k\cos A+1}}{2(k+1)\cos\frac{A}{2}}$.

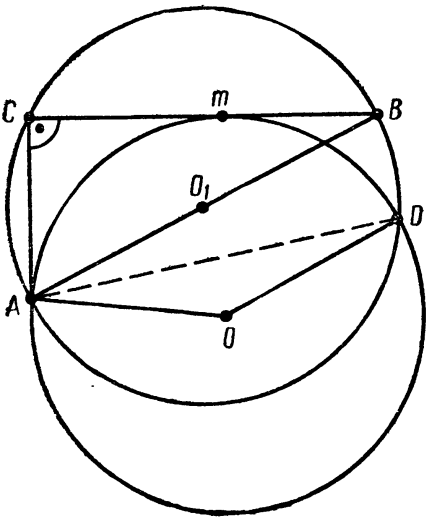


Рис. 81

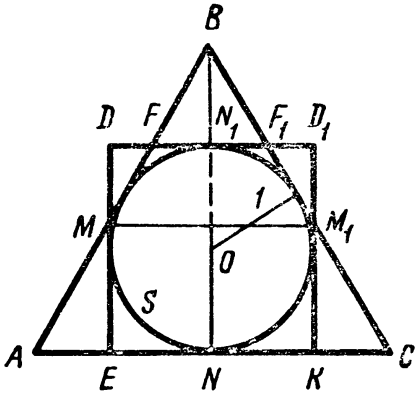


Рис. 82

868. Пусть S — окружность радиуса $R=1$ ABC и EDD_1K соответственно равносторонний треугольник и квадрат, описанные вокруг окружности S, причем сторона EK квадрата лежит на стороне AC треугольника (рис. 82).

По условию задачи необходимо вычислить площадь общей части треугольника ABC и квадрата EDD_1K, т. е. площадь шестиугольника $EMFF_1M_1K$ (M и M_1 — точки пересечения прямых AB и BC со сторонами DE и D_1K а F и F' — точки пересечения прямой DD_1, с прямыми AB и BC). Эту площадь можно определить как разность площади квадрата и площадей треугольников MDF и $M_1D_1F_1$.

Так как треугольник ABC правильный, то его высота BN есть ось симметрии, проходящая через центр O круга S.

Так как сторона EK квадрата EDD_1K, описанного вокруг окружности S, лежит на стороне AC треугольника

и касается этой окружности в точке N, то прямая BN является осью симметрии и квадрата EDD_1K.

Из доказанного следует, что треугольники MDF и $M_1D_1F_1$ также симметричны относительно прямой BN и потому равны.

Для определения площади треугольника MFD вычислим его катеты DF и DM. Предварительно заметим, что $BN_1 = ON_1 = 1$.

Из треугольника FBN_1 находим

$$FN_1 = BN_1 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

и, следовательно,

$$DF = DN_1 - FN_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Из треугольника MDF находим

$$DM = DF \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Таким образом, площадь прямоугольного треугольника MDF равна

$$\frac{1}{2} \cdot DF \cdot DM = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Но так как площадь квадрата EDD_1K равна 4, то площадь общей части треугольника ABC и квадрата EDD_1K равна

$$4 - 2\frac{2\sqrt{3}-6}{3} = 6 - \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $6 - \frac{3}{\sqrt{3}}$.

869. $(\sqrt{3}-1)$. **870.** $\left(2\sqrt{3} - \frac{9}{4}\right)$. **871.** $\frac{12}{5}$. **872.** $\frac{9\sqrt{7}}{16}$.

873. Пусть CD — высота равнобедренного треугольника ABC (рис. 83).

Так как центры I и O вписанной и описанной окружностей лежат на луче CD, то расстояние d между ними всегда равно $|CO - CI|$, независимо от того, лежит ли точка I между точками C и O, или точка O между точками C и I, или если точки I и O совпадают (рис. 83).

По теореме синусов

$$CO = R = \frac{b}{2\sin\alpha},$$

$$CI = CD - ID = b\sin\alpha - AD\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = b\sin\alpha - b\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

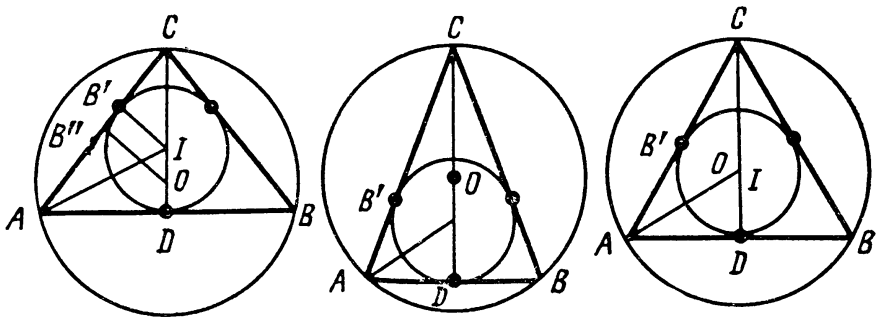


Рис. 83

так что

$$IO = d = \left|\frac{b}{2\sin\alpha} - b\sin\alpha + b\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right| =$$

$$= b\left|\frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right| = \frac{b}{2\sin\alpha}\left|1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b}{2\sin\alpha}\left|4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3\right| = \frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\left|4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\right| =$$

$$= \frac{b\left|\cos\frac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $d = \dfrac{b\left|\cos\frac{3\alpha}{2}\right|}{2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Замечание. Из проведенных выкладок следует, что $CO - CI > 0$ тогда и только тогда, когда $\cos\frac{3\alpha}{2} > 0$, и так как α — острый угол, то это неравенство имеет место

тогда и только тогда, когда

$$\frac{3\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит «ниже» центра вписанной окружности тогда и только тогда, когда угол при основании равнобедренного треугольника меньше $\frac{\pi}{3}$, иначе угол при вершине больше $\frac{\pi}{3}$. Если $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то треугольник равносторонний и точки I и O совпадают.

Все это можно установить и геометрически. Прежде всего отметим, что условие $\angle C > \frac{\pi}{3}$ эквивалентно (для равнобедренного треугольника с вершиной C) следующему: $c > b$ (где c и b длины сторон AB и AC). Заметим, что центр O окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$), является точкой пересечения медиатрисы[1] стороны AC с высотой, опущенной из вершины C на сторону AB. Если $c > d$, то отношение

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{p-b}{p-c},$$

в котором B' точка прикосновения к стороне AC, вписанной окружности, делит сторону AC в отношении большем 1, а потому точка B' лежит между точкой C и серединой B'' отрезка AC. Но так как $B''O \parallel B'I$, то точка I лежит «выше» точки O. Аналогично доказывается, что в случае $c < b$ точка I лежит «ниже» точки O (в случае $c = b$ точки O и I совпадают (см. рис. 12)).

874. Первый способ решения. Проведем через точку A диаметр $APOQ$ данной окружности (рис. 84). Полагая $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, находим $\angle BQP = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CQP = \frac{\beta}{2}$, так что искомое произведение равно

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{PB \cdot PC}{QB \cdot QC} = \frac{\text{пл. } \triangle\, BPC}{\text{пл. } \triangle\, BQC},$$

---

[1] Медиатрисой отрезка называется прямая, проходящая через середину этого отрезка перпендикулярно к нему.

так как $\angle BPC = \angle BQC$. Но треугольники BPC и BQC имеют общее основание BC, значит, их площади относятся как расстояния от точек P и Q до прямой ABC; но отношение этих расстояний равно отношению $AP = a - r$ к $AQ = a + r$. Итак,

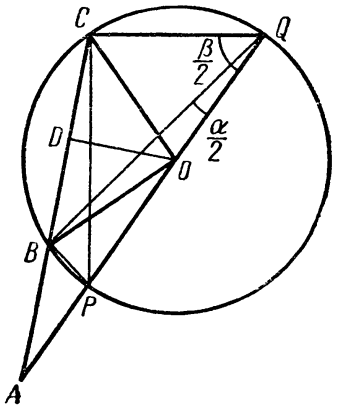


Рис. 84

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOB}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle AOC}{2} = \frac{a-r}{a+r}.$$

Второй способ решения. Пусть D — проекция точки Q на прямую ABC.

Применяя те же обозначения, будем иметь

$$\angle BOD = \frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\angle OAD = \frac{\pi-\beta-\alpha}{2}$$

и, значит,

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{OD}{r},\quad \frac{OD}{a} = \sin\angle OAD = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Отсюда (почленно делим два последних равенства)

$$\frac{a}{r} = \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

значит (производная пропорция!),

$$\frac{a-r}{a+r} = \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\beta+\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Третий способ решения. Так как $\angle AOB = \alpha$, $\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$ и, значит, $\angle ABO = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}$, то из $\triangle ABO$, по теореме синусов имеем

$$\frac{r}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

и далее, как во втором способе решения. Ответ: $\frac{a-r}{a+r}$.

875. Обозначим расстояние от центра окружности до хорды через λ: $\lambda = OC = r\cos\frac{\alpha}{2}$ (рис. 85). Проведем прямую через точку O и через центр искомой окружности. Пусть эта прямая пересечет искомую окружность в точках P и Q. Тогда $OP \cdot OQ = OD^2$ или $(r-2x)\,r = (\lambda+x)^2$, где x — радиус искомой окружности или $x^2 + 2(r+\lambda)\,x + \lambda^2 - r^2 = 0$. Так как $\lambda < r$ ($OC < OB$), то корни этого уравнения действительные и равных знаков. В качестве x следует взять положительный корень

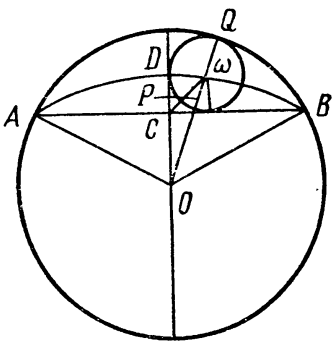


Рис. 85

$$x = -(r+\lambda) + \sqrt{r^2 + 2\lambda r + \lambda^2 - \lambda^2 + r^2}$$

или

$$x = \sqrt{2r(r+\lambda)} - (r+\lambda). \qquad (1)$$

Подставляя сюда $\lambda = r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, получим

$$x = \sqrt{2r\cdot 2r\cos^2\frac{\alpha}{4}} - 2r\cos^2\frac{\alpha}{4} =$$

$$= 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{4}\right) = 4r\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{8}.$$

Ответ: $x = 4r\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$.

Замечание. Формула (1) имеет следующую геометрическую интерпретацию, позволяющую построить искомую окружность с помощью циркуля и линейки: пусть R — точка данной окружности, лежащая на продолжении отрезка CO за точку O. Тогда

$$RB^2 = RC^2 + CB^2 = (r+\lambda)^2 + OB^2 - OC^2 =$$
$$= (r+\lambda)^2 + r^2 - \lambda^2 = 2r(r+\lambda),$$

откуда

$$RB = \sqrt{2r(r+\lambda)}.$$

Так как

$$RC = r + \lambda,$$

то радиус x искомой окружности равен разности $RB-RC$, иначе говоря

$$RB=RD.$$

Таким образом, для построения центра искомой окружности строим окружность с центром в точке R и радиусом RB. Пусть D—внутренняя точка данной окружности, в которой построенная окружность пересекает диаметр данной окружности, проходящей через точку R. Центр ω искомой окружности есть точка пересечения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно прямой с биссектрисой угла DCB. Читателю рекомендуется доказать правильность этого построения геометрически.

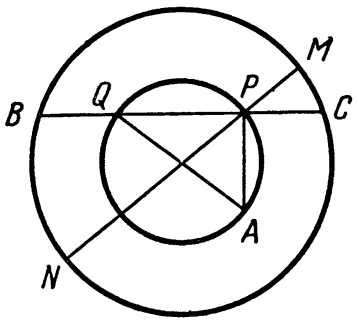


Рис. 86

876. Обозначим через Q вторую точку пересечения прямой BC с меньшей окружностью (рис. 86). Тогда имеем

$$PQ=|BP-CP|$$

(знак модуля необходим, так как возможно, что $BP<CP$). Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим

$$PQ^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC,$$
$$PQ^2=4r^2-PA^2,$$

но

$$PB\cdot PC=PM\cdot PN=(R-r)(R+r)=R^2-r^2$$

(M и N—концы диаметра большей окружности, проходящего через точку P). Таким образом,

$$4r^2-PA^2=PB^2+PC^2-2(R^2-r^2),$$

откуда[1] получаем Ответ: $PA^2+PB^2+PC^2=2(R^2+r^2)$.

877. Рассмотрим два случая: лучи DP и DQ находятся по одну сторону от диаметра DC (рис. 87) и по разные стороны от него (рис. 88). Так как площадь кругового сектора равна половине квадрата радиуса, умно-

[1] Утверждение задачи верно и в том случае, когда прямая касается меньшей окружности (доказать!).

женной на угол сектора, то площади круговых секторов $M\overset{\frown}{DN}$ и $\overset{\frown}{OPQ}$ равны между собой ($\angle POQ = 2\angle DPQ$, но $DM = OP\sqrt{2}$).

Далее, площадь, о которой говорится в условии задачи, равна разности площадей $\overset{\frown}{DPQ}$ и $\overset{\frown}{DMN}$ или разности площадей $\overset{\frown}{DPQ}$ и $\overset{\frown}{OPQ}$, или разности площадей треугольников DPQ и OPQ, так как фигуры $\overset{\frown}{DPQ}$ и $\overset{\frown}{OPQ}$ имеют в качестве общей части сегмент с хордой PQ.

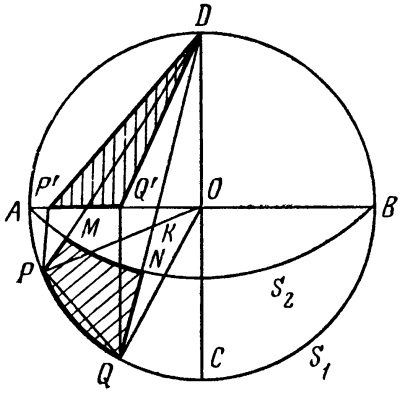


Рис. 87

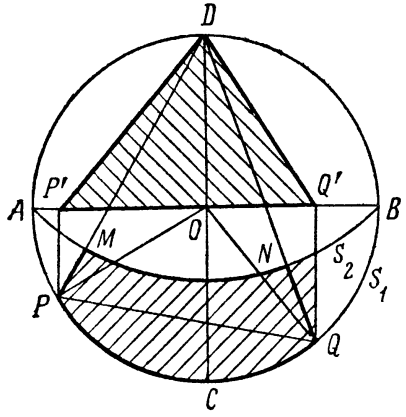


Рис. 88

В случае, изображенном на рис. 88, разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна разности площадей треугольников DPK и QKO (K — точка пересечения OP и DQ) или разности площадей треугольников DPO и DQO. Но площадь $\triangle DPO =$ пл. $\triangle DP'O$, пл. $\triangle DQO =$ $=$ пл. $\triangle DQ'O$, а разность площадей треугольников $DP'O$ и $DQ'O$ равна площади треугольника $DP'Q'$.

В случае, изображенном на рис. 87, дело обстоит проще: разность площадей треугольников DPQ и OPQ равна сумме площадей треугольников DPO и DQO, которые соответственно равновелики треугольникам $DP'O$ и $DQ'O$. Сумма же площадей последних треугольников равна площади треугольника $DP'Q'$.

Замечание. Утверждение задачи верно и в том случае, если одна из точек P или Q совпадает с точкой C.

878. Из рис. 89 находим (x — искомый радиус):

$$O\omega = r - x,\quad \omega R = \omega Q + QR = x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}},$$

$$OR = PQ = AQ - AP = x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}.$$

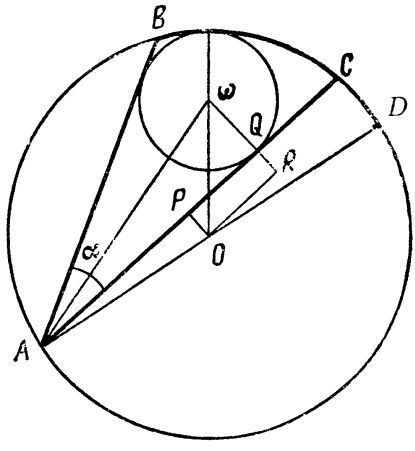


Рис. 89

Теперь из прямоугольного треугольника ωOR находим

$$\left(x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(x + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2 = (r-x)^2$$

или

$$x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{b^2}{4} + x^2 + 2x\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + r^2 - \frac{b^2}{4} = r^2 - 2rx + x^2,$$

или

$$x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - bx\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2x\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = -2rx,$$

или

$$x\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = b\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r,$$

значит,

$$x = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(b\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2 - b^2} - 2r\right).$$

Замечание. Для тех, кто знаком с преобразованием инверсии и некоторыми ее свойствами, покажем, как с помощью циркуля и линейки построить окружность, касающуюся хорд AC и AB и дуги $\overset{\smile}{BC}$, а затем вычислить радиус этой окружности.

Произведем инверсию с центром в точке A и степенью инверсии, равной $K = 4r^2$. При этой инверсии данная окружность перейдет в касательную t к ней, проведенной в точке D. Точки B и C перейдут в точки B' и C' пересечения прямых AB и AC с этой касательной и искомая окружность S перейдет в окружность S' вписанную в угол A треугольника $AB'C'$. Окружность S' легко построить. Пусть окружность S' касается прямой t в точке R'; прямая $R'A$ пересекает данную окружность в точке R, являющейся точкой прикосновения искомой окружности с другой $\overset{\smile}{BC}$. Центр ω искомой окружности лежит в точке пересечения прямой RO (O — центр данной окружности) с биссектрисой угла BAC (рис. 90).

Для вычисления радиуса окружности S заметим, что окружность S' из окружности S может быть получена гомотетией с центром A и коэффициентом гомотетии, равным $\frac{k}{\sigma}$, где k — степень инверсии, а σ — степень точки A относительно окружности S. Значит, радиус x окружности S равен радиусу окружности S', умноженному на

$$\frac{\sigma}{k}:\ x=x'\frac{\sigma}{k},$$

но

$$\sigma=AQ^2=x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2},\ k=4r^2,$$

значит,

$$x=x'\frac{x^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4r^2}$$

и поэтому

$$x=4r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{x'}.$$

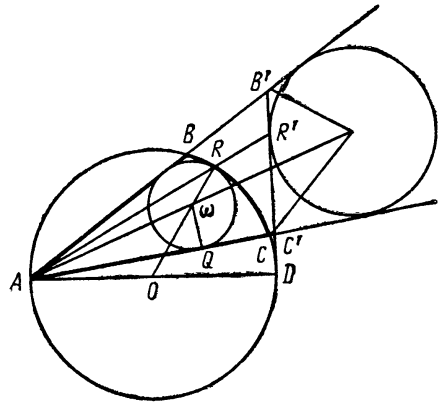


Рис. 90

Остается вычислить x'. Радиус окружности, вневписанной в угол A треугольника $AB'C'$, вычисляется по формуле

$$S'=(p'-a')\,x',$$

где S' — площадь треугольника $AB'C'$, p — полупериметр, a' — длина стороны $B'C'$. Имеем

$$S'=rDB'-rDC'=r\,2r\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-r\cdot 2r\operatorname{tg}\beta\ \ (\beta=\angle CAD)$$

или

$$S'=2r^2\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta}.$$

Далее,

$$p'-a'=\frac{1}{2}(AB'+AC'-B'C')=\frac{1}{2}\left[\frac{2r}{\cos(\alpha+\beta)}+\frac{2r}{\cos\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{2r\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}\right]=r\frac{\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}.$$

Итак,

$$x'=\frac{S'}{p'-a'}=\frac{2r\sin\alpha}{\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-\sin\frac{\alpha}{2}},$$

значит,

$$x = 4r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{2r \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta - \sin\beta - 1\right) =$$

$$= 2r \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{b}{2r} - \frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2r} - 1\right) =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(b \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{4r^2-b^2} - 2r\right).$$

879. Предположим, что $\angle B > \angle C$ и $\angle B < \frac{\pi}{2}$ (рис. 91). Пусть D — проекция вершины A на сторону BC. Имеем

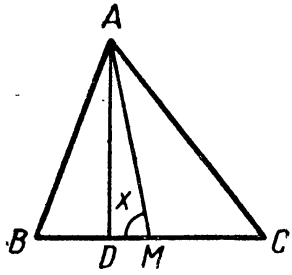


Рис. 91

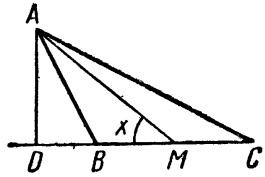


Рис. 92

$$2(BD + DM) = BC = BD + DC,$$

откуда

$$DM = \frac{1}{2}(DC - DB).$$

Но $DM = h \operatorname{ctg} x$, $DC = h \operatorname{ctg} C$, $DB = h \operatorname{ctg} B$ $(h = AD)$. Поэтому

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Если $\angle B > \frac{\pi}{2}$, то (рис. 92)

$$2(DM - DB) = BC = DC - DB,$$

откуда

$$DM = \frac{1}{2}(DC + DB).$$

Но

$DM = h \operatorname{ctg} x$, $DC = h \operatorname{ctg} C$, $DB = h \operatorname{ctg} (\pi - B) = -h \operatorname{ctg} B$,

значит,

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B).$$

Читателю предлагается убедиться в том, что эта формула верна и в случае $\angle B = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично в случае $\angle C > \angle B$ получим формулу

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C).$$

Наконец, она верна и в случае $\angle B = \angle C$.

Ответ: $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} |\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C|$.

880. Прежде всего отметим, что искомая окружность может быть построена с помощью циркуля и линейки,

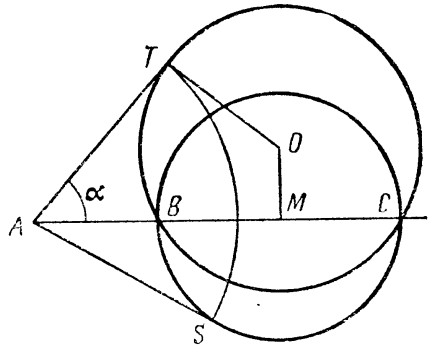


Рис. 93

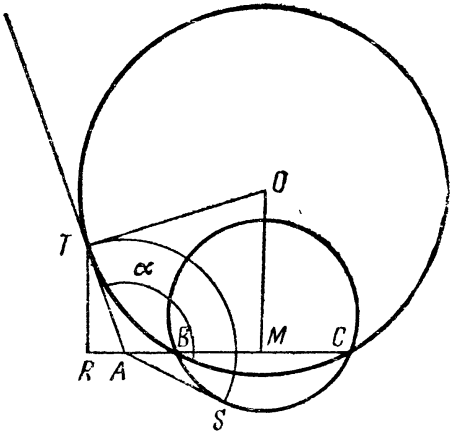


Рис. 94

исходя из следующих соображений: пусть B и C — данные точки на одной из сторон данного угла (на рис. 93 данный угол острый, на рис. 94 — тупой). Тогда отрезок AS касательной (S — точка касания), проведенной из точки A к любой окружности, проходящей через точки B и C, имеет постоянную величину $(\sqrt{AB \cdot AC})$. Построив любую такую окружность и проведя к ней касательную из точки A, строим окружность с центром A и радиусом AS. Пусть T — точка, в которой эта окружность пересекает вторую сторону угла. Центр O искомой окружности является

точкой пересечения прямой, проходящей через точку T перпендикулярно AT с медиатрисой отрезка BC. Для вычисления радиуса искомой окружности спроектируем $ATOM$ (M — середина BC) на прямую ABC. Считая сначала, что данный угол острый (рис. 93), получим

$$AT\cdot\cos\alpha+OT\sin\alpha=AM=\frac{AB+AC}{2},$$

и так как

$$AB=\frac{b}{\sin\alpha},\quad AC=\frac{c}{\sin\alpha},\quad AT=\frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha},$$

то

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha+OT\sin\alpha=\frac{b+c}{\sin\alpha},$$

откуда

$$OT=\frac{b+c-2\sqrt{bc}\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

В случае, если α — тупой угол (рис. 94), будем иметь

$$MR-AR=AM=\frac{AB+AC}{2}$$

или

$$OT\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sqrt{bc}}{\sin\alpha}\cos(\pi-\alpha)=\frac{b+c}{2\sin\alpha},$$

откуда получаем для OT то же самое выражение.

Полученная формула (1) верна и при $\alpha=\frac{\pi}{2}$; при этом она принимает вид

$$OT=\frac{b+c}{2}.$$

Читателю рекомендуется сделать соответствующий чертеж.

Ответ: $\dfrac{b+c-2\sqrt{bc}\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$.

881. Из треугольников BQC и APC по теореме синусов находим (рис. 95)

$$\frac{CQ}{\sin\frac{B}{3}}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)},\qquad \frac{PC}{\sin\frac{A}{3}}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Отсюда находим CQ и CP, а затем и площадь треугольника CPQ по формуле: пл. $\triangle CPQ=\frac{1}{2}CQ\cdot CP\cdot\sin\frac{C}{3}$.

Итак,

$$\text{пл. } \triangle CPQ = \frac{1}{2}\,\frac{BC\cdot AC\cdot \sin\frac{A}{3}\cdot \sin\frac{B}{3}\cdot \sin\frac{C}{3}}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\cdot \sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)},$$

а так как $BC = 2R\sin A$, $AC = 2R\sin B$, то окончательно

$$\text{пл. } \triangle CPQ = 2R^2\,\frac{\sin\frac{A}{3}\cdot \sin\frac{B}{3}\cdot \sin\frac{C}{3}\cdot \sin A\cdot \sin B}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\cdot \sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

Ответ:

$$2R^2\,\frac{\sin\frac{A}{3}\cdot \sin\frac{B}{3}\cdot \sin\frac{C}{3}\cdot \sin A\cdot \sin B}{\sin\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\cdot \sin\left(\frac{A}{3}+\frac{C}{3}\right)}.$$

882. Покажем, как можно построить искомый квадрат (с помощью циркуля и линейки): опустим из точки B

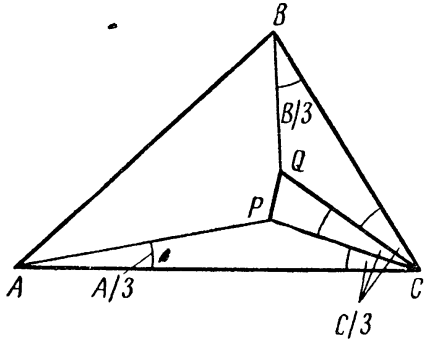


Рис. 95

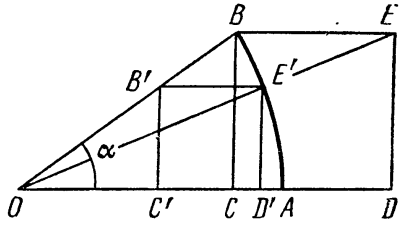


Рис. 96

перпендикуляр BC на прямую OA. Отложим на продолжении отрезка OC за точку C отрезок $CD = BC$. Проведем через точки B и D прямые, соответственно перпендикулярные прямым BC и CD; пусть E — точка пересечения построенных прямых. Произведем гомотетию с центром O, при которой точка E квадрата $BCDE$ перейдет в точку E', лежащую на дуге $\overset{\frown}{AB}$, тогда квадрат $BCDE$ перейдет в искомый квадрат $B'C'D'E'$ (точка E' — точка пересечения прямой OE и дуги $\overset{\frown}{AB}$; точка B' — точка пересечения прямой OB с прямой, проходящей через точку E' параллельно

прямой OA; точки C' и D' — проекции точек B' и E' на прямую OA). Не нарушая общности, можно считать $OA = OB = 1$. Тогда $BC = ED = CD = \sin\alpha$, $OC = \cos\alpha$, значит, коэффициент гомотетии, при которой квадрат $BCDE$ переходит в квадрат $B'C'D'E'$, равен (рис. 96).

$$k = \frac{OE'}{OE} = \frac{1}{\sqrt{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha}}.$$

Значит, сторона x квадрата $B'C'D'E'$ равна

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha + \sin^2\alpha}},$$

а искомое отношение площади этого квадрата к площади сектора $\overset{\frown}{OAB}$ равно

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2x^2}{\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1 + \sin 2\alpha + \sin^2\alpha)}$$

(α — мера угла $\angle AOB$ в радианах).

Ответ: $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1 + \sin 2\alpha + \sin^2\alpha)}$.

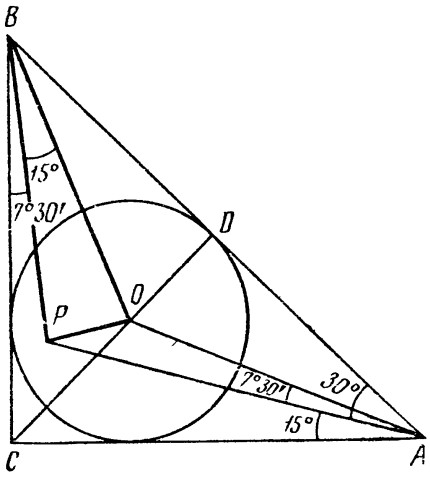


Рис. 97

883. Из треугольника APB находим (рис. 97)

$$\frac{BP}{\sin 30^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 67^\circ 30'},$$

откуда

$$BP = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'}.$$

Далее,

$$BD = BO \cdot \cos 22^\circ 30'$$

и так как $BD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то $BO = \dfrac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'}$.

Таким образом, $\triangle PBO$ равнобедренный, значит,

$$\frac{PO}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'} \cdot \sin 7^\circ 30',$$

отсюда

$$PO=\frac{a\sqrt{2}\cdot\sin 7^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'}=a\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}}=$$

$$=a\sqrt{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=a\sqrt{2}\left[\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=a\sqrt{2}\left[(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]=$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}a.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}a.$

884. Пусть (O_1), (O_2), (O_3) — окружности с центрами O_1, O_2, O_3, каждая из которых внешним образом касается двух других, причем радиусы этих окружностей соответственно равны 1, 2 и 3 (рис. 98). Пусть A — точка касания окружностей (O_2) и (O_3), B — точка касания окружностей (O_3) и (O_1), а C — точка касания окружностей (O_1) и (O_2). Положим $O_2O_3=a$, $O_3O_1=b$, $O_1O_2=c$; тогда $O_1C=O_1B=p-a$, $O_2A=O_2C=p-b$, $O_3B=O_3A=p-c$, где p — полупериметр треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что окружность (ABC), проходящая через точки A, B и C, является окружностью, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Последний треугольник прямоугольной $\left(\angle O_2O_1O_3=\frac{\pi}{2}\right)$ с катетами $O_1O_2=3$, $O_1O_3=4$ и гипотенузой $O_2O_3=5$. Пусть

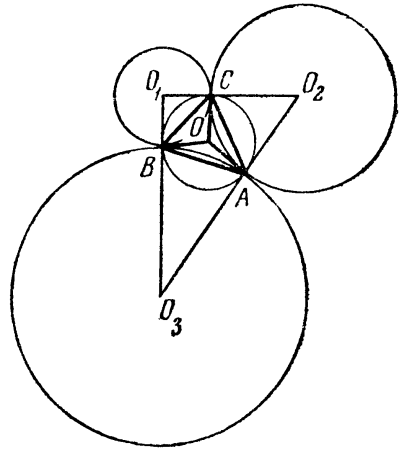


Рис. 98

O — центр окружности (ABC). Тогда

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{\pi}{4},$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(\pi - \angle O_1O_2O_3) = \frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{3},\ \angle CBA =$$

$$= \frac{1}{2}\angle COA = \frac{1}{2}(\pi - \angle O_1O_2O_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2.$$

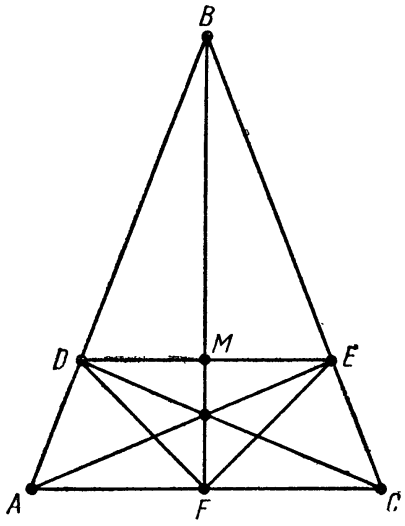


Рис. 99

Ответ: $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$.

885. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$.

886. $\frac{1}{2}\sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha}}$.

887. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 99. Пусть CD и AE — высоты, проведенные из вершин C и A к равным сторонам $AB = BC$ треугольника ABC. Так как $\angle A = 45°$, то точка D лежит на AB. Очевидно, что $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Следовательно, $\frac{BD}{BA} = \frac{BM}{BF} = \frac{DE}{AC} =$ $= k$ (k — коэффициент подобия). Вычислим его. Если принять, что $AB = b$, то из треугольника ABF находим, что $AF = b\cos\alpha$ и $AC = 2b\cdot\cos\alpha$. Из прямоугольного треугольника ACD находим AD.

$$AD = AC\cos\alpha = 2b\cos^2\alpha.$$

Далее имеем

$$BD = b - 2b\cos^2\alpha = b(1 - 2\cos^2\alpha) = -2b\cos 2\alpha.$$

Отсюда находим коэффициент подобия

$$k = \frac{BD}{BA} = -\cos 2\alpha \qquad (k > 0 \text{ так как } \alpha > 45°).$$

Теперь легко вычисляется основание треугольника DEF:

$$DE = AC \cdot k = -\cos 2\alpha \cdot AC.$$

И его высота MF:

$$MF = BF\,(1-k) = (1+\cos 2\alpha)\,BF.$$

Отсюда имеем

$$S_{\triangle BEF} = \frac{DE \cdot MF}{2} = -\cos 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha)\,\frac{AC \cdot BF}{2} =$$
$$= -2\cos 2\alpha \cos^2 \alpha\, S.$$

Ответ: $-2\cos 2\alpha \cos^2 \alpha S$.

2°. Стереометрия

888. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида (рис. 100).

Проекция O вершины S пирамиды $SABC$ на плоскость ее основания совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC (так как проекции OA, OB, OC равных наклонных SA, SB, SC равны между собой: $OA = OB = OC$). Прямая AO пересекает сторону BC в точке E, являющейся серединой стороны BC. Значит, SE — высота равнобедренного треугольника BSC ($SE \perp BC$).

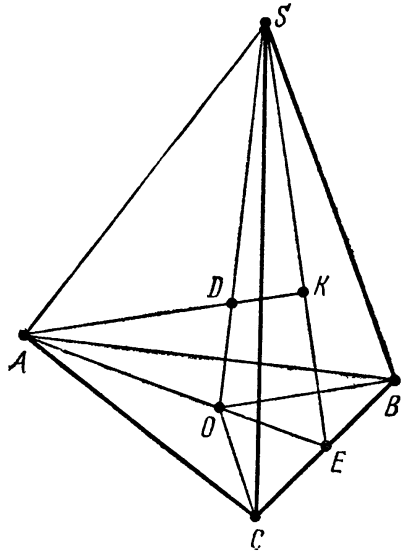


Рис. 100

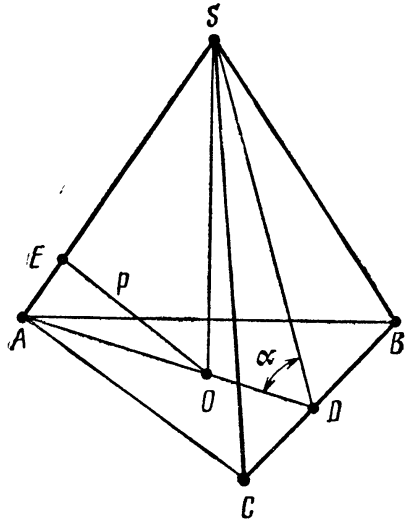


Рис. 101

Пусть K — проекция точки A на прямую SE. Так как $SE \perp BC$ и $AE \perp BC$, то прямая BC перпендикулярна плоскости треугольника AES. Но прямая AK лежит в плоскости треугольника AES, следовательно, скрещивающиеся прямые AK и BC взаимно перпендикулярны.

Итак, $AK \perp SE$ и $AK \perp BC$, следовательно, прямая AK перпендикулярна плоскости BSC (рис. 100).

Объем одной и той же пирамиды можно определить при помощи формулы

$$V = \frac{1}{3} \text{пл. } \triangle ABC \cdot h, \qquad (1)$$

где h — длина высоты SO, или при помощи формулы

$$V = \frac{1}{3} \text{пл. } \triangle CBS \cdot b, \qquad (2)$$

где b — расстояние от вершины A до плоскости SBC, то есть длина отрезка AK. Так как $\triangle ABC$ равносторонний, то его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее, из прямоугольного треугольника OSE находим $SE = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$ и, следовательно,

$$\text{пл. } \triangle SBC = \frac{1}{2} a \cdot SE = \frac{1}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

Подставляя значения площадей треугольников ABC и CBS в выражения объемов (1) и (2) и приравнивая результаты, получим

$$\frac{a^2 h \sqrt{3}}{12} = \frac{ab}{6} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}},$$

откуда находим

$$h = \frac{ab}{\sqrt{3}\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

Подставляя значение h в формулу $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot h$ объема пирамиды $SABC$, получим

$$V = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

889. Синус искомого угла равен синусу угла наклона боковой грани тетраэдра к плоскости основания: $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

890. Пусть $SABC$ (рис. 101) — правильная треугольная пирамида, S — вершина, O — центр основания, OE — перпендикуляр, опущенный из точки O на боковое ребро.

Проведем сечение пирамиды SAD через боковое ребро AS и высоту SO. Тогда $\angle SDA = \alpha$.

Если принять сторону основания пирамиды за a, то в $\triangle SAD$ можно найти:

а) $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

б) $SO = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$;

в) $AS = \frac{a}{6}\sqrt{12 + 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Из прямоугольного треугольника ASO, в котором $EO = p$ — высота, находим

$$p \cdot \frac{a}{6}\sqrt{12 + 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$$

и далее,

$$a = p\sqrt{12\operatorname{ctg}^2\alpha + 3}.$$

92 Объем пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot SO = \frac{p^3\operatorname{tg}\alpha}{24}(12\operatorname{ctg}^2\alpha + 3)^{3/2}.$$

Задача имеет решение при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и любом $p > 0$.

891. Пусть $SABC$ (рис. 102) — правильная треугольная пирамида, S — вершина, O — центр основания, $\angle SAD = \beta$; $SB = a$. Проведем сечение пирамиды $M_1M_2M_3M_4$ параллельно скрещивающимся ребрам AS и CB. Это сечение будет прямоугольником ($M_1M_4 \parallel M_2M_3 \parallel CB$, так как M_1M_4 и M_2M_3 — линии пересечения плоскостей $\triangle ABC$ и $\triangle SBC$ сечением, параллельным CB по условию. Аналогичным образом $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \parallel AS$. Кроме того, $M_1M_2 \perp M_1M_4$, поскольку $M_1M_2 \parallel AS$, $M_1M_4 \parallel CB$, а $AS \perp CB$ как скрещивающиеся ребра в правильной треугольной пирамиде).

Пусть сечение $M_1M_2M_3M_4$ проведено так, что $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_1 = x$. Тогда из подобия треугольников AM_1M_4 и ACB получим

$$\frac{x}{CB} = \frac{AM_1}{AC}.$$

Из подобия треугольников CM_1M_2 и CAS получим

$$\frac{x}{AS}=\frac{CM_1}{AC}.$$

Складывая эти две пропорции, находим

$$x\left(\frac{1}{CB}+\frac{1}{AS}\right)=1; \quad x=\frac{AS\cdot CB}{AS+CB}.$$

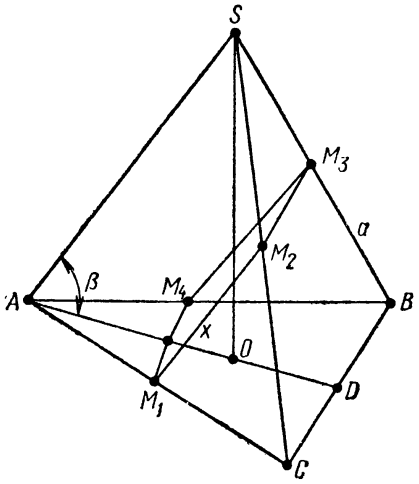


Рис. 102

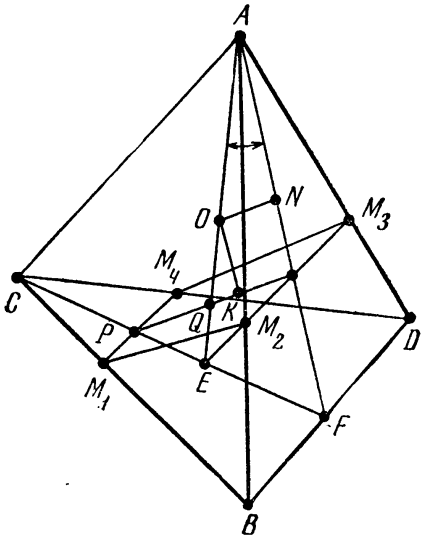


Рис. 103

По условию $AS=a$. Кроме того, $a\cos\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{CB\cdot\sqrt{3}}{2}$. Значит, $CB=a\sqrt{3}\cos\beta$. Тогда

$$x=\frac{a\sqrt{3}\cos\beta}{1+\sqrt{3}\cos\beta}.$$

Задача имеет решение при $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и любом $a>0$.

892. Пусть $ABCD$ (рис. 103)—правильный тетраэдр, A—вершина. Рассуждения, аналогичные тем, которые приведены в предыдущей задаче, показывают, что сечение тетраэдра, проходящее через середины ребер AD, BC, является квадратом, плоскость которого параллельна скрещивающимся ребрам BD и AC.

Если учесть, что центр любого шара, вписанного в трехгранный угол при вершине правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды, то радиус этого шара может быть определен из рассмотрения плоского сече-

ния AFC, которое, очевидно, перпендикулярно плоскости квадратного сечения пирамиды (рис. 104), F — середина ребра DB.

Пусть O — центр искомого шара, N и K — точки его касания с плоскостями ABD и $M_1M_2M_3M_4$ соответственно.

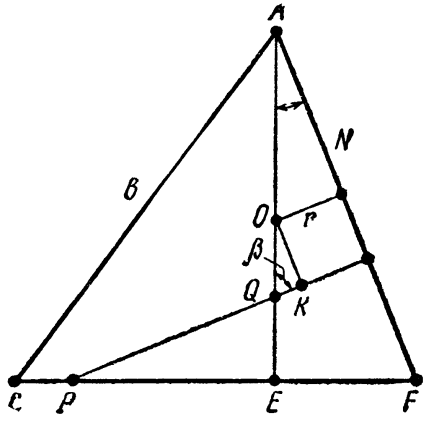


Рис. 104

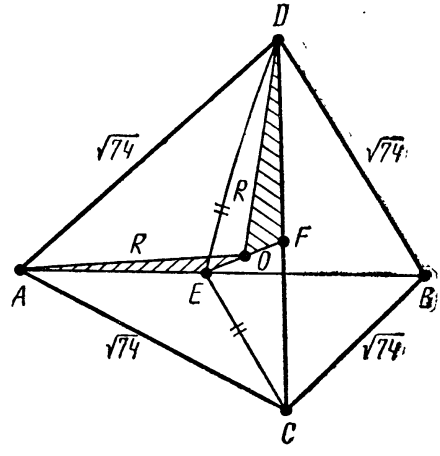


Рис. 105

Из рассмотрения прямоугольных треугольников ANO и QKO составим уравнение для определения радиуса шара r:

$$\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\beta}=AQ$$

($\angle NAO=\alpha$, $\angle KQO=\beta$). Учитывая, что тетраэдр правильный, находим

$$\sin\alpha=\frac{FE}{FA}=\frac{1}{3};\quad \sin\beta=\frac{EP}{QP}=\frac{EC}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$AQ=3/4\ AE=\frac{b\sqrt{6}}{4}$$

(E — центр основания DBC). Тогда

$$r=\frac{\frac{b\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1/3+\sqrt{3}/3}=b\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}.$$

893. На рис. 105 представлена треугольная пирамида $DABC$: $AD=AC=\sqrt{74}$; $BD=BC=\sqrt{74}$; $DC=8$; $AB=6$.

Точки E и F — середины ребер AB и DC соответственно. Центр описанного шара O равноудален от вершин A и B пирамиды. Значит, он лежит в плоскости, перпендику-

лярной отрезку AB и проходящей через его середину. Легко видеть, что это — плоскость $\triangle EDC$ ($AB \perp DE$; $AB \perp CE$ как высоты в равнобедренных треугольниках ADB и ACB).

Центр описанного шара O, будучи равноудаленным от вершин D и C пирамиды, лежит на срединном перпендикуляре FE к отрезку CD, который является высотой равнобедренного треугольника ECD ($ED = EC$ как высоты в равных треугольниках ADB и ACB). Ясно, что $EF \perp AB$ и $EF \perp DC$. Обозначая $AO = DO = R$, находим, что

$$OE = \sqrt{R^2 - 9}; \quad OF = \sqrt{R^2 - 16}.$$

Если точка O лежит внутри пирамиды, то

$$\sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} = EF. \qquad (1)$$

Если точка O лежит вне пирамиды (очевидно, за точкой F, так как $OE > OD$), то

$$\sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = EF. \qquad (2)$$

Высота EF в $\triangle EDC$ легко находится из условий задачи:

$$ED^2 = AD^2 - AE^2 = 74 - 9; \quad ED = \sqrt{65};$$
$$EF^2 = ED^2 - DF^2 = 65 - 16; \quad EF = 7.$$

Подставляя $EF = 7$ в уравнение (1), находим $R = 5$. Второе уравнение решений не имеет.

894. Указание. Центр шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной в точке A, лежит на высоте пирамиды, опущенной из этой точки. Условие касания состоит в том, что расстояние между центрами сфер равняется разности их радиусов. Для записи этого условия удобно рассмотреть сечение пирамиды, проходящее через ребро AB и высоту пирамиды. Ответ: $R = \frac{3}{8} a (\sqrt{6} - 1)$.

895. Объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Согласно условию задачи имеем

$$\frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{1}{6} b^3.$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 \left[3 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 4.$$

Обозначая $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ через x, получим уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

и, далее,

$$(x-2)^2(x+1) = 0.$$

Значит, отношение $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ равно 2.

Если обозначить угол при вершине пирамиды через φ и применить теорему косинусов, то можно найти

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Учитывая, что $a^2 = 2b^2$, получим

$$\cos\varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

896. На рис. 106 изображен правильный тетраэдр $SABC$, в котором проведено сечение $AB'C'$, параллельное CB, проходящее через вершину A. Очевидно, что $B'C' \parallel BC$. Линия PP' представляет собой ребро двугранного угла, образуемого плоскостью сечения и плоскостью основания ABC. Ясно, что $PP' \parallel BC$.

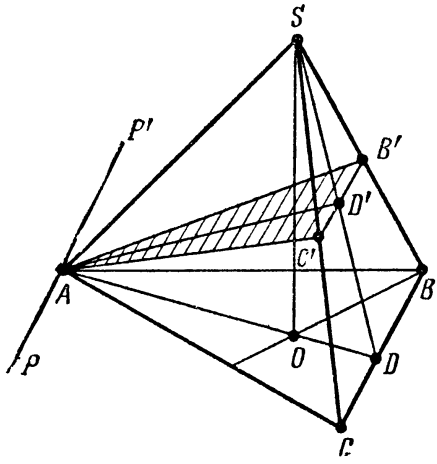


Рис. 106

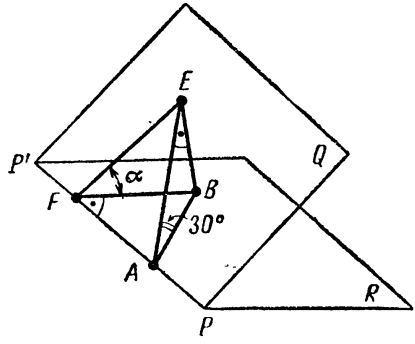


Рис. 107

Рассмотрим этот двугранный угол. На рис. 107 горизонтально размещена плоскость основания. Опустим из точки B перпендикуляр BE на плоскость Q, а из точки E — перпендикуляр EF на ребро двугранного угла PP' и соединим точки F и B отрезком прямой.

Очевидно, что AE служит проекцией AB на плоскость Q и, по условию, $\angle BAE = 30°$. В то же время EF является проекцией BF на плоскость Q. Так как $PP' \perp EF$ (по построению), то, согласно теореме о трех перпендикулярах, $PP' \perp BF$. Значит, $\angle BFE$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями основания и сечения. Вычислим угол $BFE = \alpha$.

Из $\triangle AEF: BE = a/2$ ($\angle AEB = 90°$),

Из $\triangle ABF: BF = a\sqrt{3}/2$ ($\angle BAF = 60°$),

Из $\triangle BEF: \sin\alpha = \frac{BE}{BF} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Для вычисления площади сечения с основанием $C'B'$ и высотой AD' (рис. 106) рассмотрим $\triangle ADD'$. Легко видеть, что $\angle DAD' = \alpha$; $\sin\angle ADS = \frac{SO}{SD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Используя теорему „синусов“

$$\frac{AD'}{\sin\angle ADS} = \frac{DD'}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \angle ADS)},$$

находим:

$$1)\ AD' = AD\,\frac{\sin\angle ADS}{(\sin\alpha + \angle ADS)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha + \angle ADS)}.$$

Учитывая, что $\cos\angle ADS = 1/3$, получим

$$AD' = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}\,a}{5}.$$

$$2)\ DD' = AD\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \angle ADS)} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Учитывая, что $\frac{B'C'}{BC} = \frac{SD'}{SD}$, откуда $B'C' = BC\,\frac{a\sqrt{3}/2 - DD'}{a\sqrt{3}/2}$, получаем $B'C' = \frac{2a}{5}$. После этого площадь сечения вычисляется по формуле

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}B'C'\cdot AD' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{5}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{5}a = \frac{3\sqrt{2}}{25}a^2.$$

897. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, S — вершина, $SA = SB = SC = 3{,}5AB$; $AB = AC = BC$; E — центр основания, D — середина ребра AC, O — центр вписанного шара. Для решения задачи необходимо рассмотреть треугольник SBD, в котором легко определить все стороны. Центр шара O лежит на пересечении высо-

ты SE и биссектрисы $\angle SDB$. Продолжение отрезка DO пересекается с SB в точке F, которая служит вершиной отсекаемой пирамиды.

Воспользовавшись теоремой о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника, можно определить отношение высот отсекаемой и данной пирамид: $\frac{h}{H}=\frac{1}{5}$. Следовательно, объем пирамиды делится в отношении 1:4.

898. Указание. Необходимо учесть, что центр сферы, касающейся какой-либо прямой, лежит в плоскости, перпендикулярной этой прямой и проходящей через точку касания. Для решения удобно построить прямую, являющуюся пересечением двух таких плоскостей. Центр заданной сферы лежит на этой прямой и может быть найден путем непосредственного расчета: $R=\frac{1}{20}a\sqrt{115}$. Ответ: $R=\frac{1}{20}a\sqrt{115}$.

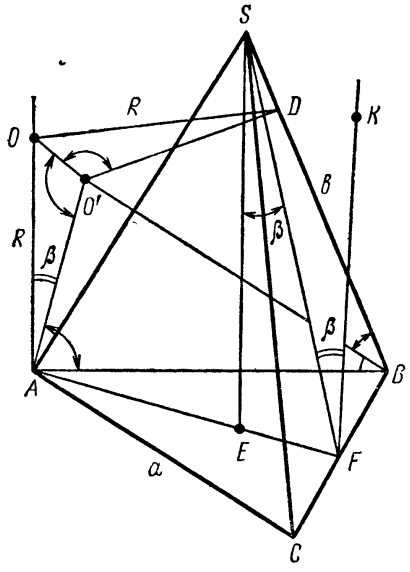


Рис. 108

899. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 108. Поскольку сфера касается плоскости основания пирамиды в точке A, то ее центр O лежит на перпендикуляре, восставленном к плоскости основания из A. Опустим из точки O перпендикуляр OD на ребро SB, так что $OA=OD=R$.

Так как точка O равноудалена от прямых BA и BS, являющихся сторонами угла ABS, то ее проекция O' на плоскость ABS лежит на биссектрисе $\angle ABC$. (Это же легко следует из рассмотрения прямоугольных треугольников $OO'A$ и $OO'D$.) Итак, BO' — биссектриса угла ABC ($DB=AB=a<b$).

Заметим, что $\angle OAO'=\angle SFK=\beta$ есть угол между перпендикуляром к плоскости основания пирамиды и ее боковой гранью.

Из прямоугольного треугольника ABO' найдем AO', а затем из $\triangle AOO'$ вычислим $R=AO$. Обозначим

$\angle ABS = 2\alpha$. Тогда имеем

1) $\cos 2\alpha = \frac{a}{2b}$; $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{2b-a}{4b}$;

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{2b+a}{4b};$$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. Тогда $AO' = a\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$.

2) $\cos\beta = \frac{SE}{SF} = \frac{\sqrt{b^2-a^2/3}}{\sqrt{b^2-a^2/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$.

Тогда

$$R = AO = AO' : \cos\beta.$$

Итак,

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{(2b-a)}{\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

900. Пусть длина бокового ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 109) равна H, длина ребра основания равна a, а площадь основания $S_{\triangle ABC}$; тогда объем V призмы равен: $V = H \cdot S_{\triangle ABC}$.

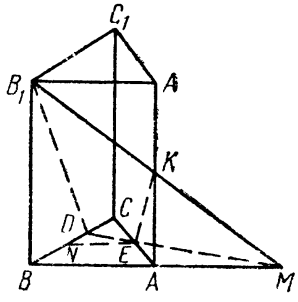


Рис. 109

Пусть точка E — середина ребра AC. Точки E и M лежат в плоскости грани ABC, поэтому, соединив точки E и M прямой, получим, что она пересекает ребро BC в точке D.

В треугольнике ABC проведем среднюю линию EN. Получим подобные треугольники BMD и NED. Из подобия этих треугольников вытекает, что

$$\frac{BD}{ND} = \frac{BM}{NE}.$$

Так как

$$NE = BN = \frac{a}{2},\ BM = 2a,\ ND = BD - BN = BD - \frac{a}{2},$$

то из этого соотношения находим $BD = \frac{2}{3}a$, т. е. точка D делит ребро BC в отношении 2:1. Соединив B_1 и M прямой, получим, что она пересекает ребро AA_1 в точке K. Причем ясно, что точка K будет серединой ребра AA_1.

Итак, наша плоскость разбила призму на 2 многогранника, отношение объемов которых надо найти. Найдем сначала объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$, ограниченного треугольниками B_1BD и AKE, четырехугольниками

$ABDE$, ABB_1K и B_1KED. Объем этого многогранника равен разности объемов двух треугольных пирамид B_1BDM и $KAME$. Найдем объем V_2 пирамиды B_1BDM

$$V_2=\frac{1}{3}BB_1\cdot S_{\triangle BDM}.$$

Площадь треугольника BDM равна половине произведения основания BM на высоту, опущенную из точки D на основание.

Так как точка D делит ребро BC в отношении 2:1, то высота, опущенная из точки D на основание, равна 2/3 высоты h треугольника ABC. Поэтому

$$S_{\triangle BDM}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}h=\frac{4}{3}\frac{ah}{2}=\frac{4}{3}S_{\triangle ABC},$$

но тогда

$$V_2=\frac{1}{3}H\cdot\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{9}V.$$

Так как $S_{\triangle AEM}=\frac{1}{2}AM\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ и $AK=\frac{1}{2}H$, то объем V_3 пирамиды $KAEM$ равен

$$V_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}H\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}V.$$

Тогда $V_1=V_2-V_3=\frac{13}{36}V$, т. е. плоскость делит объем призмы в отношении 13:23.

Найти объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$ без выхода за пределы призмы $ABCA_1B_1C_1$ можно, но эти вычисления не будут короче. Убедимся в этом.

Проведя плоскость через точки A, B_1 и E, получим, что наш многогранник разбился на 2 пирамиды: четырехугольную пирамиду B_1ABDE (B_1 — вершина, четырехугольник $ABDE$ — основание) и треугольную пирамиду $EAKB_1$ (E — вершина, треугольник AKB_1 — основание).

Найдем объемы этих пирамид. У четырехугольной пирамиды B_1ABDE высота есть ребро B_1B, значит, высота равна H.

Теперь найдем площадь четырехугольника $ABDE$. Она равна площади треугольника ABC без площади треугольника EDC. Найдем площадь треугольника EDC. Так как точка D делит отрезок BC в отношении 2:1, то высота, проведенная из точки D на основание EC, равна 1/3 высоты треугольника ABC.

Так как основание $EC=\frac{1}{2}AC$, то площадь треугольника равна 1/6 площади треугольника ABC. Значит, площадь четырехугольника $ABDE$, равна 5/6 площади треугольника ABC. Поэтому объем V_2 четырехугольной пирамиды B_1ABDE равен

$$V_2=\frac{1}{3}H\cdot\frac{5}{6}S_{\triangle ABC}=\frac{5}{18}V,$$

где $V=H\cdot S_{\triangle AEC}$ есть объем призмы $ABCA_1B_1C_1$. Нашу призму $ABCA_1B_1C_1$ можно рассматривать как половину параллелепипеда, у которого основание — грань ABB_1A_1, а боковая грань — четырехугольник ACC_1A_1. Но тогда объем V призмы $ABCA_1B_1C_1$ можно подсчитать и так: $V=\frac{1}{2}hS_{ABA_1B_1}$, где h — высота, опущенная из точки C на грань ABB_1A_1, причем ясно, что h — высота треугольника ACB.

Теперь легко найти объем V_3 треугольной пирамиды $EAKB_1$. Для этого надо найти площадь треугольника AKB_1 и высоту, опущенную из точки E на грань ABB_1A_1. Очевидно, что так как точка E — середина ребра AC, то и высота, опущенная из точки E на грань ABB_1A_1, равна половине высоты, опущенной из точки C на грань ABB_1A_1, т. е. равна $h/2$.

Так как K есть середина отрезка AA_1 (рис. 109), то площадь треугольника AKB_1 равна половине площади треугольника AA_1B_1, т. е. равна $^1/_4S_{ABB_1A_1}$.

Значит,

$$V_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{ABB_1A_1}=\frac{1}{12}V.$$

Теперь объем V_1 многогранника $ABDEB_1K$ равен

$$V_1=V_2+V_3=\frac{5}{18}V+\frac{1}{12}V=\frac{13}{36}V.$$

Следовательно, объем многогранника $A_1B_1C_1DCEK$ равен $\frac{23}{36}V$ и плоскость делит объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ в отношении 13:23. Ответ: 13:23.

901. Решается аналогично предыдущей задаче. Ответ: Плоскость делит объем призмы в отношении 49:95.

902. Пусть K и M — точки касания данного шара соответственно с ребрами SA и SC, O — центр данного шара.

1) Треугольники SKO и SMO равны (рис. 110), поскольку они имеют общую гипотенузу SO и равные катеты SK и SM (отрезки касательных, проведенных из точки S к данному шару).

Поэтому $\angle ASO = \angle CSO$.

2) Далее, согласно условию центр O данного шара лежит на высоте SL пирамиды. Поэтому $SOL \perp AL$, $SOL \perp CL$ и, значит, $\triangle ASL = \triangle CSL$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий катет SL и $\angle ASL = \angle CSL$). Следовательно, $AL = CL$. Аналогично доказывается, что $AL = BL$.

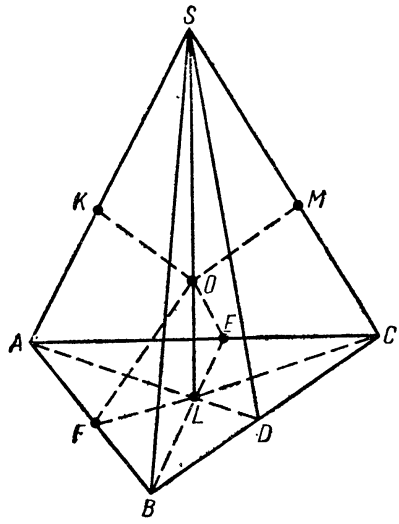


Рис. 110

3) Обозначим через F, E и D соответственно точки касания данного шара с ребрами AB, AC и BC. Сечение данного шара плоскостью ABC является окружностью, вписанной в $\triangle ABC$ (F, E и D — точки касания со сторонами).

Имеем, далее,

$$\triangle OLD = \triangle OLE = \triangle OLF$$

(прямоугольные треугольники, имеющие общий катет OL и $OD = OE = OF = r$).

Следовательно, $LE = LD = LF$. Но $LA = LB = LC$, значит, все шесть прямоугольных треугольников ALE, LAF, LBF, LBD, LCD и LCE равны, так как они имеют равные катеты ($LF = LE = LD$) и равные гипотенузы ($LA = LB = LC$). Отсюда следует, что $AF = BF = BD = CD = CE = AE$ и, значит, а) $\triangle ABC$ — правильный; б) L — центр вписанной в него окружности. Таким образом, пирамида $SABC$ — правильная.

Приведенное доказательство составляет основную часть решения задачи. После этого требуемые вычисления не представляют труда.

4) Для вычисления высоты h пирамиды рассмотрим сечение пирамиды и данного шара плоскостью SAD

(рис. 111). Пусть N одна из точек пересечения AD с окружностью, являющейся сечением шара указанной плоскостью.

Имеем:

$$SO = r\sqrt{3},\ OK = ON = r,$$
$$OL = SL - SO = h - r\sqrt{3}.$$

Из $\triangle NLO$ находим

$$NL = \sqrt{r^2 - (h - r\sqrt{3})^2}$$

и, далее, $LD = LN$, $AL = 2LD = 2LN$. Из $\triangle ALS$ находим

$$AS = \sqrt{h^2 + AL^2} = \sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2\right]}.$$

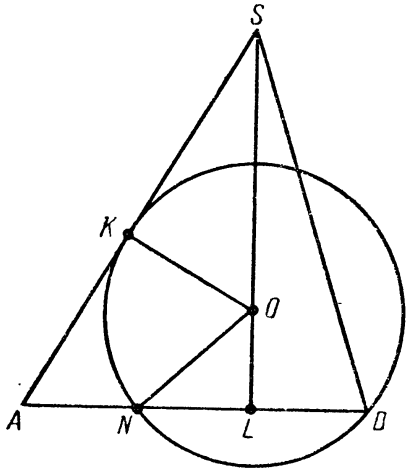


Рис. 111

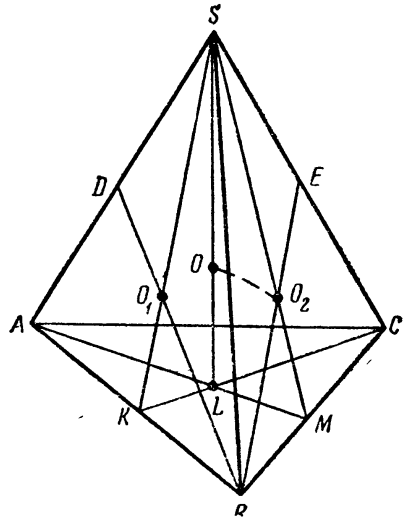


Рис. 112

Так как $\triangle ALS \sim \triangle OKS$, то $OK:OS = AL:AS$;

$$\frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{r^2 - (h - r\sqrt{3})^2}}{\sqrt{h^2 + 4\left[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2\right]}}.$$

После упрощений из последнего равенства получим

$$9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0.$$

Принимая во внимание, что $h > SO = r\sqrt{3}$, отсюда окончательно найдем

$$h = \frac{4r}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: Высота пирамиды равна $4r/\sqrt{3}$.

903. Так же, как и в предыдущей задаче, нет необходимости представлять, как расположен шар относительно пирамиды. Достаточно изобразить лишь точки касания и воспользоваться тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к шару, равны.

1) Рассмотрим пирамиду $SABC$ (рис. 112). Пусть O_1 — точка пересечения высот BD и SK боковой грани ASB, O_2 и O_3 — соответственно точки пересечения высот граней BSC и ASC (точка O_3 на чертеже не показана).

Рассмотрим грани ABS и BSC. Шар касается этих граней в точках O_1 и O_2. Значит, любая прямая, лежащая в плоскости грани ABS (или BSC) и проходящая через точки O_1 (или O_2), будет касаться шара. В частности, прямые SM, BE, SK и BD — касательные к шару. Тогда имеем: $SO_2 = SO_1$, $BO_2 = BO_1$. Следовательно, треугольники SBO_1 и SBO_2 равны (по трем сторонам). Отсюда следует, что $\angle BSO_2 = \angle BSO_1$ и $\angle SBO_2 = SBO_1$. Но тогда равны треугольники BSE и BSD, так как они имеют общую гипотенузу BS и равные острые углы: $\angle SBE = \angle SBD$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle BSD = \angle BSE$. Аналогично доказывается, что $\triangle SBM = \triangle SBK$ и что $\angle SBM = \angle SBK$.

Теперь можно утверждать, что $\triangle SBA = \triangle SBC$, так как эти треугольники имеют общую сторону BS и два попарно равных угла, прилегающих к этой стороне. Следовательно, $AB = BC$ и $AS = CS$.

Если провести аналогичные рассуждения для граней ABS и ACS, то мы получим, что $AB = AC$ и $BS = CS$. Итак, данная пирамида имеет равные боковые ребра и равные стороны основания. Отсюда следует, что пирамида правильная.

2) Определим теперь, где находится центр шара (это потребуется для вычислений). Поскольку пирамида правильная, то $AM \perp BC$, $SM \perp BC$, и, значит, плоскость ASM перпендикулярна ребру BC, а также любой плоскости, проходящей через это ребро. Поэтому плоскости ASM и BSC перпендикулярны. Перпендикуляр, восстановленный к плоскости BSC в точке O_2, будет лежать в плоскости ASM. На этом перпендикуляре расположен центр данного шара. Аналогично показывается, что центр шара лежит в плоскости CSK. Значит, он лежит на линии пересечения плоскостей ASM и CSK, т. е. на высоте пирамиды.

3) Перейдем к вычислениям. Обозначим через x длину бокового ребра пирамиды. Так как пирамида правильная, то $\angle BSC=\alpha/3$. Из прямоугольного треугольника BSM находим:

$$SM=x\cos\frac{\alpha}{6};\quad BM=x\cdot\sin\frac{\alpha}{6}.$$

Тогда

$$BC=2x\cdot\sin\frac{\alpha}{6};\quad AM=\sqrt{3}x\cdot\sin\frac{\alpha}{6}.$$

$$LM=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{3}x\cdot\sin\frac{\alpha}{6}\quad (L\text{—центр }\triangle ABC).$$

Далее, $OO_2\perp SM$, (так как O_2—точка касания шара с плоскостью BSC; O—центр шара), значит, $\triangle SLM\sim\triangle SOO_2$. Из подобия треугольников следует, что

$$LM:OO_2=SL:SO_2. \qquad (*)$$

Имеем

$$OO_2=r,\ SL=\sqrt{SM^2-LM^2}=\frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{6}-\sin^2\frac{\alpha}{6}}.$$

Остается выразить SO_2 через x; тогда равенство $(*)$ будет уравнением для определения x. Из прямоугольного треугольника BSE находим

$$SE=x\cdot\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Тогда из $\triangle SO_2E$ получаем

$$SO_2=\frac{SE}{\cos\frac{\alpha}{2}}=x\frac{\cos\frac{\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{6}}.$$

Из равенства $(*)$ окончательно находим

Ответ: $x=r\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{6}-\sin^2\frac{\alpha}{6}}$.

904. Решается аналогично задаче 903. Ответ:

$$r=\frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}}}.$$

905. Решается аналогично задаче 904. Ответ: $3\sqrt[3]{\dfrac{48V\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}}$.

906. 1) Пусть S — вершина данной пирамиды, ABC — ее основание (рис. 113); D и E — соответственно, середины сторон AC и BC; O_1 и O_2 — точки, делящие отрезки SD и SE в отношении 2:1

$$\frac{SO_1}{O_1D}=2,\ \frac{SO_2}{O_2E}=2.$$

Точки O_1 и O_2 — точки пересечения медиан граней ASC и BSC и, согласно условию, точки касания шара с плоскостями этих граней. Поэтому $SO_1=SO_2$, $CO_1=CO_2$. Отсюда следует, что $\triangle SO_1C=\triangle SO_2C$ и, значит, $\angle CSD=\angle CSE$. Так как $SD=\frac{3}{2}SO_1$, $SE=\frac{3}{2}SO_2$ и $SO_1=SO_2$, то $SD=SE$. Отсюда следует, что $\triangle SEC=\triangle SDC$, поэтому $CD=EC$ и $\angle SCD=\angle SCE$. Из равенства $CD=EC$ следует, что $AC=CB$. Теперь можно утверждать, что $\triangle SAC=\triangle SBC$ (SC — общая сторона, $AC=BC$, $\angle SCB=\angle SCA$) и, следовательно, $SA=SB$.

Повторяя аналогичные рассуждения для граней SBC и SAB, докажем, что $AB=BC$ и $SA=SC$. Итак, $AB=BC=CA$, $SA=SB=SC$, т. е. пирамида $SABC$ — правильная.

2) Далее необходимо доказать (докажите!), что центр шара лежит на высоте SL пирамиды.

3) Вычисление радиуса шара не представляет труда. Приведем окончательный ответ:

$$r=\frac{2\sqrt{3}h\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\pi}{6}}{9\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha-\pi}{6}-3}$$

или

$$r=\frac{h\sin\dfrac{\alpha-\pi}{3}}{4\sqrt{3}\sin\alpha/6\cdot\sin\dfrac{\alpha-2\pi}{6}}.$$

907. $r=\dfrac{\sqrt{16S^2+45a^4}}{24a}$.

908. Поскольку боковые ребра пирамиды равны между собой, то равны и проекции этих ребер на плоскость основания. Значит, вершина пирамиды проектируется

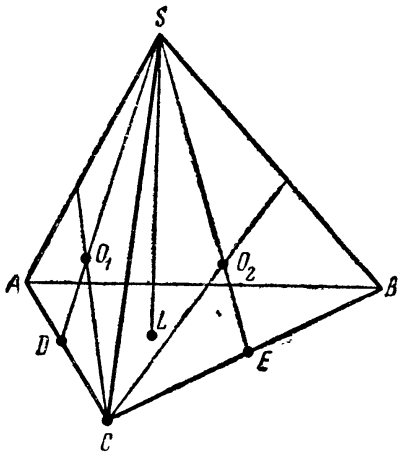


Рис. 113

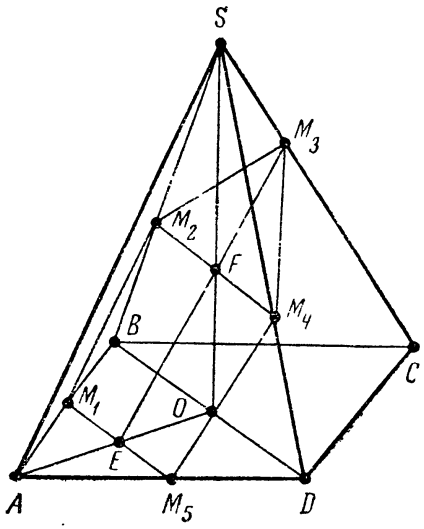


Рис. 114

в центр окружности, описанной вокруг основания. Для прямоугольного треугольника это середина гипотенузы. Поэтому можно найти высоту пирамиды

$$H = \sqrt{9^2 - \left(\frac{\sqrt{128}}{2}\right)^2} = 7\ [см]$$

и, далее, объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 74\frac{2}{3}\ [см^3].$$

909. Объем пирамиды равен $\frac{4}{3} h^3 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$. Задача имеет решение при

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

910. На рис. 114 представлен чертеж к этой задаче. Сечение $M_1M_2M_3M_4M_5$ строится следующим способом. Через точки M_1, M_5 проводятся прямые M_1M_2 и M_5M_4 параллельно AS (сечение параллельно AS и, значит, его линии пересечения с гранями ASD, ASB должны быть параллельны AS); через точку E, середину AO в плоскости ASC, проводится прямая $EM_3 \parallel AS$. Полученное сечение

состоит из прямоугольника $M_1M_2M_4M_5$ и равнобедренного треугольника $M_2M_3M_4$ ($M_1M_2 \parallel AS$, $M_3M_4 \parallel AS$ и $AS \perp M_1M_5$ согласно теореме „о трех перпендикулярах“).

Площадь сечения удобнее всего вычислить как сумму площадей двух равных трапеций $EM_1M_2M_3$ и $EM_5M_4M_3$.

1) $M_1M_2 = \frac{b}{2}$ (M_1M_2 — средняя линия в $\triangle ASB$),

2) $EM_3 = \frac{3b}{4}$ $\left(\triangle ECM_3 \sim ACS,\ \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4}\right)$,

3) $M_1E = \frac{1}{2} M_1M_2 = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Площадь сечения S находится по формуле

$$S = (M_1M_2 + EM_3)\, M_1E = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}.$$

911. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все боковые грани которой суть правильные тре-

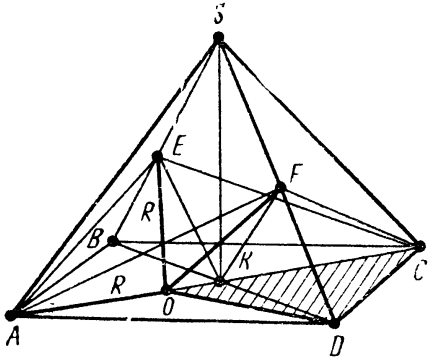


Рис. 115

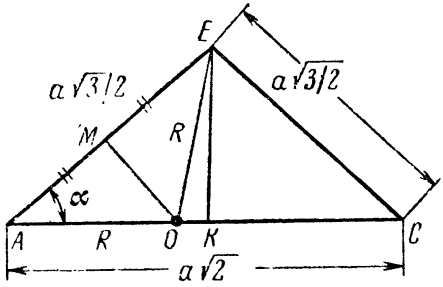


Рис. 116

угольники со стороной a (рис. 115). Сфера проходит через точку A и касается ребер SB и SD в точках E и F соответственно; $SE = EB$, $SF = FD$.

Поскольку $\triangle ASB$ и $\triangle BSC$ правильные, то сечение пирамиды AEC перпендикулярно ребру BS, а сечение AFC — ребру SD ($AE \perp BS$, $CE \perp BS$ и $AF \perp SD$, $CF \perp SD$). Центр сферы должен лежать в каждом из этих сечений, и поэтому он лежит на линии их пересечения — диагонали основания AC. Найдем на диагонали AC точку O, равноудаленную от вершины A и точки E. Рассмотрим отдельно $\triangle AEC$ (рис. 116). Так как точка O равноудалена от

A и E, то она лежит на срединном к AE перпендикуляре MO. Имеем

1) $AO = R = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$, где $\alpha = \angle EAC$.

2) $\cos\alpha = \frac{AK}{AE} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Тогда $R = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$ или $\frac{AO}{OC} = \frac{3}{8}$; $OC = \frac{5}{8}$. AC. Объем пирамиды $OSCD$ находится по формуле

$V = \frac{1}{3} S_{OCD} SK = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{a^2}{2} SK = \frac{5a^2 SK}{48}$, SK находится из $\triangle ASK$: $SK = \frac{a}{\sqrt{2}}$, тогда

$$V = \frac{5\sqrt{2}a^3}{96}.$$

912. Чертеж к задаче представлен на рис. 117.

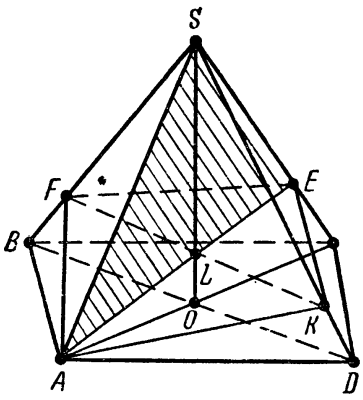


Рис. 117

а) Сечение удобнее всего построить, если заметить, что линия его пересечения FK с плоскостью треугольника BSD, проходящей через высоту SO пирамиды и перпендикулярной плоскости треугольника ASC, должна быть параллельна диагонали основания BD ($BD \perp$ пл. $\triangle ASC$ и лежит в пл. $\triangle BSD$).

б) Объем искомой пирамиды $SAFEK$ удобно искать как удвоенный объем пирамиды $KASE$ с основанием ASE и высотой LK.

в) Заметив, что угол ASC — прямой (в $\triangle ASC$: $SA = SC = a$, $AC = a\sqrt{2}$), находим площадь $\triangle ASE$:

$$S_{\triangle ASE} = \frac{1}{2} ab.$$

г) Для вычисления высоты LK воспользуемся подобием треугольников SLK и SOD

$$LK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{SL}{SO}.$$

д) Определение отношения $\frac{SL}{SO}$ понятно из рис. 118, на котором вынесена плоскость сечения ASC и проведена MO — средняя линия $\triangle AEC$. $\triangle MOL \sim \triangle SEL$

$$\frac{MO}{SE} = \frac{SO-SL}{SL}; \quad \frac{\frac{1}{2}(a-b)}{b} = \frac{SO}{SL} - 1,$$

$$\frac{SL}{SO} = \frac{2b}{a+b}.$$

Итак, $LK = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Объем V искомой пирамиды определится по формуле:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} = \frac{a^2b^2\sqrt{2}}{3(a+b)}.$$

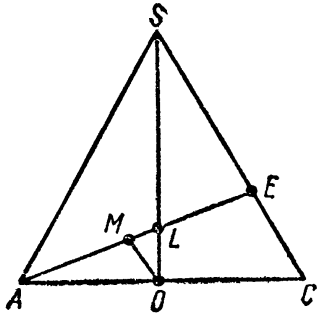


Рис. 118

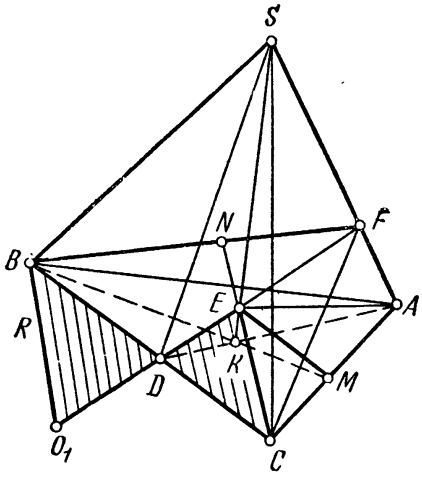


Рис. 119

913. 1) Пусть $SABC$ (рис. 119) правильная треугольная пирамида, точка K — центр основания. Рассмотрим первую сферу. Ее центр O_1 как точка, равноудаленная от граней двугранного угла, образованного плоскостями ASB и ASC, должен лежать в биссекторной плоскости ASD.

2) Угол BFC между перпендикулярами BF и CF, опущенными из точек B и C соответственно на ребро SA и пересекающимися в одной точке F, в силу равенства треугольников ASB и ASC есть линейный угол рассматриваемого двугранного угла (предположим сначала, что угол при вершине пирамиды острый $2b^2 > a^2$).

3) Плоскость BFC (проходящая, в частности, через точку B) перпендикулярна грани ASB, так как высота треугольника CN является одновременно и высотой пирамиды, опущенной из вершины C ($CN \perp BF$ по построению; $CN \perp SA$, так как $SA \perp BF$, $SA \perp CF$, значит, $SA \perp$ пл. BFC). Следовательно, перпендикуляр, восставленный из точки B к боковой грани, лежит в плоскости BFC. Значит, и точка O_1 лежит в этой плоскости.

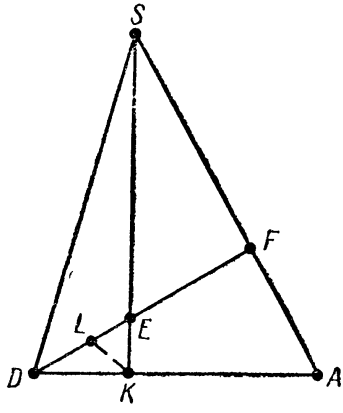


Рис. 120

4) Далее ясно, что центр этой сферы O_1 лежит на биссектрисе, высоте и медиане треугольника BFC, являющейся линией пересечения плоскостей ASD и BFC. Таким образом, положение точки O_1 найдено.

5) Заметим, что $\triangle BDO_1 = \triangle CDE$ ($BD = DC$, $\angle O_1BD = \angle DCE$, так как $O_1B \parallel CN$ — перпендикулярны к одной плоскости). Поэтому отрезок CE равен и параллелен отрезку $O_1B = R$.

6) Если провести аналогичные рассуждения по отношению ко второй сфере, то окажется, что отрезок O_2B равен и параллелен отрезку AE. Значит, треугольник CEA равен и параллелен основанию искомой пирамиды.

7) Высотой искомой пирамиды является ребро SB, поскольку $O_1B \perp BS$ и $O_2B \perp BS$ и, следовательно, $BS \perp$ пл. O_1BO_2. Отсюда $BS \perp$ пл. CEA.

8) Для нахождения площади треугольника CEA найдем его высоту EM. Обратимся к рис. 120, на котором изображено сечение пирамиды ASD. Если провести $LK \parallel SA$, то из подобия треугольников ELK и ESF получим $\frac{LK}{SF} = \frac{EK}{ES}$. Далее находим, что $\frac{LK}{FA} = \frac{1}{3}$ (точка K — центр основания);

$$FA = AD \cdot \cos \angle A. \text{ Из } \triangle KSA\text{: } \cos \angle A = \frac{a}{\sqrt{3}\, b},$$

значит,

$$FA = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}\, b} = \frac{a^2}{2b}; \quad SF = SA - FA = \frac{(2b^2 - a^2)}{2b}.$$

Получаем

$$\frac{FA}{SF}=\frac{a^2}{2b^2-a^2}\text{ и }\frac{LK}{FA}\cdot\frac{FA}{SF}=\frac{LK}{SF}=\frac{a^2}{3(2b^2-a^2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{EK}{ES}=\frac{a^2}{3(2b^2-a^2)}.$$

9) Так как высота пирамиды $SK=EK+ES=\sqrt{b^2-a^2/3}$, то легко найти

$$EK=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}:\sqrt{3b^2-a^2}.$$

10) Из прямоугольного треугольника EKM находим EM

$$EM=\frac{ab}{2\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

11) Площадь основания искомой пирамиды равна

$$S_{\text{осн}}=\frac{a^2b}{4\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

Объем искомой пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot SB=\frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2-a^2}}.$$

Можно убедиться, что и в случае тупого угла при вершине пирамиды объем дается полученной формулой. Условие $3b^2-a^2>0$ есть, как легко видеть, условие существования пирамиды, означающее, что угол при ее вершине не более 120°.

914. Указание: Сечение пирамиды, проходящее через ее высоту и точку касания вписанного в пирамиду шара, представляет собой равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Искомое сечение представляет собой равнобочную трапецию с основаниями, параллельными AB и CD, и высотой — отрезком прямой, соединяющим точку касания (середина одной из апофем) с точкой, лежащей на апофеме противоположной грани на расстоянии $^1/_4$ ее длины, считая от вершины S.

Ответ: $3\sqrt{3}/32$.

915. $\varphi = \arccos(-\cos^2\alpha) = \pi - \arccos(\cos^2\alpha)$.

916. Обозначим сторону основания пирамиды $SABCD$ через a (рис. 121). Тогда $SE = a\sqrt{2}$. Поскольку указанное в условии сечение параллельно BD, то линия его пересечения с плоскостью BSD также параллельна BD: $M_2M_4 \parallel BD$. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду,

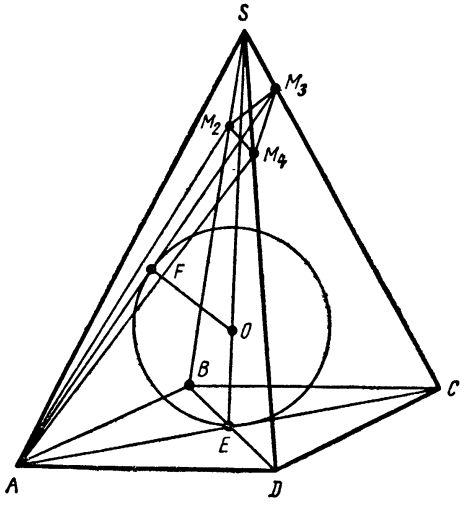


Рис. 121

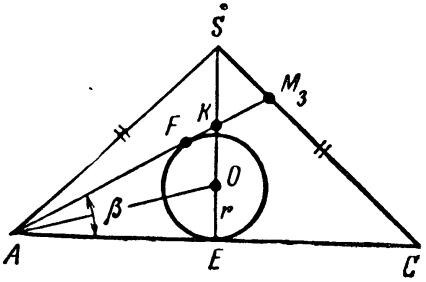


Рис. 122

лежит на высоте пирамиды. Проведем через точку A в плоскости треугольника ASC прямую AM_3, касательную к окружности, получившуюся в результате пересечения плоскости ASC с вписанной сферой. Тогда точки A, M_2, M_3, M_4 определяют данное сечение.

Площадь сечения удобнее всего вычислить как сумму площадей двух равных треугольников AM_2M_3 и AM_3M_4 с основанием AM_3 и высотой $\frac{1}{2}M_2M_4$ ($M_2M_4 \perp AM_3$, т. к. $M_2M_4 \parallel BD$). Радиус вписанного шара легко вычислить: $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Рассмотрим $\triangle ASC$ (рис. 122). Обозначим $\beta = \angle M_3AC$; $\alpha = \angle ACS$. Имеем:

$$1)\ \sin\alpha = \frac{ES}{CS} = \frac{a\sqrt{2}}{3a/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3};\ \cos\alpha = 1/3.$$

$$2)\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{OE}{AE} = \frac{a\sqrt{2}/4}{a\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2};\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{4}{3}$$

(AO — биссектриса угла M_3AC). Тогда $\sin\beta = 0{,}8$; $\cos\beta = 0{,}6$.

3) $\frac{AM_3}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)}$ (теорема синусов в $\triangle AM_3C$).

Отсюда находим AM_3:

$$AM_3=a\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=a\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{5a(3\sqrt{2}-2)}{7}.$$

4) $\frac{KE}{AE}=\operatorname{tg}\beta$; $KE=AE\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Следовательно, $\frac{SK}{SE}=\frac{1}{3}$. Из подобия треугольников SM_2M_4 и SBD находим

$$M_2M_4=\frac{1}{3}BD=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Площадь сечения $AM_2M_3M_4$ определяется по формуле

$$S=M_2M_4\cdot AM_3=\frac{5a^2(6-2\sqrt{2})}{21}.$$

917. Прежде всего отметим, что так как прямая AB (рис. 123) параллельна прямой DC, то она параллельна и плоскости боковой грани DSC. Тогда любая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекает плоскость боковой грани DSC по прямой, параллельной прямой AB.

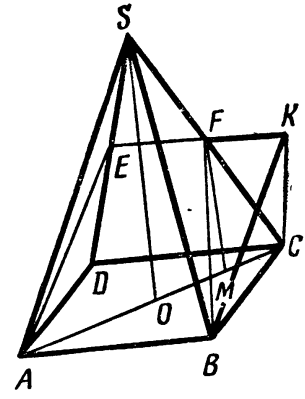


Рис. 123

Следовательно, плоскость, проходящая через точки A, B и середину (точку F) ребра SC, пересекает боковую грань DSC по прямой EF, являющейся средней линией треугольника DSC.

Теперь найдем объем многогранника $ABCDEF$. Сделаем дополнительное построение: продолжим прямую EF и отложим на ней отрезок $FK=EF$, затем точку K соединим прямыми с точками B и C.

Рассмотрим четырехугольник $DCKE$. Это параллелограмм, так как в нем противоположные стороны DC и KE равны и параллельны. А раз четырехугольник $DCKE$ есть параллелограмм, то в нем противоположные стороны DE и CK равны и параллельны.

Аналогично доказывается, что четырехугольник $ABKE$ есть параллелограмм и в нем противоположные стороны AE и BK равны и параллельны.

Так как в основании нашей пирамиды лежит квадрат, то DA и CB также равны и параллельны.

Итак, мы получили, что в треугольниках ADE и BCK соответствующие стороны равны и параллельны, а это означает, что эти треугольники равны, а их плоскости параллельны. Так как, кроме того, $DC = EK = AB$ и прямые DC, EK и AB параллельны, то многогранник $BCKADE$ есть треугольная призма с основаниями ADE и BCK.

Эту призму можно также рассматривать как половину параллелепипеда, у которого в основании лежит квадрат $ABCD$, а одной из боковых граней параллелограмм $DCKE$. Поэтому объем призмы $CBKDAE$ равен половине объема этого параллелепипеда, т. е. половине произведения площади квадрата $ABCD$ на высоту параллелепипеда, например на высоту FM, опущенную из точки F на плоскость $ABCD$.

Из подобия треугольников OSC и MFC вытекает, что высота нашего параллелепипеда равна половине высоты пирамиды.

Пусть V — объем пирамиды, V_1 — объем призмы $CBKDAE$, S — площадь квадрата $ABCD$, H — высота пирамиды, тогда

$$V = \frac{SH}{3}, \quad V_1 = \frac{S \cdot \frac{H}{2}}{2} = \frac{SH}{4},$$

откуда получаем, что $V_1 = \frac{3}{4}V$, т. е. объем призмы $CBKDAE$ составляет $^3/_4$ объема пирамиды $SABCD$.

Теперь вспомним, что нам надо найти объем не призмы $CBKDAE$, а многогранника $ABCDEF$, который есть разность призмы $CBKDAE$ и пирамиды $BCKF$. Поэтому для определения объема V_3 многогранника $ABCDEF$ надо из объема V_1 призмы $CBKDAE$ вычесть объем V_2 пирамиды $BCKF$.

Найдем объем V_2 пирамиды $BCKF$. Пусть S_1 — площадь треугольника CKF, а h — длина высоты, опущенной из вершины B на плоскость треугольника CKF. Тогда

$$V_2 = \frac{S_1 h}{3}. \qquad (*)$$

Но легко видеть, что призма $CKBDEA$ есть половина и такого параллелепипеда: основание — параллелограмм $DCKE$, а квадрат $ABCD$ есть одна из боковых граней. Тогда в этом параллелепипеде высота есть h, а площадь основания $DCKE$ — четыре площади треугольника FKC, поэтому объем призмы $CKBDEA$ можно записать и так:

$$V_1 = \frac{4S_1 h}{2}.$$

Отсюда, учитывая равенство (*), получаем

$$V_2 = \frac{V_1}{6}.$$

Теперь найдем объем V_3 многогранника $ABCDEF$:

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{5}{6} V_1.$$

Но так как $V_1 = {}^3/_4 V$, то окончательно получаем, что

$$V_3 = \frac{5}{8} V,$$

т. е. объем многогранника $ABCDEF$ составляет ${}^5/_8$ объема пирамиды $SABCD$, но тогда объем многогранника $SABFE$ составляет ${}^3/_8$ объема пирамиды $SABCD$.

Следовательно, плоскость, проходящая через точки A, B и середину F ребра SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, делит объем пирамиды в отношении 3:5.

Эту задачу можно решить и без выхода за пределы рассматриваемой пирамиды. Как уже показано выше, наша плоскость пересечет плоскость боковой грани DSC по средней линии треугольника DSC. Для нахождения объема многогранника $ABCDEF$ проведем плоскость ADF. Тогда многогранник $ABCDEF$ разобьется на две пирамиды $FABCD$ и $ADEF$. Найдем теперь объемы этих двух пирамид.

Так как у пирамиды $FABCD$ высота равна половине высоты пирамиды $SABCD$, а основание то же самое, то объем V_1 пирамиды $FABCD$ равен половине объема V пирамиды $SABCD$, т. е. $V_1 = {}^1/_2 V$.

Для вычисления объема пирамиды $ADEF$ проведем плоскость SAC. Тогда объем V_2 пирамиды $ADCS$ равен половине объема V пирамиды $SABCD$, т. е. $V_2 = {}^1/_2 V$.

В пирамиде $ADCS$ точку A можно принять за вершину пирамиды, а треугольник DCS — за основание. В пирамиде $ADEF$ точка A также может быть принята за вершину, а треугольник DEF — за основание. Тогда у пирамид $ADEF$ и $ADCS$ равные высоты.

Кроме того, очевидно, что площадь треугольника DEF равна площади треугольника EFS, а последняя равна $^1/_4$ площади треугольника DCS. Значит объем V_3 пирамиды $ADEF$ равен $^1/_4$ объема V_2 пирамиды $ADCS$, т. е. $V_3 = {}^1/_4 V_2 = \frac{1}{8} V$. Теперь объем V_4 многогранника $ABCDEF$ легко найти

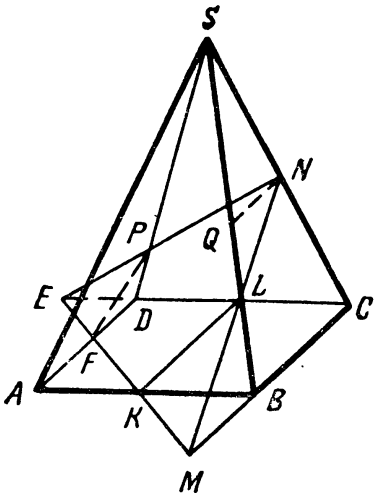


Рис. 124

$$V_4 = V_1 + V_3 = \frac{1}{2} V + \frac{1}{8} V = \frac{5}{8} V.$$

Итак, объем многогранника $ABCDEF$ равен $^5/_8$ объема данной пирамиды $SABCD$, поэтому секущая плоскость делит объем данной пирамиды в отношении 3:5.

Ответ: 3:5.

918. Пусть точка K есть середина ребра AB (рис. 124). Плоскость сечения пересекает плоскость $ABCD$ по прямой KM, которая пересекает ребро AD в точке F и продолжение ребра CD в точке E. Легко показать, что точка F есть середина ребра AD и точка E отстоит от точки D на $^1/_2 DC$, т. е.

$$ED = \frac{1}{2} DC, \quad \left(EC = \frac{3}{2} DC\right).$$

Пусть точка N — середина ребра CS. Точки N и M лежат в плоскости грани SBC, поэтому прямая MN пересекает ребро BS в некоторой точке L.

Выясним теперь, в каком отношении точка L делит ребро BS. Для этого проведем в треугольнике CSB среднюю линию NQ. Тогда получим, что треугольники NQL и LBM равны, так как у них $BM = NQ = 1/2\,CB$, $\angle LBM = \angle NQL$ и $\angle BML = \angle QNL$, как накрестлежащие углы при параллельных прямых NQ и CM. Но из равенства этих треугольников вытекает, что $BL = QL$ откуда получаем: точка L делит ребро SB в отношении 3:1.

Так как точки E и N лежат в плоскости грани SDC, то, соединив эти точки, получим, что прямая EN пересечет ребро SD в некоторой точке P. Как легко показать, точка P делит ребро SD также в отношении 3:1.

Итак, мы построили сечение. Оказалось, что плоскость сечения пересекает пирамиду по пятиугольнику $LKFPN$. Эта плоскость делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника, причем такие, что вычислить их объемы сразу же представляется возможным. Для того чтобы вычислить объем хотя бы одного из этих многогранников, нужно сделать дополнительные построения и рассмотреть несколько пирамид.

Однако если внимательно посмотреть на чертеж (см. рис. 124), то можно убедиться, что объем многогранника $CDFKBLNP$, ограниченного треугольниками DFP и KLB, четырехугольниками $CNLB$ и $CNPD$, пятиугольниками $PFKLM$ и $DFKBC$, равен объему треугольной пирамиды $NECM$ без объема двух треугольных пирамид $LKBM$ и $PEDF$. Вычислим теперь объемы этих пирамид.

Пусть высота нашей пирамиды $SABCD$ равна H, а ребро основания равно a, тогда объем пирамиды $SABCD$ равен: $V=\frac{a^2H}{3}$. Так как точка N есть середина ребра CS, то легко показать, что перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость $ABCD$, равен половине перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость $ABCD$, т. е. этот перпендикуляр равен $H/2$. Столь же легко показать, что перпендикуляры, опущенные из точек L и P на плоскость $ABCD$, равны $\frac{H}{4}$.

Площадь треугольника ECM равна $\frac{9a^2}{8}$. Площадь каждого из треугольников DEF и BMK равна $\frac{a^2}{8}$. Теперь объем пирамиды $NECM$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{9a^2}{8}=\frac{9}{16}V$, а объем каждой из пирамид $PEFD$ и $LKBM$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{4}\cdot\frac{a^2}{8}=\frac{V}{32}$. Поэтому объем V_1 нашего многогранника равен

$$V_1=\frac{9}{16}V-2\cdot\frac{1}{32}\cdot V=\frac{V}{2}.$$

Значит, наша плоскость делит объем пирамиды в отношении 1:1.

В этой задаче вычисление объема многогранника $CDFKBLNP$ без выхода за пределы пирамиды и длиннее и, главное, геометрически менее наглядно, чем разобранное выше. Однако мы все же приведем его.

Проведя плоскости через точки N, K, B и N, D, E, получим, что многогранник $CDFKBLNP$ разбился на три пирамиды: пятиугольную пирамиду $NDFKBC$ (N — вершина, пятиугольник $KBCDF$ — основание), треугольную пирамиду $NKBL$ (N — вершина, треугольник KBL — основание) и треугольную пирамиду $NPDF$ (N — вершина, треугольник PDF — основание). Вычислим объем этих пирамид.

Так как точка N делит ребро CS пополам, то длина высоты, опущенной из точки N на плоскость $ABCD$, равна половине высоты, опущенной из точки S на ту же плоскость, т. е. равна $\frac{H}{2}$.

Площадь пятиугольника $KBCDF$ равна площади квадрата $ABCD$ без площади треугольника AKF:

$$S_{KBCDF} = a^2 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{7}{8}a^2.$$

Поэтому объем V_1 пирамиды $NKBCDF$ равен

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\cdot\frac{7a^2}{8} = \frac{7V}{16},$$

где V — объем пирамиды $SABCD$.

Заметим, что объем V пирамиды $SABCD$ равен двум объемам пирамиды $SABC$. Будем считать, что у пирамиды $SABC$ точка C — вершина, а треугольник ABS — основание. Пусть высота, опущенная из точки C на грань ABS, равна H_1, а площадь треугольника ABS равна $S_{\triangle ABC}$, тогда

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{3}H_1\cdot S_{\triangle ABS}, \text{ т. е. } V = \frac{2}{3}H_1\cdot S_{\triangle ABS}.$$

Так как точка N — середина ребра CS, то перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость ABS, равен $\frac{H_1}{2}$. Так как $KB = \frac{1}{2}AB$, а $BL = \frac{1}{4}BS$, то

$$S_{\triangle KBL} = \frac{1}{2}KB\cdot BL\cdot\sin\angle KBL =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{4}BS\cdot\sin\angle KBL = \frac{1}{8}S_{\triangle ABS}.$$

Поэтому объем V_2 пирамиды $NKBL$ равен

$$V_2=\frac{1}{3}\frac{H_1}{2}\cdot\frac{1}{8}S_{\triangle ABS}=\frac{1}{32}\left(\frac{2}{3}H\cdot S_{\triangle ABS}\right)=\frac{1}{32}V.$$

Совершенно аналогичные рассуждения позволяют найти объем V_3 треугольной пирамиды $NPDF$:

$$V_3=\frac{1}{32}V.$$

Теперь объем V_4 многогранника $KBCDFPNL$ вычисляется уже легко:

$$V_4=V_1+V_2+V_3=\frac{7}{16}V+\frac{1}{32}V+\frac{1}{32}V=\frac{1}{2}V,$$

т. е. плоскость сечения делит объем пирамиды пополам. Ответ: 1:1.

919. Задача решается методами, аналогичными примененным в задачах 917, 918. Ответ: 1:47.

920. Обозначим через O_1 и O_2 центры граней $A'B'C'D'$ и $B'C'CB$ соответственно (рис. 125). Построим, прежде всего, указанное в условии задачи сечение. Для этого найдем точку K пересечения продолжения прямой O_1O_2, принадлежащей сечению, с передней гранью куба $AA'D'D$. Обозначим проекции точек O_1 и O_2 на переднюю грань куба через F и O_3 соответственно (F — середина ребра $A'D'$, O_3 — центр грани $AA'D'D$). Тогда, продолжая проекцию O_3F до пересечения с O_2O_1, получим точку K, принадлежащую сечению. Соединяя точки A и K прямой, получим отрезок AM_1; соединяя точки M_1 и E, получим отрезок M_1E; соединяя точки E и O_2, получим отрезок EM_2; наконец, соединив M_2 и A отрезком прямой M_2A, будем иметь сечение AM_1EM_2. Очевидно, что это сечение — параллелограмм ($AM_1 \parallel M_2E$, $M_1E \parallel AM_2$ как линии пересечения параллельных граней плоскостью сечения).

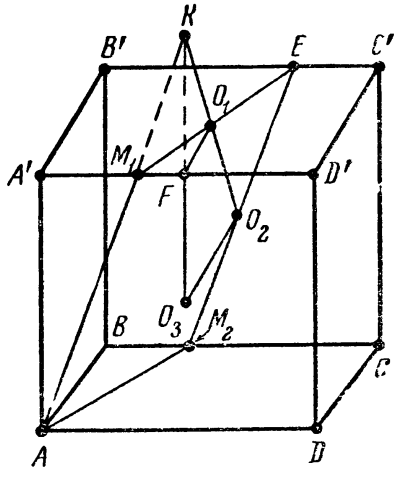


Рис. 125

Определим, в каком отношении точка M_1 делит ребро $A'D'$. Из подобия прямоугольных треугольников KFO_1 и KO_3O_2, в которых $FO_1=\frac{1}{2}O_3O_2$, находим $KF=FO_3=\frac{1}{2}AA'$. Из подобия прямоугольных треугольников $AA'M_1$ и M_1FK находим, что $\frac{M_1F}{M_1A'}=\frac{1}{2}$. Это означает, что $A'M_1:M_1D'=1:2$.

Рассматривая грань куба $A'B'C'D'$, которая делится линией M_1E, проходящей через точку $M_1\left(\frac{A'M_1}{M_1D'}=\frac{1}{2}\right)$ и центр грани O_1, легко найти, что $B'E:EC'=2:1$.

921. Указание. Сечение является правильным ше-

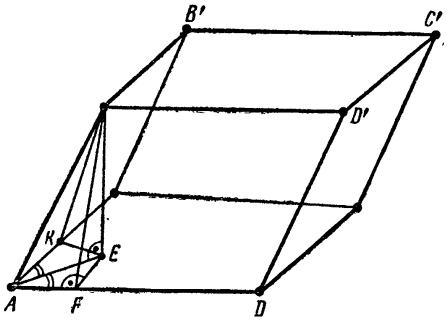


Рис. 126

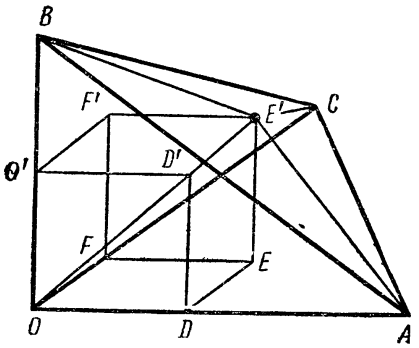


Рис. 127

стиугольником со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

922. Указание. Сечение является правильным шестиугольником со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Его площадь равна $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

923. $\sqrt[4]{3}(S\cos\alpha)^{3/2}$.

924. Чертеж к задаче представлен на рис. 126. Пусть все плоские углы при вершине A параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ равны $\varphi<90°$. Очевидно, что площадь основания такого параллелепипеда равна $\sin\varphi$. Найдем высоту параллелепипеда. Опустим из A' перпендикуляр на плоскость основания $A'E$, а из точки E — перпендикуляры EF и EK на AD и AB соответственно. Согласно теореме о трех перпендикулярах $A'F\perp AD$ и $A'K\perp AB$. Из равенства прямоугольных треугольников $AA'F$ и $AA'K$ (по гипотенузе и острому углу φ) следует равенство

$A'F = A'K$. Из равенства прямоугольных треугольников $A'KE$ и $A'FE$ (по гипотенузе и общему катету) следует равенство сторон $KE = FE$. Значит, AE — биссектриса угла BAD и $\angle EAF = \frac{\varphi}{2}$.

1. Из $\triangle AA'F$ получаем $AF = \cos\varphi$; $A'F = \sin\varphi$,
2. Из $\triangle AEF$ получаем $EF = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$,
3. Из $\triangle A'EF$ получаем $A'E = \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$.

Подкоренное выражение неотрицательно при $\varphi < 90°$. Объем параллелепипеда дается формулой

$$V = \sin\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

925. Пусть $OABC$ — треугольная пирамида с взаимно перпендикулярными ребрами, исходящими из вершины O: $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$ (рис. 127). Объем куба $OFEDO'F'E'D'$ удобнее всего вычислить разбив данную пирамиду на три пирамиды, основания которых суть треугольники OAB, OBC и OAC, а вершина общая, E' — точка касания куба и грани ABC. Каждая из этих пирамид имеет высоту, равную ребру куба x. Имеем очевидное равенство

$$\frac{1}{6}a \cdot b \cdot c = \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}\right)x.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Объем куба дается выражением

$$\frac{a^3b^3c^3}{(ab + ac + bc)^3}.$$

926. Пусть $SABC$ — данная пирамида, S — вершина (рис. 128). Очевидно, что центр шара, описанного вокруг пирамиды, проектируется в центры окружностей, описанных вокруг каждой из граней пирамиды. Для прямоугольных треугольников SBC, SBA и SAC — это соответственно середины гипотенуз N, M, P. Следовательно, центр шара O лежит на пересечении перпендикуляров MM', NN', PP', восставленных из этих точек к соответствующим граням пирамиды.

Достроим пирамиду до прямоугольного параллелепипеда (рис. 128).

Легко видеть, что точка O будет центром этого параллелепипеда.

Если провести сечения параллелепипеда $SBEF$ и $SDEA$, то доказываемое утверждение становится очевидным. Действительно, линия пересечения этих сечений, диагональ SE, проходит через вершину S, центр шара O и через центр тяжести $\triangle ABC$ (линии AN и BP, принадлежащие этим сечениям, суть медианы $\triangle ABC$).

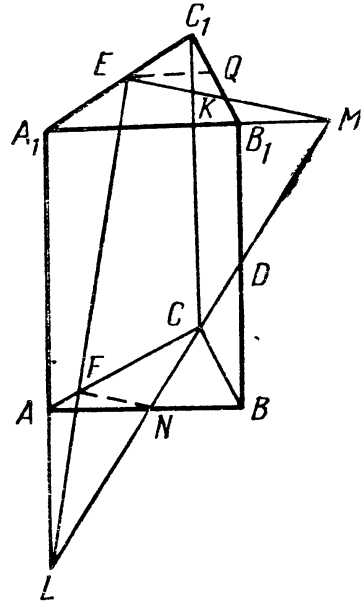


Рис. 129

927. Указание. Центр описанного шара расположен

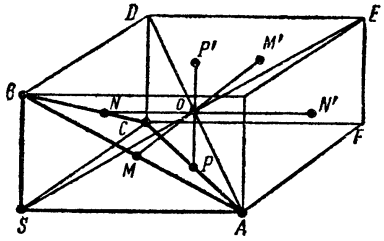


Рис. 128

на пересечении перпендикуляра, восставленного к плоскости основания из центра равностороннего треугольника, и срединной к вертикальному ребру плоскости, параллельной основанию. Ответ: $R=4$ *см*.

928. Указание. Необходимо обратить внимание, что указанное сечение пересекает верхнее основание призмы.

Ответ: $S=\frac{4}{\sqrt{3}}M^2$.

929. $\frac{c^3}{8}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

930. $\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$.

931. Пусть точка E — середина ребра A_1C_1 (рис. 129). Так как точки E и M лежат в плоскости грани $A_1B_1C_1$, то, соединив эти точки прямой, получим, что она пересе-

чет ребро C_1B_1 в точке K. Проведя среднюю линию EQ треугольника $A_1B_1C_1$, получим равные треугольники EQK и KB_1M.

Из равенства этих треугольников вытекает, что $KB_1=QK$, т. е. что $KB_1=\frac{1}{4}C_1B_1$. Значит, плоскость сечения пересекает ребро C_1B_1 в точке K, делящей это ребро в отношении 3:1.

Пусть, далее, точка D есть середина ребра BB_1. Так как точки M и D лежат в плоскости грани ABB_1A_1, то, проведя прямую MD, получим, что она пересечет ребро AB в точке N и продолжение ребра A_1A в точке L. Причем легко показать, что точка M есть середина ребра AB, а точка L отстоит от точки A на половину ребра AA_1, т. е. $AL=\frac{1}{2}AA_1$ и $LA_1=\frac{3}{2}AA_1$.

Так как точки L и E лежат в плоскости грани ACC_1A_1, то, соединив точки L и E прямой, получим, что она пересекает ребро AC в точке F. Из подобия треугольников LAF и LA_1E вытекает, что

$$AF=\frac{1}{3}A_1E=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A_1C_1\right)=\frac{1}{6}A_1C_1.$$

Значит, точка F делит ребро AC в отношении 1:5. Итак, мы нашли все точки пересечения плоскости сечения с ребрами призмы. Сечение построено; оно разбило призму на два многогранника, отношение объемов которых нам надо найти. Найдем объем V_1 многогранника, ограниченного треугольниками AFN и KB_1D, четырехугольниками AA_1EF и A_1EKB_1, пятиугольниками AA_1B_1DN и $NFEKD$.

Заметим, что объем этого многогранника можно получить так: из объема треугольной пирамиды LA_1EM отнять объем двух треугольных пирамид $LAFN$ и DKB_1M.

Найдем теперь объемы всех этих трех пирамид. Пусть боковые ребра призмы $AA_1=BB_1=CC_1=H$, а площадь основания треугольника ABC равна S; тогда объем призмы равен $V=H\cdot S$.

Найдем объем V_2 пирамиды LA_1EM. Так как прямая LA_1 перпендикулярна по условию задачи плоскости A_1EM, то LA_1 есть высота пирамиды LA_1EM и $LA_1=\frac{3}{2}H$.

Как следует из рис. 129, площадь треугольника A_1EM равна площади трапеции A_1B_1QE, т. е. равна $\frac{3}{4}S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{3}{4}S$.

Поэтому

$$V_2 = \frac{1}{3} LA_1 \cdot S_{\triangle A_1EM} = \frac{3}{8} V.$$

Далее, так как $AF = \frac{1}{6} AC$, то высота треугольника AFN равна $^1/_6$ высоты треугольника ACB, откуда, учитывая, что $AN = \frac{1}{2} AB$, получаем:

$$S_{\triangle AFN} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} S.$$

Так как AL перпендикулярно плоскости AFN и $AL = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} H$, то получаем, что объем V_3 пирамиды $LAFN$ равен

$$V_3 = \frac{1}{3} AL \cdot S_{\triangle AFN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{12} S = \frac{1}{72} V.$$

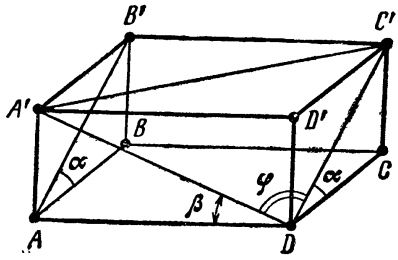


Рис. 130

Наконец, так как точка D есть середина ребра BB_1 и прямая B_1D перпендикулярна плоскости KB_1M, то высота пирамиды DB_1KM равна $B_1D = \frac{1}{2} H$. Площадь треугольника B_1MK равна $\frac{1}{8} S_{\triangle A_1B_1C_1}$, т. е. $S_{\triangle B_1MK} = \frac{1}{8} S$. Поэтому объем V_4 пирамиды DB_1KM равен

$$V_4 = \frac{1}{3} B_1D \cdot S_{\triangle B_1MK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} H \cdot \frac{1}{8} S = \frac{1}{48} V.$$

Теперь найдем объем V_1 нашего многогранника:

$$V_1 = V_2 - V_3 - V_4 = \frac{3}{8} V - \frac{1}{72} V - \frac{1}{48} V = \frac{49}{144} V.$$

Значит, наша плоскость делит объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ в отношении 49:95.

932. $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}v^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

933. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 130). Угол между диагональю AB' грани $AA'B'B$ и плоскостью основания равен α, угол между

диагональю $A'D$ грани $AA'D'D$ и основанием равен β. Поскольку плоскости боковых граней параллелепипеда перпендикулярны основанию, то $\alpha = < B'AB$ и $\beta = < ADA'$. Проведем диагональ DC' грани $DD'C'C$. Так как $DC' \parallel AB'$, то нужно найти угол $A'DC'$, который можно рассматривать как угол треугольника $DA'C'$.

Обозначим $AD = a, DC = c, DD' = b$. Тогда имеем

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta; \qquad \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Используя „теорему косинусов" из рассмотрения треугольника $DA'C'$, находим

$$a^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) - \\ - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}\cos\varphi$$

(φ — искомый угол $A'DC'$). Далее получаем

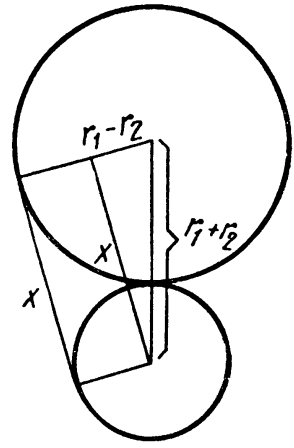


Рис. 131.

$$\cos\varphi = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}} = \sin\beta \cdot \sin\alpha.$$

Итак,

$$\varphi = \arccos(\sin\beta \cdot \sin\alpha).$$

934. Сначала заметим, что если две сферы внешне касаются друг друга и некоторой плоскости, то расстояние x между точками касания с плоскостью равно $2\sqrt{r_1 r_2}$, где r_1 и r_2 — радиусы сфер (рис. 131).

Обозначая через a, b и c длины сторон BC, CA и AB данного треугольника, а через r_1, r_2, r_3 радиусы сфер, касающихся плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B и C (причем каждая сфера касается еще внешним образом двух других), на основании сделанного замечания будем иметь

$$a = 2\sqrt{r_2 r_3}, \quad b = 2\sqrt{r_3 r_1}, \quad c = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Перемножая почленно эти уравнения, получим

$$abc = 8 r_1 r_2 r_3,$$

отсюда

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{abc}{8},$$

а так как

$$r_2r_3=\frac{a^2}{4},\quad r_3r_1=\frac{b^2}{4},\quad r_1r_2=\frac{c^2}{4},$$

то

$$r_1=\frac{bc}{2a},\quad r_2=\frac{ca}{2b},\quad r_3=\frac{ab}{2c}.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin(A+B)},$$

откуда

$$a=\frac{c\sin A}{\sin(A+B)},\qquad b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin(A+B)}.$$

Значит, окончательно

$$r_1=\frac{c\sin B}{2\sin A},\quad r_2=\frac{c\sin A}{2\sin B},\quad r_3=\frac{c\sin A\sin B}{2\sin^2(A+B)}.$$

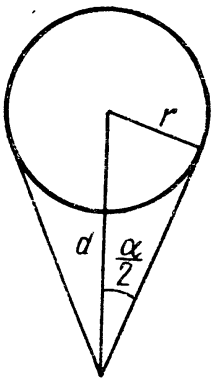


Рис. 132

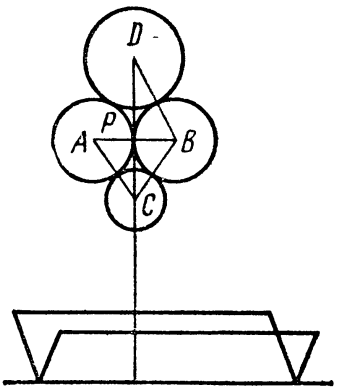


Рис. 133

935. Если сфера радиуса r касается граней двугранного угла, величина которого равна α, то расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно (рис. 132)

$$d=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее, существуют две сферы, каждая из которых касается двух данных сфер и граней двугранного угла. Проведем плоскость через ребро данного двугранного угла, центры двух данных сфер (радиуса r) и центры искомых сфер (рис. 133). Обозначим через x радиус любой из искомых сфер. Так как расстояние от центра сферы ра-

диуса x, касающейся граней двугранного угла величины α, до ребра этого двугранного угла равно

$$\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

то расстояние от центра C меньшей из искомых сфер до точки P касания данных сфер равно

$$\frac{r-x}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а расстояние от центра D большей из искомых сфер до точки P равно

$$\frac{x-r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольных треугольников CPB и BPD получаем одно и то же соотношение:

$$\frac{(x-r)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+r^2=(r+x)^2,$$

или

$$x^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2r\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)x+r^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=r\frac{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

или

$$x_{1,2}=r\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

936. При $R\neq r$, $R\geqslant\frac{r}{4}$

$$x_{1,2}=\frac{Rr\left(\sqrt{4R-r}\pm\sqrt{3r}\right)^2}{4(R-r)^2}.$$

937. Решается аналогично задаче 933.

Ответ: $\alpha=2\arcsin\frac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}$ при $\frac{1}{4}<m<1$.

938. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры указанных шаров, а точка O — центр сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

Поскольку каждая из внутренних сфер касается охватывающей сферы, то центр последней лежит на пересечении продолжений отрезков, соединяющих точки ее касания с внутренними сферами и центры этих сфер. Поэтому $OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = R - r$, где R — радиус искомой сферы. Итак, точка O равноудалена от центров всех четырех сфер. Значит, величина $(R - r)$ является радиусом сферы, описанной вокруг правильного тетраэдра с вершинами в центрах данных четырех сфер и имеющего ребро, равное $2r$. Поэтому можно написать

$$R - r = 2 \cdot r \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Откуда находим

$$R = \frac{\sqrt{6}+2}{2} r.$$

939. Указание. Для решения задачи удобно провести сечение конуса, проходящее через высоту конуса и центр одного из шаров, лежащих на его основании. Удобно также рассмотреть правильный тетраэдр с вершинами в центрах шаров и боковым ребром, равным $2r$. Ребро этого тетраэдра параллельно образующей конуса.

Ответ:

$$r\left(1 + \sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right).$$

940. Пусть в шар, радиус которого обозначим через R, вписан прямой круговой цилиндр с радиусом основания r.

Рассмотрев сечение шара, проходящего через высоту цилиндра, найдем высоту последнего

$$H = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Теперь можно написать

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \frac{4\pi R^2}{2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

или

$$2 = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{R}{r}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Найдем отношение объема шара к объему цилиндра

$$\frac{V_{ш}}{V_{ц}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 H}=\frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3\,2\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2-1}}=\frac{16}{9}.$$

Искомое отношение равно 16:9.

941. Указание. Удобно рассмотреть сечение, проходящее через центр шара и точки его касания с основаниями усеченного конуса.

942. Так как три шара имеют одинаковые радиусы и лежат на нижнем основании цилиндра, то их центры O_1, O_2, O_3 (рис. 134) находятся в одной плоскости π, параллельной плоскости основания цилиндра. Поскольку четвертый шар касается боковой поверхности цилиндра и верхнего основания, то его радиус равен радиусу основания цилиндра R.

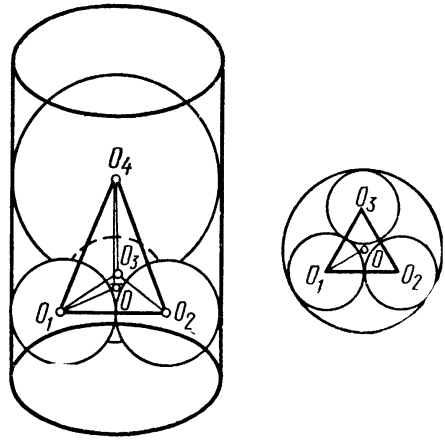


Рис. 134

Центр шара O_4 лежит на оси цилиндра и проектируется в точку O, центр сечения цилиндра плоскостью π. Это сечение представлено отдельно на рис. 134. Легко усмотреть, что искомая высота цилиндра $H=r+h+R$, где $h=OO_4$.

Рассмотрим пирамиду $O_4O_1O_2O_3$. Очевидно, что эта пирамида правильная ($O_1O_2=O_2O_3+O_3O_1=2r$, по условию: $O_1O_4=O_2O_4=O_3O_4=R+r$, так как четвертый шар касается трех нижних). Следовательно, вершина пирамиды точка O_4 проектируется в центр треугольника $\triangle O_1O_2O_3$. Теперь легко подсчитать, что $OO_1=2\sqrt{3}/3r$ и $R=OO_1+2=(3+2\sqrt{3})/3r$ (рис. 134). Величину h определим из прямоугольного треугольника $\triangle OO_1O_4$:

$$h=\sqrt{O_1O_4^2-OO_1^2}=\sqrt{(R+r)^2-\frac{4}{3}r^2}=\frac{2}{3}r\sqrt{9+6\sqrt{3}}.$$

Окончательно находим

$$H=\frac{2}{3}r\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{9+6\sqrt{3}}\right).$$

943. В сечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, получается равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной образующей конуса. Пусть l — образующая конуса, α — угол при вершине сечения. Тогда площадь сечения конуса определяется формулой

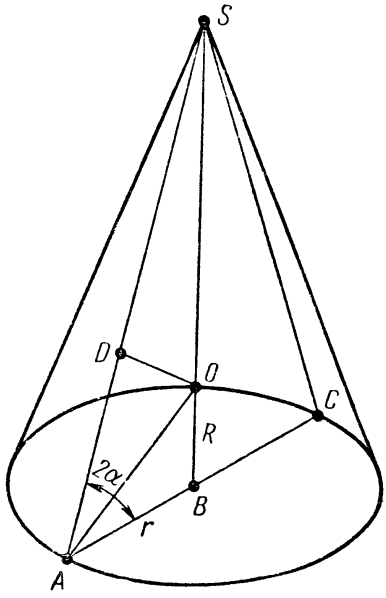


Рис. 135

$$S=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha.$$

Ясно, что в том случае, когда угол при вершине конуса φ не больше $\frac{\pi}{2}$, выполняются неравенства

$$0<\alpha\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\text{ и }\sin\alpha<\sin\varphi.$$

В этом случае максимальное сечение — осевое. Если $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$, т. е. угол при вершине конуса тупой, то максимальной будет площадь того сечения, у которого $\sin\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{cases}\frac{1}{2}l^2=2\cdot\frac{1}{2}\cdot l^2\sin\varphi,\\ \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\sin\varphi=\frac{1}{2},\text{ т. е. }\varphi=\frac{5\pi}{6}.$$

944. Проведем сечение через высоту конуса (рис. 135). Очевидно, что центр вписанного шара лежит в точке пересечения высоты конуса SB и биссектрисы AO угла SAC. Используя подобие отсекаемой линией касания поверхности и боковой поверхности конуса, найдем, что искомое отношение равно $\left(\frac{DS}{AS}\right)^2$. Пусть R — радиус вписанного

шара, r — радиус основания конуса. Тогда из условия задачи следует

$$4\pi R^2 = \pi r^2, \text{ т. е. } \frac{R}{r} = \frac{1}{2}.$$

Обозначая угол SAB через 2α, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{r} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Тогда

$$AS = AB/\cos 2\alpha = \frac{5}{3}r;$$

$$DS = AS - AD = \frac{2}{3}r; \quad \frac{DS}{AS} = \frac{2}{5}, \text{ т. е. } \left(\frac{DS}{AS}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

Искомое отношение равно 4:25.

945. $R = \frac{l}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

946. Обозначим через R радиус основания конуса, S — вершина конуса, O — центр основания (рис. 136). Прежде

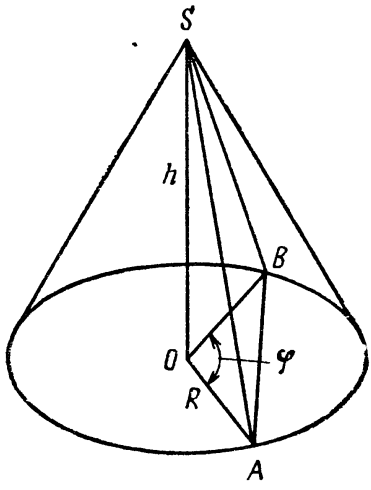


Рис. 136

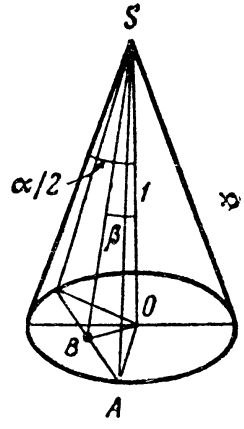


Рис. 137

всего ясно, что угол при вершине данного конуса больше или равен $\frac{\pi}{2}$, так как в противном случае никакие две образующие конуса не являются взаимно перпендикулярными.

Пусть SA и SB две взаимно перпендикулярные образующие конуса, так что $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$. Из прямоугольного треугольника ASB находим, что $AB = \sqrt{2(R^2+h^2)}$. Используя „теорему косинусов" для нахождения угла $AOB = \varphi$ в треугольнике AOB, получаем

$$2R^2(1-\cos\varphi) = 2(R^2+h^2).$$

Откуда находим

$$\cos\varphi = -\frac{h^2}{R^2};\quad \varphi = \arccos\left(-\frac{h^2}{R^2}\right).$$

Для справедливости этого необходимо, конечно, чтобы выполнялось неравенство $h \leqslant R$, которое равносильно условию, что угол при вершине конуса тупой.

Дуга меньшей части окружности определяется по формуле

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = R\varphi = \frac{1}{3}\cdot 2\pi R$$

или

$$R\arccos\left(-\frac{h^2}{R^2}\right) = \frac{1}{3}\cdot 2\pi R.$$

Отсюда находим

$$-\frac{h^2}{R^2} = -\frac{1}{2};\quad \frac{h}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad R = \sqrt{2}h.$$

Объем конуса равен:

$$V = \frac{2\pi}{3}h^3.$$

947. $\frac{\pi l^3}{3\sqrt{3}}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

948. Указание. Решается аналогично задаче 945. Ответ:

$$\alpha = 2\arcsin(\sqrt[3]{2}-1).$$

949. Не нарушая общности, можно считать высоту конуса равной 1. Тогда радиус окружности, лежащей в основании конуса, равен $OA = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а расстояние от центра O окружности, лежащей в основании конуса до прямой, по которой указанная в условии секущая плоскость пересе-

кает основание конуса, равно $OB=\operatorname{tg}\beta$. Так как $\angle OBA=\frac{\pi}{2}$, то

$$AB=\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

Пусть S — вершина конуса, а x — искомый угол. Тогда $\angle ASB=\frac{x}{2}$, и так как $SB=\frac{1}{\cos\beta}$, то (рис. 137).

950. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{AB}{BS}=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

951. $\frac{\pi b^3}{9\sqrt{3}}$.

952. Пусть $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, S — вершина, O — центр основания, K — середина высоты (рис. 138). Сечение проводится через точку K параллельно грани ASF.

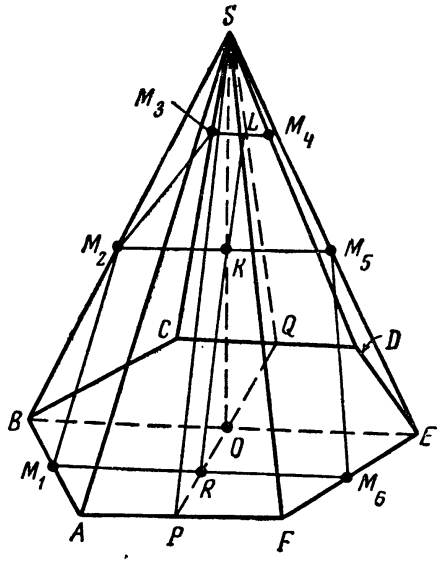


Рис. 138

Для того чтобы построить сечение, о котором идет речь, поступим следующим образом. В треугольнике PSQ (SP и SQ — апофемы граней ASF и CSD соответственно) через середину высоты SO проведем прямую $RL\parallel PS$ (L — точка грани CSD). Через точку R проведем прямую $M_1M_6\parallel AF$. Плоскость, проходящая через прямые M_1M_6 и RZ, есть искомая плоскость. Ясно, что она параллельна грани ASF. Плоскость сечения пересекается с гранью ASB по прямой $M_1M_2\parallel AS$, а с гранью ESF — по прямой, $M_6M_5\parallel FS$. Проводя в грани CSD через точку L прямую $M_3M_4\parallel CD$, получим сечение $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Очевидно также, что $M_2M_5\parallel M_1M_6$.

Площадь сечения удобнее всего вычислить как сумму площадей двух равнобочных трапеций $M_1M_2M_5M_6$, $M_2M_3M_4M_5$.

Пусть сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро b. Тогда из условия задачи следует, что

$$a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=2S.$$

Прежде всего ясно, что R — середина PO (так как KR — средняя линия $\triangle OPS$). Отсюда следует, что $KR\perp M_1M_6$ и $KR\perp M_2M_5$, а также соотношения $KR=\frac{1}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$; $M_1M_6=\frac{3a}{2}$; $M_2M_5=a$. Площадь трапеции $M_1M_2M_5M_6$ находится по формуле

$$S_1=\frac{M_2M_5+M_1M_6}{2}\cdot KR=\frac{5a}{8}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{5S}{4}.$$

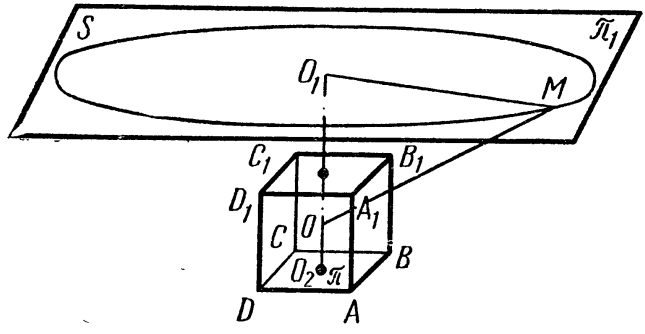


Рис. 139

Для нахождения площади трапеции $M_2M_3M_4M_5$ найдем M_3M_4. Для этого заметим, что $\triangle QRL\sim\triangle QPS$ с коэффициентом подобия $QR/QP=3/4$. Поэтому $M_3M_4=\frac{1}{4}CD=\frac{1}{4}a$. Далее, из подобия этих треугольников следует

$$RL=\frac{3}{4}PS.$$

Поскольку $RK=\frac{1}{2}PS$, то $KL=\frac{1}{4}PS=\frac{1}{4}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$. Площадь трапеции $M_2M_3M_4M_5$ находится по формуле

$$S_2=\frac{M_2M_5+M_3M_4}{2}\cdot KL=\frac{5a}{32}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{5}{16}S.$$

Площадь сечения находится как сумма S_1+S_2.

Ответ: $\frac{25}{16}S$.

953. $R=\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

954. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 139), ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости π основания $ABCD$.

Пусть точка O — центр куба. Тогда все точки M, удовлетворяющие условию задачи, находятся на окружности S, лежащей в плоскости π_1, параллельной плоскости π и отстоящей от плоскости π на расстоянии $2h$. Центр O_1 этой окружности является проекцией на плоскость π_1 центра O куба, а радиус r окружности S определяется соотношением

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{3h}{2}\right)^2},$$

и так как $R>3h$, то

$$r>\sqrt{9h^2-\left(\frac{3h}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}h.$$

Ясно, что если мы из точки M проведем прямые, соединяющие ее со всеми точками куба, то все точки пересечения этих прямых с плоскостью π и дадут тень, отбрасываемую кубом. При этом включим в тень и квадрат $ABCD$, лежащий в основании.

Для построения тени достаточно провести лишь прямые, соединяющие точку M с вершинами куба, и найти точки их пересечения с плоскостью π; соединив эти точки прямыми, получим контур тени.

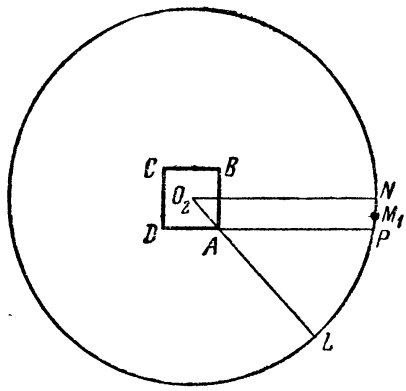


Рис. 140

Спроектируем окружность S на плоскость π; получим (рис. 140) окружности S_1 радиуса r, внутри которой находится квадрат $ABCD$ со стороной h. Центром O_2 окружности S_1 является проекция центра O куба на плоскость π.

Пусть K_1 — произвольная точка пространства, отстоящая от плоскости π на расстояние, равное h. Обозначим через K ее прямоугольную проекцию на плоскости π, а через K_2 —

проекцию точки K_1 из точки M на плоскость π. Тогда $M_1K_2 = 2M_1K$, где M_1 — прямоугольная проекция точки M на плоскость π (рис. 141).

Пусть A_2, B_2, C_2, D_2 — проекции точек A_1, B_1, C_1, D_1 из точки M на плоскость π; на основании сделанного замечания имеем $A_2M_1 = 2AM_1$, $B_2M_1 = 2BM_1$; $C_2M_1 = 2CM_1$, $D_2M_1 = 2DM_1$.

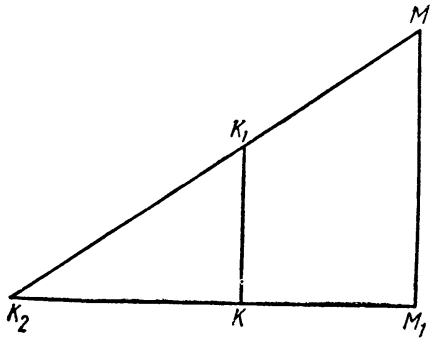


Рис. 141

Обозначим через N точку пересечения окружности S с прямой, проходящей через точку O_2 параллельно прямой DA, а через L — точку пересечения окружности S с прямой O_2A (рис. 142). Достаточно рассмотреть тень лишь тогда, когда точка находится на дуге NL окружности S.

Обозначим через P точку пересечения окружности S с прямой DA. Рассмотрим два случая: 1°. точка M_1 находится на дуге PN; 2°. точка M_1 находится на дуге PL.

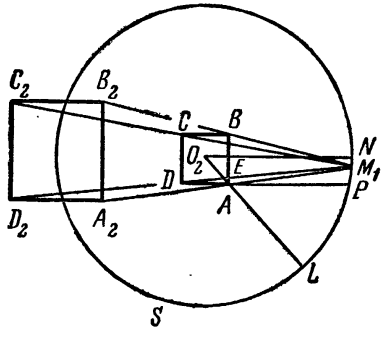


Рис. 142

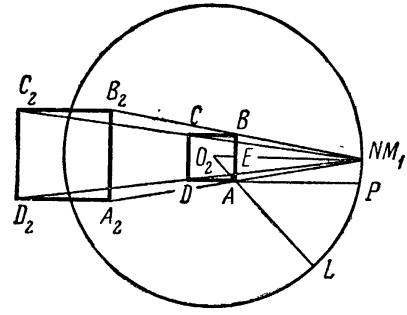


Рис. 143

1°. Пусть точка M_1 находится на дуге PN. Выясним, при каком положении точки M_1 тень будет наибольшей. Если точка M_1 не совпадает с точкой P, то тенью является шестиугольник $AA_2D_2C_2B_2B$. Поэтому $B_2C_2 = A_2D_2 = C_2D_2 = 2h$ и, кроме того, $A_2D_2 \parallel AD$, $B_2C_2 \parallel BC$, $D_2C_2 \parallel DC$; соединив точки A_2 и B_2, получим, что тень состоит из квадрата $A_2B_2C_2D_2$ со стороной $2h$ и трапеции AA_2B_2B

с основаниями h и $2h$ и высотой, равной расстоянию от точки M_1 до прямой AB.

Наибольшей эта высота будет тогда, когда точка M_1, перемещаясь по дуге PN, совпадет с точкой N, т. е. когда прямая M_1O_2 будет перпендикулярна ребру AB (рис. 143). Значит, когда точка M_1 движется по дуге NP от N к P, площадь тени уменьшается и принимает наи-

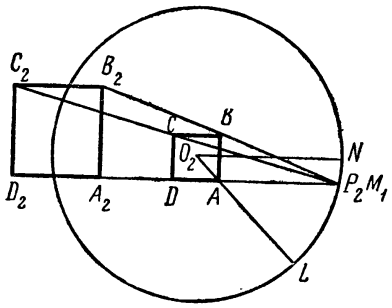


Рис. 144

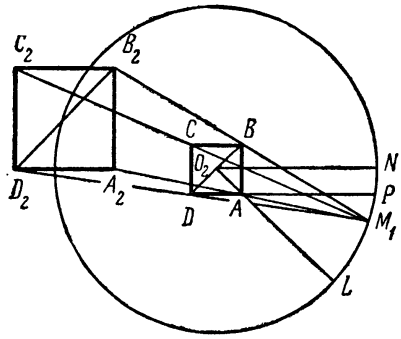


Рис. 145

меньшее значение, когда точка M_1 совпадает с точкой P. В этом случае тенью будет пятиугольник $AD_2C_2B_2B$ (рис. 144), но его площадь также может быть найдена как площадь квадрата $A_2B_2C_2D_2$ со стороной $2h$ и трапеции AA_2B_2B с основаниями h и $2h$ и высотой, равной расстоянию от точки P до прямой AB.

2°. Посмотрим, как будет изменяться площадь тени, если точка M_1 движется по дуге PL. В этом случае тень $ABB_2C_2D_2D$ (рис. 145) состоит из двух прямоугольных треугольников (ABD со стороной h и $B_2C_2D_2$ со стороной $2h$) и трапеции BB_2D_2D, основания которой $h\sqrt{2}$ и $2h\sqrt{2}$, а высота равна расстоянию от точки M_1 до прямой BD. Из точек дуги PL наиболее удаленной от прямой DB является точка L (рис. 145).

Для того чтобы найти наибольшую тень, остается сравнить площади двух теней, отбрасываемых точкой M на плоскость π в тех случаях, когда точка M_1 совпадает либо с точкой N, либо с точкой L. Пусть точка M_1 совпадает с точкой N (см. рис. 143). В этом случае тень состоит из квадрата $A_2B_2C_2D_2$ с площадью $4h^2$ и трапеции ABB_2A_2 с площадью $\frac{3}{2}h\ NE$ (E — проекция точки N на

прямую AB). Так как $NE = NO_2 - O_2E = r - \frac{h}{2}$, то площадь тени равна

$$4h^2 + \frac{3}{2}h\left(2 - \frac{h}{2}\right) = \frac{13}{4}h^2 + \frac{3}{2}hr.$$

Пусть теперь точка M_1 совпадает с точкой L (рис. 146). В этом случае тень состоит из треугольника ABD с площадью $\frac{1}{2}h^2$, треугольника $B_2C_2D_2$ с площадью $2h^2$ и трапеции BB_2D_2D с площадью $\frac{BD + B_2D_2}{2} LO_2$.

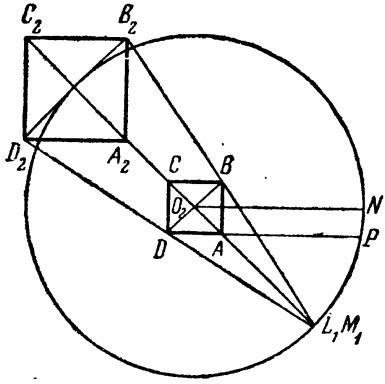


Рис. 146

Так как $LO_2 = r$, $BD = h\sqrt{2}$, $B_2D_2 = 2h\sqrt{2}$, то площадь тени равна

$$\frac{h^2}{2} + 2h^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}hr = \frac{5}{2}h^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}hr.$$

Теперь сравним две эти площади. Составим разность площадей и преобразуем ее последовательно:

$$\frac{5}{2}h^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}hr - \left(\frac{13}{4}h^2 + \frac{3}{2}hr\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}3hr = \frac{3h}{2}(\sqrt{2}-1)\left(r - h\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).$$

Выше было доказано, что $r > \frac{3\sqrt{3}}{2}h$. Но так как

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}h < \frac{3\sqrt{3}}{2}h,$$

то

$$r - h\frac{\sqrt{2}+1}{2} > 0,$$

значит,

$$\frac{5}{2}h^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}hr - \left(\frac{13}{4}h^2 + \frac{3}{2}hr\right) > 0.$$

Таким образом, наибольшая площадь тени будет тогда, когда точка M_1 совпадает с точкой L.

Остается заметить, что точка L, центр O куба и его вершина A лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости основания.

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ

1°. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений

954. a) Поскольку коэффициент при x^2 положителен, то данная функция имеет минимум и не имеет максимума. Наименьшее значение функция принимает при $x=\frac{3}{5}$ и $y_{\min}=-\frac{9}{5}$.

b) Функция имеет максимум $y_{\max}=4$ при $x=2$; минимума нет.

c) Квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, имеет комплексные корни, поэтому функция определена при любых действительных x. Легко видеть, что трехчлен x^2+x+1 имеет минимум, равный $^3/_4$, и не имеет максимума. Отсюда следует, что исходная функция имеет максимум, равный $^4/_3$, и не имеет минимума.

d) Данная функция четная, поэтому ее достаточно исследовать при $x\geqslant 0$. Знаменатель $2-x^2$ обращается в нуль при $x=\sqrt{2}$. В окрестности этой точки наша функция будет неограниченной, т. е. не будет иметь максимума.

При изменении x от 0 до $\sqrt{2}$ функция возрастает от $\frac{1}{2}$ до бесконечности: $\frac{1}{2}\leqslant y<+\infty$. При изменении x от $\sqrt{2}$ до бесконечности функция возрастает от $-\infty$ до нуля: $-\infty<y<0$. В силу четности график функции симметричен относительно оси Oy и изображен на рис. 147. Отсюда следует, что при $|x|>\sqrt{2}$ функция не имеет ни максимума, ни минимума. При $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ функция имеет локальный минимум, равный $^1/_2$, при $x=0$.

e) Максимум, равный $\frac{8}{\sqrt{11}}$ при $x=\frac{3}{2}$; минимума нет.

955. Имеем

$$y=x^4-4x^2+5=(x^2-2)^2+1.$$

Отсюда следует, что функция имеет минимум, равный 1 при $x=\pm\sqrt{2}$, и локальный максимум, равный 5 при $x=0$. Нарисуйте график этой функции.

956. a) Максимум 2, минимум -2, b) максимум 5, минимум -5.

957. Вводя вспомогательный аргумент, преобразуем функцию к виду

$$y=3\sin 2x+4\cos 2x=\sqrt{9+16}\sin(2x+\alpha)=5\sin(2x+\alpha).$$

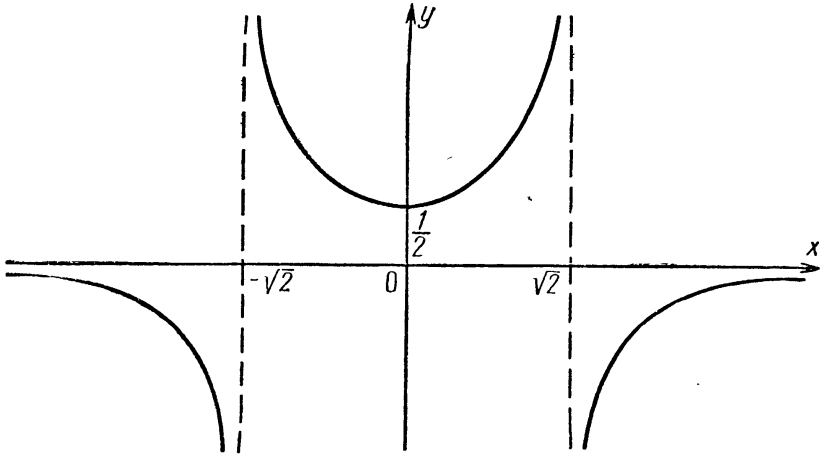


Рис. 147

Отсюда следует, что максимум равен 5, минимум -5.

958. Имеем

$$y=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=$$
$$=-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos 2x.$$

Ответ: $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$.

959. Указание: Вспомните свойства степени с неотрицательным показателем.

Ответ: Минимум 1, если $\sin x=0$; максимум 3 при $|\sin x|=1$.

960. Указание. Исследуйте функцию на монотонность. Ответ: a) Максимум 1 при $x=0$; минимума нет. Нарисуйте график функции.

b) Минимум 1 при $x=0$; максимума нет.

961. Поскольку $5^{\pi x}>0$ при любых x, имеем

$$5^{\pi x}+5^{-\pi x}=5^{\pi x}+\frac{1}{5^{\pi x}}\geqslant 2$$

(равенство имеет место при $5^{\pi x}=1$, т. е. $x=0$). Ответ: Минимум 2 при $x=0$, максимума нет.

962. а) Функция определена при любых x и ограничена снизу: $y\geqslant 0$. Исследуем множество значений функций $y=\frac{x^2}{x^4+1}$. Имеем

$$yx^4-x^2+y=0.$$

Это квадратное относительно x^2 уравнение имеет действительные неотрицательные решения, если его дискриминант

$$D=1-4y^2\geqslant 0,$$

откуда с учетом того, что $y\geqslant 0$, получаем

$$0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, $y_{\min}=0$ при $x=0$, $y_{\max}=\frac{1}{2}$ при $x=\pm 1$.

b) $y_{\min}=-\frac{1}{2}$ при $x=-1$; $y_{\max}=\frac{1}{2}$ при $x=1$.

963. а) В силу ограниченности косинуса функция $y=\cos x\cdot\cos 2x$ не превосходит 1, поскольку каждый из сомножителей не превосходит 1. Посмотрим, существуют ли такие значения x, при которых одновременно $\cos x=1$ и $\cos 2x=1$. Первое равенство выполняется при $x_1=2\pi n$, второе — при $x_2=\pi k$; $x_1=x_2$, т. е. $2\pi n=\pi k$ при $k=2n$. Итак, данная функция принимает наибольшее значение 1 в точках $x=2\pi n$ (n — любое целое число). Ответ: $y_{\min}=1$ при $x=2\pi n$.

b) Легко убедиться, что рассуждения предыдущей задачи здесь не дают решения, поскольку не существует значений x, при которых одновременно $\sin x=1$ и $\sin 2x=1$ (проверьте!).

Используя формулу „синус двойного угла“, преобразуем данную функцию к виду:

$$y=f(x)=\sin x\cdot\sin 2x=2\cos x\cdot\sin^2 x=2\cos x(1-\cos^2 x)=$$
$$=2(t-t^3),$$

где $t=\cos x$ и, следовательно, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Исследуя знак многочлена $y_1=t-t^3=t(1-t^2)$, получим, с учетом ограничений $-1\leqslant t\leqslant 1$, что функция $y_1=t(1-t^2)$ имеет отрицательное значение, если $-1\leqslant t<0$; при $0\leqslant t\leqslant 1$ принимает неотрицательное значение (большее или равное нулю). Следовательно, наибольшее значение функция может принимать в промежутке $0<t<1$.

Найдем максимум функции y_1 (значит, и исходной функции), исследуя множество ее значений. Для удобства введем функцию $y_2 = -y_1 = t^3 - t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и получим для нее оценку снизу, определив тем самым минимум этой функции (и, значит, максимум y_1).

Легко показать, что для любого $z \geqslant -1$ справедливо неравенство

$$(1+z)^3 \geqslant 1+3z. \tag{1}$$

Причем равенство имеет место при $z=0$. Действительно, по теореме о средних $(n=3)$ имеем:

$$(1+3z)^{1/3} = \sqrt[3]{(1+3z)\cdot 1\cdot 1} \leqslant \frac{(1+3z)+1+1}{3} = 1+z$$

(равенство, если $1+3z=1$, т. е. $z=0$), откуда и следует неравенство (1). Полагая в соотношении (1) $1+z=y$, перепишем его в виде

$$\begin{gathered} y^3 \geqslant 1+3(y-1), \\ y^3 - 3y \geqslant -2. \end{gathered} \tag{2}$$

(знак равенства при $y=1$). Чтобы из неравенства (2) получить оценку для функции $y_2 = t^3 - t$, умножим обе его части на некоторое число $c^3 > 0$:

$$(cy)^3 - 3c^2(cy) \geqslant -2c^3.$$

Полагая в последнем неравенстве

$$t = cy, \quad 3c^2 = 1, \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

окончательно получим

$$t^3 - t \geqslant -\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

причем равенство имеет место при $y=1$, т. е. $t = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Итак, мы показали, что функция $y_2 = t^3 - t$ принимает наименьшее значение при $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В этой же точке исходная функция достигает наибольшего значения

$$y_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $y_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ при $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

964. а) Исследуем множество значений данной функции

$$y=\frac{-2x+3}{x^2+6x+10}. \qquad (1)$$

Функция определена при любых x, поскольку знаменатель $x^2+6x+10\neq 0$ (квадратный трехчлен $x^2+6x+10$ имеет комплексные корни). Умножив обе части соотношения (1) на знаменатель, получим:

$$yx^2+2(3y+1)x+10y-3=0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет действительные решения, если его дискриминант

$$D=(3y+1)^2-y(10y-3)\geqslant 0. \qquad (2)$$

Решения этого неравенства и определяют множество значений исходной функции (1). Из (2) имеем:

$$y^2-9y-1\leqslant 0,$$

$$\frac{9-\sqrt{85}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{9+\sqrt{85}}{2}.$$

Итак, наименьшее значение функции $y_{\min}=\frac{9-\sqrt{85}}{2}$ при $x=\frac{3+\sqrt{85}}{2}$, а наибольшее значение $y_{\max}=\frac{9+\sqrt{85}}{2}$ при $x=\frac{3-\sqrt{85}}{2}$.

b) $y_{\max}=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ при $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$,

$y_{\min}=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ при $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

965. Указание. Функция $y=\sqrt[4]{\left[\frac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^3}$ определена лишь при тех значениях x, для которых $y_1=\frac{12x(x-a)}{x^2+36}\geqslant 0$, т. е. $x(x-a)\geqslant 0$, и принимает экстремальные значения одновременно с функцией $y_1\geqslant 0$. Для определения экстремума функции y_1 исследуйте множество ее значений. Ответ: $y_{\min}=0$, $y_{\max}=\sqrt[4]{(6+\sqrt{a^2+36})^3}$

966. Обозначив $\sin x=t$, перепишем данную функцию в виде

$$y=-\cos^2 x-5\sin x+7=-(1-\sin^2 x)-5\sin x+7=$$
$$=t^2-5t+6.$$

Итак, требуется найти экстремум квадратного трехчлена $y=f(t)=t^2-5t+6$ при $-1\leqslant t\leqslant 1$ (поскольку $|\sin x|\leqslant 1$ при любых x). График этого квадратного трехчлена представлен на рис. 148. Легко видеть, что на отрезке $[-1, 1]$ наименьшее значение функции $y_{\min}=f(1)=2$, а наибольшее значение — $y_{\max}=f(-1)=12$.

Ответ: $y_{\min}=2$, если $\sin x=1$, т. е. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

$y_{\max}=12$, если $\sin x=-1$, т. е. $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi n$.

967. Данную функцию удобно представить в виде

$$y=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}=1+\frac{1}{x^2+2x+2}=1+\frac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Наименьшее значение функции $y_1=(x+1)^2+1$, стоящей в знаменателе, равно 1 при $x=-1$. При этом же значении x исходная функция y достигает максимума. Ответ: $y_{\max}=2$ при $x=-1$.

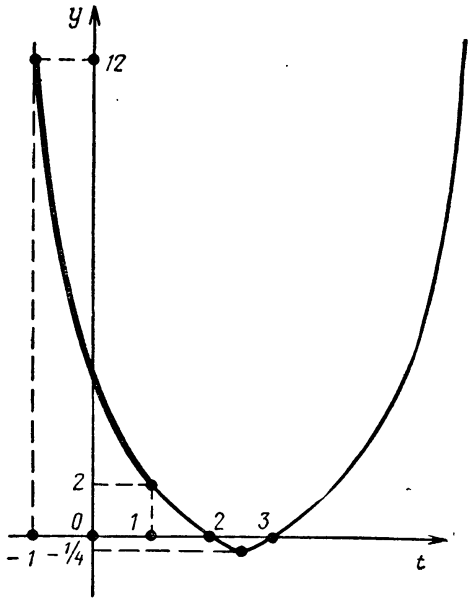


Рис. 148

968. Используя свойства логарифмов, преобразуем исследуемую функцию следующим образом:

$$y=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot$$
$$\times\log_2\frac{8}{x}=\log_2^4 x+12\log_2^2$$
$$x(3-\log_2 x)=t^4+$$
$$+12t^2(3-t)=t^2(t^2-$$
$$-12t+36)=t^2(6-t)^2,$$

где введено обозначение $t=\log_2 x$.

С учетом ограничения на аргумент x: $1\leqslant x\leqslant 64$, имеем

$$\log_2 1\leqslant t\leqslant\log_2 64 \text{ или } 0\leqslant t\leqslant 6.$$

Тогда задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y=t^2(6-t)^2$ при $0\leqslant t\leqslant 6$. Эта функция принимает наибольшее значение одновременно с функцией

$y_1=\sqrt{y}=t(6-t)$ ($y_1\geqslant 0$ при условии $0\leqslant t\leqslant 6$). Имеем:

$$y_1=t(6-t)=-t^2+6t=-(t-3)^2+9,$$

отсюда $(y_1)_{\max}=9$ при $t=3$.

А тогда максимум исходной функции равен $y_{\max}=81$ и достигается при $t=3$, т. е. при $\log_2 x=3$, $x=8$.

Ответ: $y_{\max}=81$ при $x=8$.

969. При заданных ограничениях на параметры a и b ($a>0$, $b>0$) функция $y=\frac{x}{ax^2+b}$ принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные — при $x<0$. Поэтому наибольшее значение может достигаться лишь при $x\geqslant 0$. Применяя тогда теорему о средних ($n=2$), получим

$$\frac{ax^2+b}{2}\geqslant\sqrt{ax^2\cdot b}=x\sqrt{ab}, \qquad (1)$$

причем равенство имеет место при условии

$$ax^2=b.$$

Следовательно, для всех $x\geqslant 0$ из (1) имеем:

$$y=\frac{x}{ax^2+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Отсюда следует, что наибольшее значение функции равно $y_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ и достигается при $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Замечание. Отметим, что тот же результат можно получить и другим путем, например исследуя множество значений функции.

970. Указание: задача решается аналогично предыдущей исследованием множества значений функции или использованием теоремы о средних.

В последнем случае удобно выполнить преобразования

$$y=\frac{1+x^2}{1+x}=x-1+\frac{2}{1+x}=-2+\left(1+x+\frac{2}{1+x}\right)$$

и далее применить теорему о средних (условие $x\geqslant 0$ позволяет сделать это):

$$1+x+\frac{2}{1+x}\geqslant 2\cdot\sqrt{(1+x)\cdot\frac{2}{1+x}}=2\sqrt{2}.$$

Ответ: $y_{\min}=-2+2\sqrt{2}$ при $x=\sqrt{2}-1$.

971. а) Используя тождество

$$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=\sin^6 x+\cos^6 x+$$
$$+3\sin^2 x\cdot\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^6 x+\cos^6 x+$$
$$+\frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

преобразуем данную функцию к виду

$$y=\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Ответ: $y_{\max}=1$, а $y_{\min}=\frac{1}{4}$ (ибо $0\leqslant\sin^2 2x\leqslant 1$).

b) В результате простых преобразований получаем

$$y=1-\cos 2x+2(1+\cos 2x)+3\sin 2x=3+3\sin 2x+\cos 2x.$$

Вводя вспомогательный аргумент $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, будем иметь:

$$y=3+\sqrt{9+1}\cdot\sin(2x+\alpha)=3+\sqrt{10}\cdot\sin(2x+\alpha).$$

Следовательно, наибольшее значение функции $y_{\max}=3+\sqrt{10}$, если $\sin(2x+\alpha)=1$, а наименьшее равно

$$y_{\min}=3-\sqrt{10},\text{ если }\sin(2x+\alpha)=-1.$$

972. Вводя вспомогательный аргумент, преобразуем данную функцию к виду:

$$y=(\sin x+\cos x)^3+\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=2\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Функция $y_1=\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ принимает наименьшее значение, равное -1, если $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$, или $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi k$. Легко убедиться, что при том же значении x функция

$$y_2=\frac{1}{\sin^2 2x}=\frac{2}{1-\cos 4x}=\frac{2}{1-\cos\left[4\left(\frac{5}{4}\pi+2\pi k\right)\right]}=\frac{2}{1-\cos\pi}=1,$$

т. е. тоже принимает наименьшее значение.

Следовательно, при $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi k$ (k — любое целое число) и исходная функция имеет минимум, равный

$$y_{\min}=-2\sqrt{2}+4.$$

973. Преобразуем данное выражение к виду

$$\varphi = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} = (x^2 - y^2)^2 + 2\left(x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right).$$

Используя следствие из теоремы о средних: при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ $(a = x^2y^2)$, получим

$$\varphi \geqslant (x^2 - y^2)^2 + 4. \qquad (1)$$

Причем знак равенства выполняется при условии

$$x^2y^2 = 1. \qquad (2)$$

Первая часть соотношения (1) будет наименьшей, если $x^2 = y^2$ или, с учетом условия (2), $x^2 = 1$, $y^2 = 1$. Итак, наименьшее значение выражения равно $\varphi_{\min} = 4$ при $|x| = 1$, $|y| = 1$.

974. а) Преобразуем функцию следующим образом:

$$y = [(x-1)(x-6)] \cdot [(x-2)(x-5)] + 9 =$$
$$= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) + 9 = (x^2 - 7x)^2 +$$
$$+ 16(x^2 - 7x) + 69 = (x^2 - 7x + 8)^2 + 5.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение функции $y_{\min} = 5$, если $x^2 - 7x + 8 = 0$, т. е. $x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

b) Ответ: $y_{\min} = -1$ при $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

975. а) Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) > 0$ и $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) > 0$ при $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{3}$, то по теореме о средних получим

$$A = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} \geqslant$$
$$\geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\cos 2\alpha - \cos\frac{2}{3}\pi}} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{2\cos 2\alpha + 1}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Из этой оценки следует, что наименьшее значение выражения равно $A_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

b) По теореме о средних ($n=3$) получим

$$B=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}, \qquad (1)$$

причем равенство имеет место, если

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Преобразуем знаменатель подкоренного выражения в соотношении (1). Имеем:

$$c=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Так как по условию $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и, следовательно,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2},$$

то получим

$$c=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad (3)$$

где равенство выполняется, если

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1. \qquad (4)$$

Уточняя далее оценку, из (3) найдем

$$c\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}. \qquad (5)$$

Здесь было использовано следствие из теоремы о средних: произведение двух положительных величин $\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)$ и $\sin\frac{\gamma}{2}$ при заданной сумме, равной 1, становится максимальным, если эти величины равны, т. е. $1-\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$ или $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$. Итак, знак равенства в соотношении (5) выполняется при условии

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}. \qquad (6)$$

А тогда, с учетом условий (2), получаем

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

откуда $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$. При этих значениях α, β, γ условие (4) выполняется автоматически. Поскольку из (5)

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant 8,$$

то неравенство (1) принимает вид

$$B=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{8}=6.$$

Здесь равенство имеет место при $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$. Итак, наименьшее значение данного выражения равно $B_{\min}=6$ при $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$, т. е. для правильного треугольника.

Задачи с геометрическим содержанием

976. Достроим треугольник $\triangle ABC$ (рис. 149) до параллелограмма $ABCE$. Как известно, в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей. Поэтому можно написать

$$M\equiv AC^2+BC^2=\frac{1}{2}\,(AB^2+CE^2)=\frac{1}{2}r^2+2CD^2.$$

Отсюда ясно, что сумма M будет максимальной, если

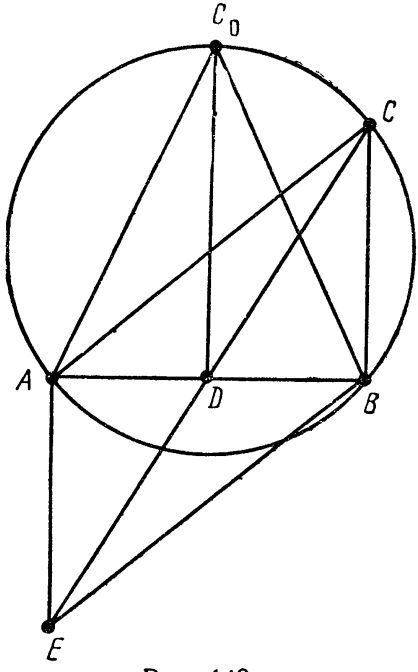


Рис. 149

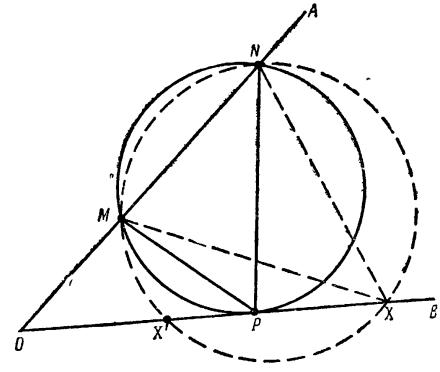


Рис. 150

будет максимальным отрезок CD, соединяющий середину отрезка AB с вершиной C. Отрезок CD будет наибольшим, очевидно, тогда, когда он будет перпендикулярен к AB, т. е. если $\triangle ABC$ будет равнобедренным (рис. 149).

Простой подсчет показывает, что это максимальное значение равно

$$M_{\max} = 2R(2R + \sqrt{4R^2 - r^2}).$$

Задача, очевидно, имеет единственное решение только тогда, когда длина отрезка $r < 2R$. Ибо, если $r = 2R$ (точки A и B являются концами диаметра окружности), то для любой точки окружности сумма $AC^2 + BC^2 = r^2$ будет постоянной. При $r > 2R$ задача теряет смысл.

977. Пусть MN — данный отрезок, X — переменная точка прямой OB (рис. 150). Требуется найти такое положение точки X на данной прямой OB, для которого угол $\angle MXN$ достигает своего максимума.

Решение начнем с исследования задачи. Довольно легко заметить следующее обстоятельство: если точка X не находится в положении максимума, то должна существовать другая точка X', по другую сторону от положения максимума, в которой рассматриваемый угол имеет то же самое значение. В силу известного свойства углов, вписанных в окружность, точки X и X' (если точка X' существует) должны находиться на одной и той же окружности, проходящей через точки M и N. Отсюда может возникнуть идея: провести несколько окружностей, проходящих через данные точки M и N. Если такая окружность пересекает прямую OB в двух точках (X и X' на рис. 150), то отрезок MN виден из обеих точек под одним и тем же углом ($\angle MXN = \angle MX'N$), но этот угол не является наибольшим возможным углом: окружность, пересекающая OB между X и X', дает бóльший угол. Возникает предположение, что вершина максимального угла есть точка, в которой окружность, проходящая через M и N, касается стороны угла OB (точка P на рис. 150). Докажем теперь, что точка P является искомой. Действительно, угол $\angle MPN$ измеряется половиной дуги $\overset{\frown}{MN}$, на которую он опирается. Пусть X — любая другая точка, лежащая на той же стороне угла OB вне окружности, проходящей через M, N и P. Тогда угол $\angle MXN$ будет измеряться полуразностью дуг, на которые, он опирается, т. е. угол $\angle MXN$ будет меньше $\angle MPN$. Так как последнее справедливо для любой точки X на OB, не совпадающей с P, то отсюда следует, что $\angle MPN$ является наибольшим.

Итак, для нахождения искомой вершины P максимального угла, нужно провести окружность через точки M и N так, чтобы она коснулась стороны OB данного угла $\angle AOB$; точка касания P будет искомой.

Для построения точки касания достаточно найти ее расстояние от вершины O заданного угла, для чего воспользуемся теоремой о том, что квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть, т. е. в нашем случае $OP^2=ON\cdot OM$. Теперь уже построение точки P очевидно: находим среднее геометрическое двух данных отрезков OM и ON, затем, отложив от вершины O на стороне OB угла этот отрезок, получаем искомую точку P.

978. Пусть S, L, r и l обозначают соответственно площадь, периметр, радиус и длину дуги сектора. Тогда

$$S=\frac{1}{2}r\cdot l,\quad L=2r+l.$$

По теореме о средних имеем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{l}{2}\right)\geqslant\sqrt{r\cdot\frac{l}{2}}=\sqrt{S},$$

причем равенство достигается, когда $l=2r$, т. е. угол сектора равен двум радианам. Итак, $L_{\min}=4\sqrt{S}$ при центральном угле $\alpha=2$.

979. Пусть a, b, c обозначают стороны треугольника, S — площадь, α — данный угол, противоположный стороне c. Тогда

$$2S=ab\sin\alpha.$$

Будем при решении использовать теорему о средних:

а) $$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}},$$

причем равенство достигается; когда $a=b$, т. е. когда треугольник равнобедренный. Итак, $(a+b)_{\min}=2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a=b$.

b) По теореме косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=a^2+b^2-4S\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда ясно, что минимум стороны c достигается одновременно с минимумом суммы a^2+b^2. Имеем:

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geqslant \sqrt{a^2b^2} = ab = \frac{2S}{\sin\alpha}.$$

Равенство достигается, и, таким образом, сумма a^2+b^2 (а значит, и c) имеет минимум, когда $a^2=b^2$, и треугольник равнобедренный.

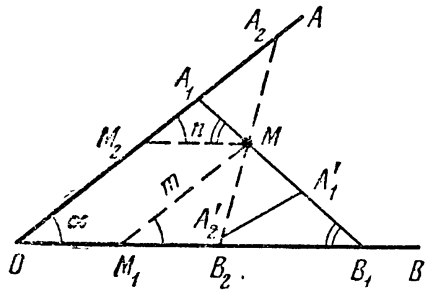


Рис. 151

Итак,

$$c^2_{\min} = \frac{4S}{\sin\alpha} - 4S\operatorname{ctg}\alpha = 4S\times$$

$$\times\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4S\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$c_{\min} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}} =$$

$$= 2\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \text{ при } a=b.$$

c) Поскольку и $a+b$ и c имеют минимум, когда треугольник равнобедренный, то и периметр $p=a+b+c$ имеет минимум при этом же условии.

Итак, $p_{\min} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a=b$.

980. Ответ: равнобедренный треугольник, а) площадь $S_{\max} = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, b) периметр $p_{\max} = a\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

981. а) Приведем два решения этой задачи: аналитическое и геометрическое.

I способ (аналитическое решение). Пусть A_1B_1 — произвольная прямая, проходящая через данную точку M (рис. 151). Воспользуемся обозначениями задачи ($a=A_1O$, $b=B_1O$, точка M лежит на стороне c). Проведем из точки M прямые $MM_2 \parallel OB_1$ и $MM_1 \parallel OA_1$; обозначим $MM_1=m$, $MM_2=n$; m и n заданы (фактически они являются косоугольными координатами точки M). Из подобия треугольников $\triangle A_1MM_2$ и $\triangle B_1MM_1$ найдем:

$$\frac{b-n}{m} = \frac{n}{a-m} \text{ или } \frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1.$$

Далее по теореме о средних получим:

$$\frac{1}{4}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\right]^2\geqslant\frac{mn}{ab}=\frac{mn\sin\alpha}{2S},$$

откуда $S\geqslant 2mn\sin\alpha$.

Равенство имеется в том и только в том случае, если

$$\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{1}{2};\ a=2m,\ b=2n$$

и данная точка M является серединой стороны $A_1B_1=c$. Итак, прямая, проведенная через точку M так, что отрезок ее A_1B_1 делится в этой точке пополам, отсекает от данного угла α треугольник наименьшей площади.

II способ (геометрическое решение). Проведем исследование задачи. Для определенности будем считать, что угол α — острый. Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — две прямые, проходящие через точку M (рис. 151). Сравним площади $\triangle OA_1B_1$ и $\triangle OA_2B_2$. Построим точки A_1' и A_2' так, что $A_1'M=MA_1$ и $A_2'M=MA_2$. Тогда, переходя от $\triangle OA_1B_1$ к $\triangle OA_2B_2$, мы уменьшаем площадь, поскольку отбрасываемая площадь, $\triangle MB_1B_2$ больше добавляемой площади $\triangle MA_1A_2=\triangle MA_1'A_2'$. Очевидно, такое уменьшение имеет место лишь в том случае, если точка M делит заключенный между сторонами угла отрезок A_1B_1 прямой на неравные части.

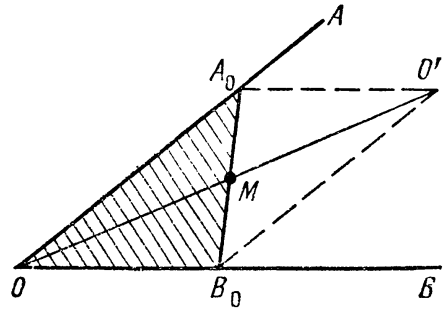


Рис. 152

Итак, через точку M нужно провести прямую так, чтобы выполнялось равенство $A_1M=MB_1$. В этом случае OM — медиана $\triangle OA_1B_1$.

Фактическое построение искомой прямой можно провести следующим образом. Продолжим прямую OM за точку M и отложим на ней $MO'=OM$ (рис. 152). Через точку O' проведем прямую, параллельную одной из сторон данного угла α, например BO, до пересечения с другой его стороной AO в точке A_0. Искомая прямая проходит через точки A_0 и M. Действительно, $A_0M=MB_0$ поскольку $OA_0O'B_0$ — параллелограмм.

b) Указание. Постройте точки, симметричные точке M относительно сторон угла, и соедините их прямой. Точки пересечения этой прямой со сторонами угла будут искомыми.

c) Указание. Задача сводится к задаче а). Искомая прямая должна делиться в точке M пополам.

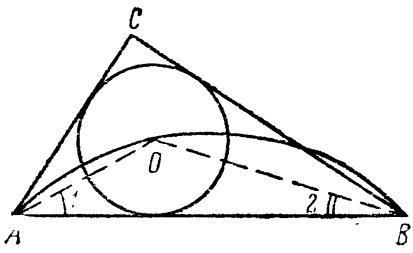


Рис. 153

982. I способ (аналитическое решение). Пусть a и b обозначают катеты треугольников, α — один из острых углов, r — радиус вписанной окружности, S — площадь, p — полупериметр. Тогда имеем

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cdot\cos\alpha,$$

$$r = r(\alpha) = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c} = c\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}. \qquad (1)$$

Теперь задача свелась к нахождению максимума функции $r = r(\alpha)$. Обозначим

$$\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = t,$$

$$0 < t \leqslant \sqrt{2} \text{ (ибо } \alpha\text{—острый угол)}, \qquad (2)$$

тогда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{t^2-1}{2}$ и равенство (1) запишется в виде

$$r = c\cdot\frac{t^2-1}{2(t+1)} = \frac{c}{2}(t-1).$$

Из (2) следует, что последнее выражение принимает наибольшее значение при $t = \sqrt{2}$, которое равно

$$r_{\max} = \frac{c}{2}(\sqrt{2}-1).$$

При этом $\alpha+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, т. е. треугольник равнобедренный.

II способ (геометрическое решение). Пусть $\triangle ABC$ — один из множества прямоугольных треугольников с общей гипотенузой c (рис. 153), O — центр вписанной окружности. Поскольку точка O лежит на пересечении биссектрис углов A и B $\triangle ABC$, то имеем

$$\angle 1+\angle 2 = \frac{1}{2}(\angle A+\angle B) = \frac{\pi}{4}, \quad \angle AOB = \pi-\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi,$$

т. е. для любого из указанных треугольников гипотенуза c видна из центра O вписанной окружности под одним и тем же углом $\frac{3}{4}\pi$. Другими словами, геометрическим местом центров искомых окружностей (ГМЦ) является дуга окружности, из точек которой гипотенуза видна под углом $\frac{3}{4}\pi$.

Радиус вписанной окружности в каждый прямоугольный треугольник есть расстояние соответствующей точки *ГМТ* центров до гипотенузы. Ясно, что середина этой дуги находится от гипотенузы на наибольшем расстоянии.

Легко показать далее, что окружность этого радиуса вписывается в равнобедренный треугольник с данной гипотенузой c (докажите!).

983. Пусть a, b, c и d обозначают данные сторон четырехугольника, α и β — противоположные углы, S — его площадь. Тогда имеем

$$2S = ab\sin\alpha + cd\sin\beta,$$

$$\begin{aligned} 4S^2 &= a^2b^2\sin^2\alpha + c^2d^2\sin^2\beta + 2abcd\sin\alpha\sin\beta = \\ &= a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd\sin\alpha\sin\beta - \\ &\quad -(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta). \end{aligned} \qquad (1)$$

Записывая далее для диагонали четырехугольника, лежащей против углов α и β, теорему косинусов, получим

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) после преобразований найдем

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 2ab\,cd\cdot\cos(\alpha+\beta).$$

Отсюда следует, что $4S^2$ принимает наибольшее значение, когда значение $\cos(\alpha+\beta)$ минимально, т. е.

$$\cos(\alpha+\beta) = -1,\ \alpha+\beta = \pi.$$

А это означает, что около четырехугольника можно описать окружность.

984. Указание. Используйте теорему о средних.

Ответ: $S_{\max} = 11\,250$ достигается при сторонах 150 и 75.

985. Если в ΔABC ввести углы x и y (рис. 154), то по теореме синусов получим

$$AB + BC = 2R(\sin x + \sin y) = 4R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{x-y}{2} \quad (1)$$

$\left(\text{так как } \frac{AB}{\sin y}=\frac{BC}{\sin x}=2R\right)$.

Максимум выражения (1) достигается при $\cos\frac{x-y}{2}=1$, т. е. $x-y=0$. Поскольку $x+y=\pi-\alpha^2$, то $x=y=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, и, следовательно, $AB=BC$ (т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный с заданным углом α при вершине). Тогда искомые величины длин хорд суть

$$AB=BC=2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

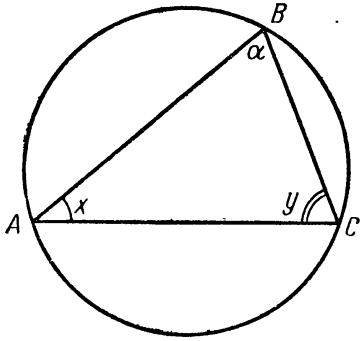


Рис. 154

986. Указание. Используйте теорему о средних.

Ответ: куб, ребро которого равно $\frac{1}{3}s$.

987. Указание. Введите следующие параметры: боковое ребро призмы h, гипотенузу x и острый угол α в основании. Тогда задача a) сведется к исследованию квадратного трехчлена относительно h. При решении задачи b) обозначьте

$$t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

и примите во внимание, что $0<t\leqslant\sqrt{2}$.

Ответ: a) $S_{\max}=\frac{l^2}{24}$ при $h=\frac{l}{6}$ и $x(1+t)=\frac{l}{4}$, b) $0<V\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\left(\frac{l}{4}\right)$.

988. Указание. Задача сводится к исследованию биквадратного трехчлена относительно длины ребра основания.

Ответ: $S_{\max}=\frac{Q}{2\sqrt{5}}$.

989. Указание. Обозначьте через x, y, z боковые ребра пирамиды (пусть ребро основания равно x), $yz=p$. Выразите x через y и z по теореме Пифагора и примените теорему о средних. Обратите внимание, что поскольку боковые ребра перпендикулярны друг к другу, то при вычислении объема пирамиды удобно принять за основание одну из боковых граней, тогда противоположное ей боковое ребро будет высотой пирамиды (почему?).

Ответ: a) $V_{\min}=\frac{p}{6}\sqrt{2p}$; b) $\sigma_{\min}=(2+\sqrt{2})\sqrt{p}$; c) $S_{\min}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+1)p$.

990. Четырехугольник $MNKL$, полученный в сечении пирамиды $SABC$, параллельном ребрам AB и SC (рис. 155), есть параллелограмм, так как $LK\|SC$ и $MN\|SC$; следовательно, $LK\|MN$ и, аналогично, $LM\|KN$. Обозначим для удобства ребра данной пирамиды $AB=a$, $AC=b$, $SC=c$ и пусть сторона сечения $KN=y$, $KL=z$, угол $\angle LKN=\alpha$ и отрезок $AK=x$. Тогда площадь сечения равна

$$S_{MNKL}=yz\sin\alpha.$$

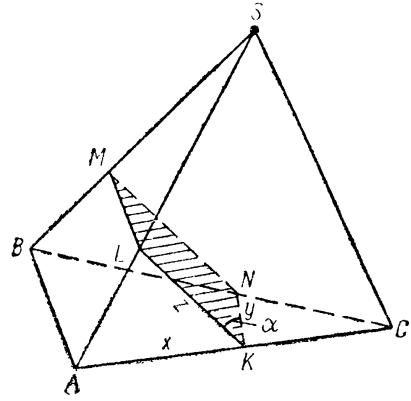


Рис. 155

Так как $\angle LKN$ равен углу между скрещивающимися прямыми AB и SC, то его синус есть величина постоянная для всех рассматриваемых параллельных сечений. Таким образом, площадь сечения зависит только от произведения yz. Из подобия треугольников (рис. 155) имеем

$$\frac{y}{a}=\frac{b-x}{b},\quad \frac{z}{c}=\frac{x}{b}.$$

Перемножая почленно последние равенства, получим

$$yz=\frac{ac}{b^2}x(b-x).$$

Отсюда следует, что произведение yz принимает наибольшее значение одновременно с квадратным трехчленом

$$x(b-x)=-x^2+bx=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4},$$

максимум которого достигается при $x=b/2$ и равен $b^2/4$. Итак, $S_{\max}=\frac{1}{4}a\operatorname{csin}\alpha$, и искомое сечение проходит через середины ребер AC, BC, AS и BS.

991. Пусть r — радиус данного шара, R и H — радиус и высота описанного конуса и отрезок $BM=x$ (рис. 156).

Из подобия треугольников BDC и ONB найдем

$$R=\frac{Hr}{BN}.$$

По свойству касательной и секущих имеем

$$BN^2=BD\cdot BM=H\cdot x,\quad BN=\sqrt{Hx}.$$

Тогда

$$R=\frac{Hr}{\sqrt{Hx}}=r\sqrt{\frac{H}{x}}=r\sqrt{\frac{2r+x}{x}}.$$

Объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{2r+x}{x}\cdot(2r+x)=\frac{\pi r^2(2r+x)^2}{3x}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2\left(4r+\frac{4r^2}{x}+x\right)\geqslant\frac{1}{3}\pi r^2\left(4r+2\sqrt{\frac{4r^2}{x}\cdot x}\right)=\frac{8}{3}\pi r^2$$

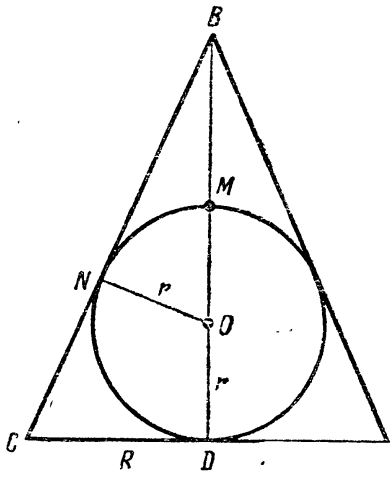


Рис. 156

(использовали теорему о средних), причем равенство выполняется, если $\frac{4r^2}{x}=x$, т. е. $x=2r$ и $H=2r+x=4r$. Итак, наименьший объем имеет конус, высота которого вдвое больше диаметра шара, и $V_{\min}=\frac{8}{3}\pi r^2$.

992. $S_{\max}=\frac{1}{2}\pi RH$ при $h=\frac{H}{2}$ (h — высота цилиндра).

993. Пусть N — число плиток, необходимое для облицовки внутренних стенок бортов бассейна; x — сторона ромба. Так как площадь каждого борта бассейна равна $0{,}5x$, то имеет

$$0{,}01N=4\cdot0{,}5x,\quad N=200x. \qquad (1)$$

Задача будет решена, если удастся найти то наименьшее значение, которое может принимать сторона ромба при заданной площади. Если α — острый угол ромба, то площадь его равна

$S=x^2\sin\alpha=450.$

Так как $0 < \sin\alpha \leqslant 1$, то отсюда найдем

$$x^2 = \frac{450}{\sin\alpha} \geqslant 450, \quad x \geqslant 3\sqrt{50},$$

причем $x = x_{\min} = 3\sqrt{50}$, если $\sin\alpha = 1$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и ромб является квадратом.

Теперь из равенства (1) получим

$$N = 200x \geqslant 600\sqrt{50} > 4000,$$

т. е. 4000 штук плиток недостаточно для облицовки бортов бассейна.

994. Не может.

995. Предварительно докажите, что из равенства боковых ребер пирамиды следует, что ее высота проходит через центр основания (точку пересечения диагоналей прямоугольника).

Пусть x, y и l соответственно, длины сторон основания и бокового ребра пирамиды; t *сек* — время, необходимое жуку для того, чтобы проползти по боковому ребру, $t = l/v = l$ ($v = 1$ *см/сек*). Согласно условию задачи, имеем

$$2(x+y) = 8, \quad x+y = 4. \qquad (1)$$

Для решения задачи достаточно определить минимум длины бокового ребра l пирамиды при заданном параметре основания (1). По теореме Пифагора найдем

$$l^2 = (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 2 + \frac{1}{4}[x^2 + (4-x)^2] =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 8) = 2 + \frac{1}{2}[(x-2)^2 + 4] \leqslant 4, \quad l \geqslant 2,$$

причем равенство имеет место, когда $x = 2$ и тогда из (1) $y = 2$. Тогда искомое время $t = l \leqslant 2$.

Итак, жуку хватит двух секунд для того, чтобы спуститься по ребру пирамиды на ее основание (потребуется ровно 2 секунды) тогда, когда пирамида правильная ($x = y = 2$).

996. Ответ: хватит, если длина x одной стороны каменной стены изменится в пределах $2(10 - \sqrt{10}) \leqslant x \leqslant 2(10 + \sqrt{10})$; при этом длина y одной из сторон деревянной стены изменяется в пределах $5(10 - \sqrt{10}) \leqslant y \leqslant 5(10 + \sqrt{10})$ (x и y из этих отрезков следует выбирать так, чтобы $xy = 900$).

997. Пусть длины сторон прямоугольника равны x и y. Тогда $x^2+y^2=25$. Вес листа фанеры вместе с весом проволоки, которой окантовано отверстие, равен

$$P=2\cdot 100-2xy+2\cdot 7\,(x+y).$$

Из соотношения $x^2+y^2=25$ или $(x+y)^2-2xy=25$ находим:

$$2xy=(x+y)^2-25$$

и, значит, функция P является квадратным трехчленом относительно $(x+y)$.

$$P=200-(x+y)^2+25+14\,(x+y)=225-(x+y)^2+$$
$$+14\,(x+y)=-\,(x+y-7)^2+274.$$

Отсюда следует, что $P_{\max}=274\,г$, если $x+y-7=0$. Решая систему

$$\begin{cases} x+y-7=0, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

Найдем $x=3$, $y=4$ (или наоборот: $x=4$, $y=3$).

998. Пусть x и y—длины сторон прямоугольника, лежащего в основании постамента. Тогда по условию задачи $xy=4$, а высота постамента

$$h=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Для площади поверхности постамента имеем

$$S=2xy+2x\sqrt{x^2+y^2}+2y\sqrt{x^2+y^2}=8+2\,(x+y)\sqrt{x^2+y^2}=$$
$$=8+2\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}.$$

Задача свелась к нахождению минимума функции $S(x)$. Применяя теорему о средних ($x>0$) к каждой из функций $x+\frac{4}{x}$ и $x^2+\frac{16}{x^2}$, получим

$$x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4;\quad x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant 8,\quad \sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

При этом знак равенства достигается в первом случае при $x=\frac{4}{x}$ и во втором случае при $x^2=\frac{16}{x^2}$, т. е. в обоих случаях при одном и том же значении $x=2$. Отсюда следует, что и функция $S(x)$, составленная из произведения вышеуказанных функций, также принимает наименьшее значение при $x=2$. Но при $x=2$ получаем, что и $y=2$.

Итак, имеем: $S_{\min} = 8 + 16\sqrt{2} = 8(2\sqrt{2}+1)$ *м*², причем стороны основания равны $x = y = 2$.

999. Указание. Решается аналогично задаче 998. Ответ: $S_{\max} = 14{,}5$ *см*² при сторонах основания 2, $\frac{1}{2}$ и высоте 2,5 *см*.

1000. $s_{\min} = 24$ *дм* при сторонах основания 1,2 и высоте 3 *дм*.

1001. Указание. Решается аналогично задаче 1000. Ответ: $S_{\min} = 8(\sqrt{2}+1)$ *м*², в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 *м*.

1002. $S_{\min} = 4{,}8$ *м* при катетах, равных 0,3 и 0,4 *м*.

Текстовые алгебраические задачи

1003. Пусть построено x домов, каждый из которых имеет N *м*² жилой площади. Тогда, согласно условию, имеет место равенство

$$xN = 40000. \tag{1}$$

Предположим далее, что стоимость одного дома в N *м*² жилой площади равна p тыс. *руб*. Стоимость дома складывается из стоимости p_1 наземной части дома и из стоимости p_2 фундамента, т. е.

$$p = p_1 + p_2.$$

Стоимость наземной части дома в N *м*² пропорциональна $N\sqrt{N}$, т. е. $p_1 = \alpha_1 N\sqrt{N}$, где α_1 — некоторый (неизвестный) коэффициент пропорциональности.

Аналогично, $p_2 = \alpha_2\sqrt{N}$, где α_2 — также соответствующий коэффициент пропорциональности. В частности, при строительстве дома на 1600 *м*², учитывая, что стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента, получаем, что

$$\alpha_1 \cdot 1600 \cdot 40 = \frac{32}{100}(\alpha_2 \cdot 40). \tag{2}$$

А учитывая, что строительство этого дома обходится в 184,8 тыс. руб., найдем

$$\alpha_1 \cdot 1600 \cdot 40 + \alpha_2 \cdot 40 = 184{,}8. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) находим

$$\alpha_1 = 7 \cdot 10^{-4}; \quad \alpha_2 = 3{,}5.$$

Таким образом, стоимость одного дома в N $м^2$ такова:

$$p = 7 \cdot 10^{-4} N \sqrt{N} + 3{,}5 \sqrt{N}. \qquad (4)$$

Из (1) и (4) получаем, что полная сумма затрат P при строительстве x домов зависит только от x и равна

$$P = xp = \left(\frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 200}{x \sqrt{x}} + \frac{3{,}5 \cdot 200}{\sqrt{x}} \right) \cdot x = 700 \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right).$$

Задача, таким образом, свелась к нахождению минимума функции $P(x)$. По теореме о средних имеем

$$P(x) = 700 \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \geqslant 700 \cdot 2 \sqrt{8} = 2800 \sqrt{2},$$

причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда

$$\frac{8}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad \text{т. е. при } x = 8.$$

Итак, при строительстве 8 домов сумма затрат будет наименьшей и равной $2{,}8 \sqrt{2}$ млн. *руб.*

1004. Время t монтажа одного резервуара кубической формы равно

$$t = \alpha \cdot 6x^2,$$

где x — ребро куба в сантиметрах, α — коэффициент пропорциональности. При $x = 20$ *см* ($x^3 = 8 \cdot 10^3$ *см*$^3 = 8$ *л*), по условию, $t = 1$ *мин* 40 *сек* $= 100$ *сек*, значит $100 = \alpha \cdot 2400$, откуда $\alpha = 1/24$ и, значит,

$$t = \frac{6}{24} x^2 = \frac{x^2}{4}.$$

Далее, на обработку поверхности $6x^2$ одного резервуара потребуется

$$\frac{6x^2}{10} \cdot \frac{3}{2} = 0{,}9x^2 \text{ сек},$$

а всего на изготовление одного резервуара с ребром x потребуется время

$$T = \frac{x^2}{4} + 0{,}9x^2 = 1{,}15x^2 \text{ сек}.$$

Пусть n — количество одинаковых резервуаров кубической формы, общий объем которых равен $64 \cdot 10^6$ *см*^{3} ($= 64$ тыс. *л*). Тогда

$$x^3 \frac{64 \cdot 10^6}{n}, \quad x = \frac{400}{\sqrt[3]{n}}$$

и, значит, время изготовления одного резервуара равно

$$T = 1{,}15 \cdot \frac{16 \cdot 10^4}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{23 \cdot 8000}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Тогда для изготовления n резервуаров потребуется время

$$nT = 23 \cdot 8000 \sqrt[3]{n} \text{ сек}.$$

Согласно условию задачи, это время должно быть меньше или равно 72000 *сек* ($= 20$ *час*):

$$23 \cdot 8000 \sqrt[3]{n} \leqslant 72000, \quad \sqrt[3]{n} \leqslant \frac{9}{23}.$$

Последнее неравенство ни при каком натуральном n не выполняется: наибольшее значение n равно $n_{\max} = \left(\frac{9}{23}\right)^3 < 1$. Таким образом, за 20 *час* мастерская не успеет изготовить такое количество резервуаров, чтобы их общая вместимость была 64 тыс. *л*.

1005. Указание. Решается аналогично задачам 1003, 1004. Ответ: Не хватит.

1006. Обозначим через x, y, z количество путевок первого, второго и третьего типов, соответственно. Тогда математически задачу можно сформулировать так: найти наибольшее значение функции

$$W = 15x + 27y + 45z = 15x + 9(3y + 5z)$$

при условии

$$21x + 40y + 60z = 2000, \tag{1}$$

где x, y, z — натуральные числа.

Для того чтобы соотношение (1) удовлетворялось, необходимо потребовать, чтобы x делилось на 20, т. е. $x = 20k$; тогда из (1) имеем

$$21k = 100 - (2y + 3z). \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$0 \leqslant 21k \leqslant 100$ (поскольку $k \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$),

т. е. k может лишь принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Задаваясь одним из этих значений k, найдем соответствующее x. Тогда функция W будет зависеть только от двух переменных y и z и будет, очевидно, принимать наибольшее значение одновременно с функцией

$$W_0 = 3y + 5z,$$

которая отличается от W на постоянную величину. Поэтому достаточно найти максимум W_0.

Пусть теперь $k=1$; тогда $x=20$ и из (2) находим

$$2y+3z=79. \tag{3}$$

Равенство (3) может выполняться лишь при нечетном z (почему?). Из (3) имеем:

$$y=\frac{79-3z}{2}, \text{ тогда } W_0(z)=\frac{3\cdot 79}{2}-\frac{9}{2}z+5z=\frac{3\cdot 79+z}{2}.$$

Очевидно, ни при каком нечетном z это значение $W_0(z)$ не может быть целым числом, что противоречит условию. Аналогично рассматривая W_0 как функцию от y либо как функцию от z, можно установить, что при $k=2$, 3, 4 задача также не имеет решения (в целых числах!).

При $k=0$, т. е. $x=0$, из (2) имеем

$$2y+3z=100, \quad 3z=100-2y.$$

Из последнего равенства следует, что z должно быть четным числом: $z=2n$; тогда это равенство принимает вид

$$3n=50-y,$$

откуда

1) $0\leqslant 3n<50$; 2) $y=50-3n$.

Тогда

$$W_0=3y+5z=3(50-3n)+10n=150+n.$$

Отсюда видно, что W_0 (а значит, и W) принимает наибольшее значение при наибольшем n, т. е. $n=16$.

Тогда

$$z=32, \quad y=2.$$

Итак, необходимо купить 2 путевки на 27 дней и 32 путевки на 45 дней.

Указание. Задачи 1007—1009 решаются аналогично задаче 1006.

1007. Ответ: 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа. **1008**. Ответ: 2 трехтонки и 20 пятитонок. **1009**. Ответ: 1 набор за 4 *руб* и 16 наборов по 6 *руб*.

1010. Пусть x—количество изделий I типа, y—количество изделий II типа. Вместо одного изделия I типа цех сборки может выпустить 3 изделия II типа. Следовательно,

вся продукция цеха в пересчете на изделия второго типа составляет $(3x+y)$ штук. По условию,

$$3x+y\leqslant 300.$$

Итак, среди неотрицательных целочисленных решений системы

$$\begin{cases} 0<3x+y\leqslant 300, \\ 0<x+y\leqslant 150, \end{cases} \tag{1}$$

нужно найти такое, которое сообщает наибольшее значение линейной функции

$$F(x,\ y)=2x+y.$$

Если на плоскости ввести прямоугольную систему координат xOy, то множество решений системы (1) изобразится с помощью заштрихованного 4-угольника $OABC$ на рис. 157. Теперь нужно найти такую точку M $(x,\ y)$ этого четырехугольника, для которой функция F $(x\ y)$ принимает

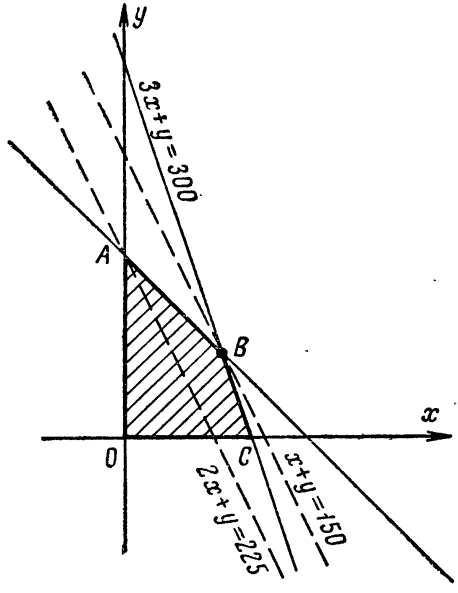


Рис. 157

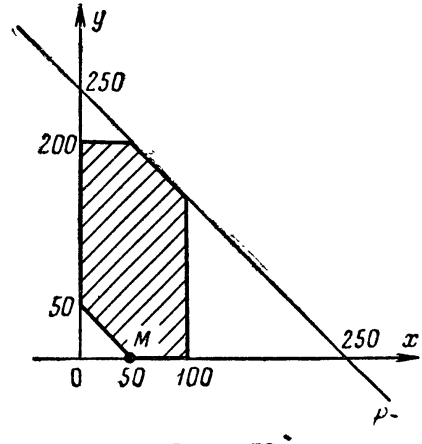


Рис. 158

наибольшее значение. Это нетрудно сделать с помощью графиков. Построим множество прямых $2x+y=c$ (это линии уровня функции F); (рис. 157). Тогда из рис. 157 можно видеть, что максимум достигается в вершине B 4-угольника ($c=225$). Координаты точки B нахо-

дятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=150, \\ 3x+y=300, \end{cases}$$

откуда $x=y=75$.

Итак, чтобы предприятие имело наибольшую прибыль, необходимо выпускать по 75 изделий I и II типа в сутки.

1011. Пусть x — количество руды, перевозимой в день с I шахты, на 1-й завод; y — количество руды, перевозимой в день со II шахты на 1-й завод. Тогда условия задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} x+y\leqslant 250, \quad x+y\geqslant 50, \\ 0\leqslant x\leqslant 100, \quad 0\leqslant y\leqslant 200. \end{cases} \tag{1}$$

Затраты на перевозку составляют

$$P=5x+7y+4\,(100-x)+5\,(200-y)=x+2y+1400.$$

Среди решений системы (1) нужно найти такое, при котором функция $P(x, y)$ принимает наименьшее значение.

Далее задача решается аналогично 1010 (рис. 158). Минимум достигается в точке M (50,0).

Ответ: самый выгодный план перевозок таков:

	1-й завод	2-й завод
I шахта	50 *т*	50 *т*
II шахта	0	200 *т*

2°. Соединения и бином Ньютона.

1012. Так как порядок красок не играет роли, то $C_5^3=10$ способов.

1013. Здесь порядок красок уже важен; поэтому имеем $A_5^3=60$ способов. Если одна полоса красная, то имеем $3A_4^2=36$ способов.

1014. В одной команде играет один юноша, а в другой — двое. Юношей можно разбить на команды 3 способами. После этого надо выбрать в первую команду 3 девушек из 5. Это можно сделать $C_5^3=10$ способами. Всего по правилу произведения получаем $3\cdot 10=30$ способов разбивки на команды.

1015. Сначала выберем, кто из трех пассажиров, которым безразлично, как сидеть, сядет лицом к паровозу. Этот выбор можно сделать 3 способами. На каждой скамье можно пересаживать пассажиров 5! способами. Всего получаем $3(5!)^2 = 43\,200$ способов.

1016. Выбор мест для мужчин и женщин можно сделать двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранные места 5! способами. Столько способов рассадить женщин. Всего получаем $2(5!)^2 = 28\,800$ способов.

1017. Получаем в 10 раз меньше способов, чем в предыдущей задаче, то есть 2880 способов.

1018. Общее число способов вынуть 10 карт равно C_{52}^{10}. Число способов, при которых не выбирают ни одного туза, равно C_{48}^{10}. Поэтому хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях, ровно один туз в $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ случаях, не менее двух тузов в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{49}^9$ случаях и ровно два туза в $C_4^2 \cdot C_{48}^8$ случаях (выбираем два туза C_4^2 способами и еще 8 карт из $48C_{48}^8$ способами).

1019. $A_9^4 = 3024$.

1020. Так как в номерах автомобилей буквы и цифры могут повторяться, то номеров, содержащих одну букву, $32 \cdot 10^4$, две буквы $32^2 \cdot 10^4$ и три буквы $32^3 \cdot 10^4$. Всего по правилу суммы $33820 \cdot 10^4$ номеров.

1021. Из пяти дней надо выбрать два, в которые даются яблоки. Всего $C_5^2 = 10$ способов.

1022. Так как апельсины различны, то имеем $A_8^5 = 6720$ способов.

1023. $C_{30}^4 = 27405$, $A_{30}^4 = 657720$.

1024. Можно выбрать двух, трех или четырех женщин. Двух женщин можно выбрать C_4^2 способами. После этого надо выбрать четырех мужчин, что можно сделать C_7^4 способами. По правилу произведения получаем $C_4^2 \cdot C_7^4$ способов. Если выбирают трех женщин, то получают $C_4^3 \cdot C_7^3$ способов, а четырех, — $C_4^4 \cdot C_7^3$ способов. Всего $C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^3 = 371$ способ.

1025. Если a и b стоят рядом, мы можем объединить их в один знак. Учитывая, что a и b можно переставить местами, получаем $2(n-1)!$ перестановок, в которых a и b стоят рядом. Поэтому они не стоят рядом в $n! - 2(n-1)!$ перестановках. Точно так же получаем; что a, b и c не стоят рядом в $n! - 6(n-2)!$ перестановках.

1026. $A_{10}^7 = 604800$, $C_{10}^3 = 120$. Если две девушки заведомо будут приглашены на танец, то имеется A_7^2 вари-

антов выбора их партнеров, оставшиеся 5 юношей выбирают партнершу из числа 8 девушек, что может быть сделано A_8^5 способами, а всего имеем $A_7^2 \cdot A_8^5 = 282240$ способов выбора. Наконец, если данные две девушки приглашены на танец, то еще пять девушек можно выбрать C_8^5 способами.

1027. Офицера можно выбрать C_3^1 способами, сержантов C_6^2 способами и рядовых C_{60}^{20} способами. Всего по правилу произведения получаем $C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$ способов выбора. Если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов, то получаем $C_5^1 \cdot C_{60}^{20}$ способов выбора.

1028. Чашки могут быть расставлены A_4^3 способами, блюдца A_5^3 и чайные ложки A_6^3 способами. Всего по правилу произведения $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$ способов.

1029. $C_n^2 - C_n^1 = 35$, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n = 35$, $n^2 - 3n - 70 = 0$, $n = 10$. Напишем общий член разложения

$$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot x^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{10}^k x^{10-2k}.$$

Так как член разложения не должен содержать x, то показатель $10 - 2k = 0$. Отсюда $k = 5$ и искомый член $T_6 = C_{10}^5 = 252$.

1030. Напишем общий член разложения

$$T_{k+1} = C_{124}^k (\sqrt{3})^{124-k} \cdot (\sqrt[4]{5})^k = C_{124}^k \cdot 3^{\frac{124-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}},$$

причем k принимает значения всех целых чисел от 0 до 124. Чтобы член разложения был рациональным, достаточно, чтобы числа $\frac{124-k}{2}$ и $\frac{k}{4}$ были целыми, а это будет иметь место, когда $k = 4n$. Но $0 \leqslant k \leqslant 124$ и, следовательно, $0 \leqslant 4n \leqslant 124$, $0 \leqslant n \leqslant 31$. Итак, n принимает значения 0, 1.....31, т. е. искомое число членов равно 32.

1031. Напишем общий член предложения:

$$T_{k+1} = C_7^k (3x)^{7-k} \cdot 2^{2k} = C_7^k \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k \cdot x^{7-k} = A_{k+1} x^{7-k}.$$

Выясним, при каких k выполняются неравенства

$$A_{k+1} > A_k, \quad A_{k+1} > A_{k+2}.$$

Учитывая, что $A_{k+1} = C_7^k \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k$, эти неравенства записываем так:

$$C_7^k \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > C_7^{k-1} \cdot 3^{8-k} \cdot 2^{k-1},$$
$$C_7^k \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > C_7^{k+1} \cdot 3^{6-k} \cdot 2^{k+1}$$

или

$$\frac{2}{3}\frac{C_7^k}{C_7^{k-1}}>1,\ \frac{3}{2}\frac{C_7^k}{C_7^{k+1}}>1,$$

откуда

$$\frac{2(8-k)}{3k}>1 \text{ и } \frac{3(k+1)}{2(7-k)}>1.$$

Решаем первое неравенство. Получим

$$16-2k>3k,\ 16>5k,\ k<\frac{16}{5}.$$

Так как k целое неотрицательное число, то отсюда заключаем, что $k<4$. Решаем второе неравенство. Получим

$$3k+3>14-2k,\ 5k>11,\ k>\frac{11}{5},$$

т. е. $k>2$. Итак: $2<k<4$, отсюда $k=3$. Следовательно, наибольший коэффициент будет A_4, а искомый член разложения $T_4=A_4x^4=C_7^3\cdot 3^4\cdot 2^3\cdot x^4=22680x^4$.

1033. $6x^2$. **1034.** $-\frac{28}{27}x^5$. **1035.** $T_9=C_{12}^8\cdot 3^4\cdot 5^8\cdot x^4$.

1036. Рассмотрим равенство

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\{1+C_n^1(-i\sqrt{3})+C_n^2(-i\sqrt{3})^2+C_n^3(-i\sqrt{3})^3+\ldots\}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n}\{1-3C_n^2+9C_n^4-\ldots-i\sqrt{3}\,[C_n^1-3C_n^3+\ldots]\}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в обеих частях получаемого равенства, получаем доказываемые соотношения.

3°. „Нестандартные" задачи

1037. Так как $\sin^2 x\leqslant 1$ и $\cos^2 x\leqslant 1$, имеем $\sin^{10} x\leqslant\sin^2 x$ и $\cos^{10} x\leqslant\cos^2 x$, откуда $\sin^{10} x+\cos^{10} x\leqslant 1$; причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия

$\sin^{10} x=\sin^2 x$ и $\cos^{10} x=\cos^2 x$, т. е.

$$\begin{cases}|\sin x|=1,\\ |\cos x|=0,\end{cases}\ (1)\ \text{или}\ \begin{cases}|\sin x|=0,\\ |\cos x|=1.\end{cases}\ (2)$$

Совмещая решение систем (1) и (2) имеем $x=\frac{\pi n}{2}$. Ответ: $x=\frac{\pi n}{2}$ $(n=0 \quad \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1038. Так как $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$, а $\cos^7 x \leqslant \cos^2 x$, имеем $\cos^7 x+\sin^4 x \leqslant \cos^2 x+\sin^2 x=1$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $\cos^7 x=\cos^2 x$ и $\sin^4 x=\sin^2 x$. Это имеет место при

$$\begin{cases} |\sin x|=1, \\ \cos x=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x=0, \\ \cos x=1. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1039. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\quad x=\pi n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1040. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\quad x=\pi+2\pi k \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1041. В этом случае ОДЗ неизвестных определяется условиями $\cos 2x \geqslant 0$ и $\sin 2x \geqslant 0$. Так как

$$\sqrt{\cos 2x} \geqslant \cos 2x \geqslant \cos^2 2x \text{ и}$$

$$\sqrt{\sin 2x} \geqslant \sin 2x \geqslant \sin^2 2x,$$

$$\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\cos 2x} \geqslant \sin^2 2x+\cos^2 2x=1,$$

причем равенство имеет место при $\sqrt{\cos 2x}=\cos^2 2x$ и $\sqrt{\sin 2x}=\sin^2 2x$. Имеем две системы:

$$\begin{cases} \cos 2x=1, \\ \sin 2x=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin 2x=1, \\ \cos 2x=0. \end{cases}$$

Ответ: $x=\pi n$ и $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1042. Для неизвестных ОДЗ определяется условиями $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$. В пределах ОДЗ имеем

$$\sqrt{\sin^3 x} \leqslant \sin x$$

и

$$\sqrt{\cos^3 x} \leqslant \cos x,$$

откуда

$$\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x} \leqslant \sin x+\cos x \leqslant \sqrt{2}.$$

Равенство $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ имеет место только при $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, однако при этих значениях x неравенства

(1) и (2) не обращаются в равенства, и, следовательно, сумма $\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}$ ни при каких значениях x не будет равна $\sqrt{2}$.

Ответ: решений нет.

1043. Так как $\sin^2 \pi x \geqslant 0$ и $\sin^2 \pi y \geqslant 0$, решения уравнения находим из системы

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0, \end{cases} \text{ откуда } x = n \text{ и } y = k,$$

где n и k независимо друг от друга принимают любые целые значения.

1044. Введя обозначение

$$z = \sqrt{\frac{x^2-x-2}{\sin x}} \geqslant 0,$$

получим уравнение

$$z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2},$$

которое не имеет решений, так как при $z > 0$ левая часть уравнения

$$z + \frac{1}{z} \geqslant 2.$$

1045. Введя обозначение

$$z = \sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}} \geqslant 0,$$

получим уравнение

$$z + \frac{1}{z} = 2.$$

Левая часть уравнения $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$ при $z > 0$, причем равенство имеет место только при $z = 1$.

Имеем

$$\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2} = 1,$$

откуда $x = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$.

1046. Так как $\sin x \leqslant 1$ и $\cos y \leqslant 1$, то $\sin x + \cos y \leqslant 2$. Равенство имеет место только тогда, когда одновременно соблюдаются условия $\sin x = 1$ и $\cos y = 1$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ y=2\pi k\ (n,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

1047. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

1048. Левая часть уравнения

$$\sin x\cdot\cos\frac{x}{4}-2\sin^2 x+\cos x+\cos x\cdot\sin\frac{x}{4}-2\cos^2 x=$$

$$=\left(\sin x\cdot\cos\frac{x}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{4}\right)+\cos x-2=\sin\left(x+\frac{x}{4}\right)+$$

$$+\cos x-2\leqslant 0,\ \text{т. к.}\sin\frac{5x}{4}\leqslant 1\ \text{и}\ \cos x\leqslant 1.$$

Равенство имеет место только в том случае, когда

$$\begin{cases}\sin\frac{5x}{4}=1,\\ \cos x=1,\end{cases}\ \text{т. е.}\ \begin{cases}x=\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\\ x=2\pi k.\end{cases}\qquad(1)$$

Составляя равенство $\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=2\pi k$ и решая это уравнение относительно n и k в целых числах:

$$4n+1=5k,$$
$$k=4(n-k)+1,\quad (n-k=m)$$
$$k=4m+1,$$
$$n=m+k=5m+1,$$

находим общее решение системы (1),

Ответ: $x=2\pi(4m+1)$, где $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

1049. $2^{-\cos x}\leqslant 2$, а $\log_\pi x+\log_x\pi\geqslant 2$. Имеем систему

$$\begin{cases}2^{-\cos x}=2,\\ \log_\pi x+\log_x\pi=2.\end{cases}$$

Откуда получаем

Ответ: $x=\pi$.

1050. $x=\frac{1}{4}$.

1051. При $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ имеем $-\cos x<0$, а $x^2>0$.

При $|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$ имеем $x^2\geqslant\frac{\pi^2}{4}>1$, а $-\cos x\leqslant 1$.

Ответ: И в первом и во втором случае решений нет.

1052. Указание. Рассмотреть интервалы $1<x<3$, $x\leqslant 1$ и $x\geqslant 3$.

Ответ: решений нет.

1053. Решений нет.

1054. $\cos \pi x \leqslant 1$, а $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geqslant 1$.

Ответ: $x = 2$.

1055. $2^{1-|x-1|} \leqslant 2^1 = 2$, а $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geqslant 2$.

Ответ: $x = 1$.

1056. Подбором легко находится $x = 1$. При $x < 1$ $2^x < 2$, а $3 - x > 2$. При $x > 1$ $2^x > 2$, а $3 - x < 2$. Следовательно, других решений нет.

Ответ: $x = 1$.

Указание. При поиске корней подбором полезно строить графики левой и правой частей уравнения.

1057. $x = 2$. **1058.** $x = 1$. **1059.** $x = \frac{1}{2}$. **1060.** $x = 3$. **1061.** $x = -1$.

1062. Преобразуем уравнение к виду $\sin x = \log_2 \frac{x}{\pi}$ и построим графики левой и правой частей уравнения

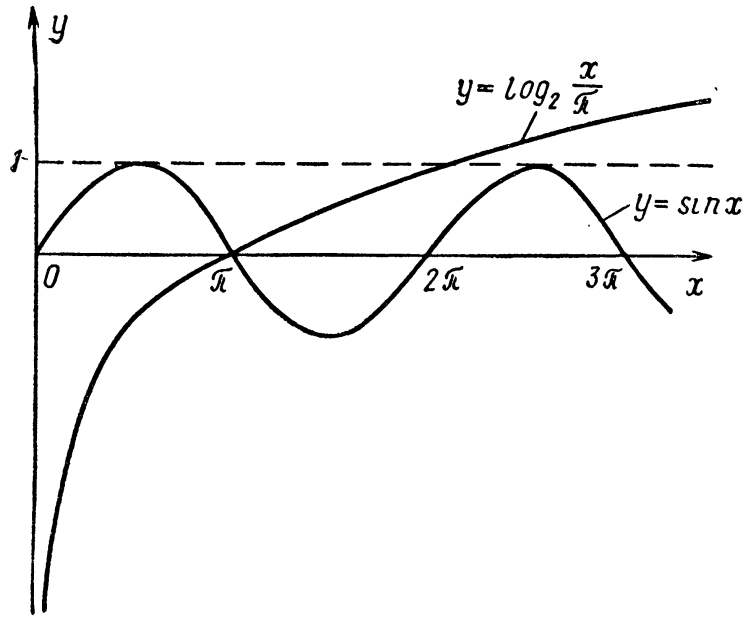


Рис. 159

(рис. 159). Легко видеть, что $x = \pi$ является решением уравнения. Покажем, что других решений нет:

а) $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} < 0$ — решений нет;

б) $\pi < x < 2\pi$, $\sin x < 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} > 0$ — решений нет;

в) $x > 2\pi$, $\sin x \leqslant 1$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} > 1$ — решений нет;

г) $x = 2\pi$, $\sin x = 0$, а $\log_2 \frac{x}{\pi} = 1$ — решений нет.

Ответ: $x = \pi$.

1063. В этом случае ОДЗ определяется условиями $-1 \leqslant x \leqslant 1$. При $-1 \leqslant x \leqslant 0$ имеем $\sqrt{1-x} \geqslant 1$, а $\sqrt{1+x} \geqslant 0$. При $0 < x \leqslant 1$ имеем $\sqrt{1+x} > 1$, а $\sqrt{1-x} \geqslant 0$. Неравенство выполняется при всех значениях x из ОДЗ.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1064. $-4 \leqslant x \leqslant 16$.

1065. Для определения ОДЗ имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant 2, \\ x^2 - 3x \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 0.$$

Подставляя это значение x в уравнение, убеждаемся, что $x = 0$ — решение уравнения.

Ответ: $x = 0$.

1066. Преобразуя аргумент арксинуса

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geqslant 0,$$

замечаем, что в ОДЗ входит только $x = 1$.

$$(-1 \leqslant x^2 - 2x + 2 \leqslant 1).$$

Подстановкой в уравнение убеждаемся, что $x = 1$ — решение уравнения.

Ответ: $x = 1$.

1067. $x = 3$.

1068. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2$, а $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$.

Решая систему $\begin{cases} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \end{cases}$

находим $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1069. $\cos^4(\operatorname{arctg} x) \leqslant \cos^2(\operatorname{arctg} x)$, а $\sin^4(\operatorname{arctg} x) \leqslant \sin^2(\operatorname{arctg} x)$.

Имеем $\cos^4(\operatorname{arctg} x)+\sin^4(\operatorname{arctg} x)\leqslant\cos^2(\operatorname{arctg} x)+$ $+\sin^2(\operatorname{arctg} x)=1$. С другой стороны, $\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arctg} x)\geqslant 1$. Имеем систему

$$\begin{cases}\cos^4(\operatorname{arctg} x)=\cos^2(\operatorname{arctg} x),\\ \sin^4(\operatorname{arctg} x)=\sin^2(\operatorname{arctg} x),\\ \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arctg} x)=1,\end{cases}$$

откуда $\operatorname{arctg} x=0$ и, следовательно $x=0$.

Ответ: $x=0$.

1070. $\sqrt{2+\cos^2 2x}\geqslant\sqrt{2}$, а $\sin 3x-\cos 3x\leqslant\sqrt{2}$. Имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt{2+\cos^2 2x}=\sqrt{2},\\ \sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\cos 2x=0,\\ \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\\ x=\dfrac{2\pi k}{3}+\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Составляя уравнение $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{4}$, решаем его в целых числах, откуда $k=3m$, $n=4m$, а общее решение примет вид $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$ $(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots)$.

1071.

$\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)\right]\leqslant 1$, а $-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right)\leqslant 0$.

Левая часть уравнения будет равна 1 только при тех значениях x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases}\cos^2\left[\dfrac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)\right]=1,\\ \operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right)=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем

$$\frac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)=\pi n.$$

Это уравнение имеет решение только при $n=0$. Получаем

$$\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0$$

и, полагая $\sin x=t$, находим $t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_2=\sqrt{2}$ — посторонний корень.

Из уравнения $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеем

$$x=\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}.$$

Подставляя это значение x во второе уравнение, имеем

$$\operatorname{tg}^2\left\{\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}^2\left[\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}\right]\right\}=$$

$$=\operatorname{tg}^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=\begin{cases}0 & \text{при } n=2k,\\ \text{не существует} & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

Ответ: $x=2\pi k-\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

1072. $3+2x-x^2=4-(x-1)^2\leqslant 4$,

следовательно

$$\log_2(3+2x-x^2)\leqslant 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}\geqslant 2.$$

Обе части уравнения одновременно равны двум только при $x=1$.

Ответ: $x=1$.

1073. $x=1$. **1074.** $x=\pi$. **1075.** $x=0$. **1076.** $x=\pi$. **1077.** $x=\frac{3\pi}{2}$. **1078.** $x=6\pi m-\frac{3\pi}{2}$. **1079.** $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x\geqslant$ $\geqslant|\sin x||\sin 3x|\geqslant|\sin x|\sin^2 3x$.

Если $\sin x<0$, решений нет. Если $\sin x\geqslant 0$, то $|\sin x|\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$ — правая часть уравнения. Равенство имеет место только в том случае, если

$$\begin{cases}|\sin 3x|=1,\\ |\sin x|=\frac{1}{2}|\sin 3x|=\frac{1}{2},\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}|\sin 3x|=0,\\ |\sin x|=0.\end{cases}$$

Из первой системы имеем $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$ для первого уравнения и $x=\pi k\pm\frac{\pi}{6}$ — для второго уравнения. Общее решение $x=\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}$. Решение второй системы $x=\pi k$.

Ответ: $x=\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}$, $x=\pi k$ $(m, k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1080. $3\arcsin\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)=3\arcsin\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\geqslant 3\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$, так как $\arcsin x$ — монотонно возрастающая функция. С другой стороны, $\frac{\pi}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{2}}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Левая и правая части уравнения равны друг другу только при $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

1081. Так как $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\geqslant 3$, то имеем $0<\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7}\leqslant\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

С другой стороны,

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}\right|\geqslant\sqrt{3}.$$

Левая и правая части уравнения равны друг другу только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7}=\sqrt{3},\\ \frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}=\sqrt{3},\end{cases}$$

т. е. при $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

1082. Указание.

$$\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13}=\sin\frac{\pi}{(x+3)^2+4}\leqslant\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а

$$\frac{\log_3|x|+\log_{|x|}3}{2\sqrt{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $x=-3$.

1083. Указание.

$$\cos\frac{16\pi}{16x^2-8x+49}=\cos\frac{16\pi}{(4x-1)^2+48}\geqslant\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

так как $y=\cos x$ — монотонно убывающая функция на интервале, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, справедливо неравенство $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x+\operatorname{ctg}^2\pi x}\leqslant\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}$.

1084. Имеем: $2^{-|x-2|}\leqslant 1$

и

$$\log_2(4x-x^2-2)=\log_2[2-(x-2)^2]\leqslant 1.$$

Следовательно, неравенство будет выполняться только тогда, когда

$$\begin{cases}2^{-|x-2|}=1,\\ \log_2(4x-x^2-2)=1.\end{cases}$$

Ответ: $x=2$.

1085. Имеем: $\cos^2(x+1)\leqslant 1$,

$$\lg(9-2x-x^2)=\lg[10-(x+1)^2]\leqslant 1.$$

Ответ: $x=-1$.

1086. Справедливы следующие неравенства:

$$4x-x^2-3=1-(x-2)^2\leqslant 1,$$
$$\log_2(\cos^2\pi x+1)\leqslant 1,$$

так как $1+\cos^2\pi y\leqslant 2$.

Ответ: $x=2$.

1087. Для этой задачи ОДЗ определяется условием $|x|<1$. При этом условии $\sqrt{2}-1\leqslant|\sqrt{2}|x|-1|\leqslant 1$, а $\log_2(2-2x^2)\leqslant 1$.

Ответ: $x=0$.

1088. Имеем: $\cos(x+3\operatorname{tg}x)\geqslant -1$, а $(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x)^2\geqslant 0$, т. е. при всех x левая часть неравенства больше или равна -1. Неравенство будет выполняться (обращаясь в строгое равенство) при соблюдении условий:

$$\begin{cases}\cos(x+3\operatorname{tg}x)=-1,\\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. $x = \pi n$ и $\operatorname{tg} x = 1$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из этих решений первому уравнению системы удовлетворяют только $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1089. $x = 2k + 1$ и $x = \frac{4n-1}{2}$ ($k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1090. $x = 0$.

1091. Подставляя $z = 2 - (x + y)$ из первого уравнения во второе, получаем:

$$2xy - [2 - (x + y)]^2 - 4 = 0,$$
$$2xy - 4 + 4x + 4y - x^2 - 2xy - y^2 - 4 = 0,$$
$$-(x-2)^2 - (y-2)^2 = 0,$$

откуда $x = y = 2$ и $z = 2 - (x + y) = -2$.

Ответ: $x = y = 2$, $z = -2$.

1092. Подставляя $z = x^2 + y^2$ во второе уравнение, имеем

$$x^2 + y^2 + x + y = a,$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}.$$

Уравнение будет иметь единственное решение при $a = -\frac{1}{2}$.

Имеем $x = y = -\frac{1}{2}$ и $z = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$ $x = y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

1093. Подставляя $z \leqslant x - y$ в первое уравнение системы, имеем

$$x^2 + 4y^2 + 5 \leqslant 4x - 4y \quad \text{или} \quad (x-2)^2 + (2y+1)^2 \leqslant 0.$$

Ответ: $x = 2$ и $y = \frac{1}{2}$.

1094. $x = 4$, $y = 2$. **1095.** $x = y = -2$; $z = -7$.

1096. Так как $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$, а $2 \sin^2 y \leqslant 2$, то $\sin^2 y = 1$, $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\cos^2 z = 0$, откуда $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ и $z = \frac{\pi}{2} + \pi m$ ($m, k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1097. Так как

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|\sin x|+\log_{|\sin x|}\frac{1}{\sqrt{2}}\geqslant 2,$$

а

$$2\cos^2 y\leqslant 2,$$

имеем $|\sin x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos^2 y=1$, откуда $\operatorname{tg}^2 y=0$ и $\sin z=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $y=\pi m$, $z=\pi k$ (m, n, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1098. Так как $2^{1+\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=2\left(2^{\sin^2 x}+2^{-\sin^2 x}\right)\geqslant 4$, и

$$4\cos^2 y\leqslant 4,$$

то имеем $\sin^2 x=0$, $\cos^2 y=1$, $\sin^2 y=0$ и $\sin z=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\pi n$, $y=\pi k$, $z=\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}$ (m, n, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1099. Имеем

$$5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=$$
$$=4(x+y)^2+(x+1)^2+(y-1)^2\geqslant 0.$$

Ответ: $x=-1$, $y=1$.

1100. $x=y=-3$.

1101. Указание.

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=$$
$$=2\left[(x^2-1)^2+2\right]\cdot\left[\left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]\geqslant 7.$$

Ответ: $x_1=1$, $y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $x_2=1$; $y_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_3=-1$, $y_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $x_4=-1$; $y_4=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

1102. $x=1$, $y=-3$.

1103. Так как

$$1+x^2+|y|\geqslant 1,\ \lg(1+x^2+|y|)\geqslant 0;$$
$$2^{|x|}\geqslant 1,\ \text{а}\ -\cos y\geqslant -1,$$

то, складывая почленно последние три неравенства, имеем

$$2^{|x|}-\cos y+\lg(1+x^2+|y|)\geqslant 0.$$

Ответ: $x=0$ и $y=0$.

1104. Имеем:

$$\log_2 [2+2\sin(x+y)-\cos^2(x+y)] = 2\log_2 [1+\sin(x+y)] \leqslant 2,$$

а $4^x - 2^{x+1} + 3 = (2^x-1)^2 + 2 \geqslant 2$.

Ответ: $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1105. Указание. $\frac{|\operatorname{tg}(x+y)|}{\sin^2(x+y)} = \frac{2}{|\sin 2(x+y)|} \geqslant 2$;

$$\frac{4}{\log_\pi (x-y) + \log_{(x-y)} \pi} \leqslant 2.$$

Ответ: $x=\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $y=-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$.

1106. Так как $z=\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \geqslant 2$, $\log_2 z \geqslant 1$, а

$$\frac{1}{y^2-2y+2} = \frac{1}{(y-1)^2+1} \leqslant 1.$$

Имеем $y=1$ и $\cos^2 xy = 1$, откуда $x=\pi n$.

1107. Указание. $0 \leqslant \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} \leqslant 1$, так как при $x>0$ имеет место соотношение $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}} \leqslant 1$.

Ответ: $x=1$, $y=\frac{2n-3}{4}$.

1108. $x_1=\frac{3}{\pi}$, $y_1=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{\pi}+2\pi n$, $x_2=-\frac{3}{\pi}$; $y_2=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{\pi}+2\pi n$.

1109. Указание. $\log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10) = \log_{\frac{1}{3}}[9(y-1)^2+1] \leqslant 0$, а $\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \left|\frac{\operatorname{ctg} xy}{\cos^2 xy}\right| = \frac{2}{|2\sin xy \cdot \cos xy|} \geqslant 2$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $y=1$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1110. $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1111. $x_1=\frac{6n+(-1)^n}{6}$; $y_1=\pi$ и $x_2=\frac{6n-(-1)^n}{6}$; $y_2=-\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **1112.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $y=\frac{3\pi}{2}-2\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1113. Указание.

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=$$
$$=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2\left[(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)^2+\frac{1}{(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y)^2}\right]\geqslant 4,$$

а

$$3+\sin^2(x+y)\leqslant 4.$$

Имеем систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y=0,\\ \operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 y=1,\\ \sin^2(x+y)=1,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ и $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, где m и n независимо друг от друга принимают любые целые значения одинаковой четности, т. е. $m+n=2k$, где k — любое целое число.

1114. Преобразуем уравнение к виду

$$2\left[\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\right]=16+\sin y,$$

откуда

$$\frac{2(\sin^4 x+\cos^4 x)}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}\cdot(1+\sin^4 x\cdot\cos^4 x)=$$
$$=\frac{(2-\sin^2 2x)(16+\sin^4 2x)}{\sin^4 2x}\geqslant 17.$$

Имеем $\sin^2 2x=1$ и $\sin y=1$, откуда получаем

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ и $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(n,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1115. Так как $2^{|x|}\geqslant 1$, $\log_3(2+2^{|x|})\geqslant\log_3 3=1$ и так как $\sec^2(x+y)\geqslant 1$, имеем $\sec^2(x+y)\log_3(2+2^{|x|})\geqslant 1$. Данное неравенство выполняется только при $\sec^2(x+y)=1$ и $\log_3(2+2^{|x|})=1$.

Ответ: $x=0$, $y=\pi n$.

1116. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y=0,1$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1117. $x=0$, $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1118. В этом случае ОДЗ определяется условиями $-1\leqslant 2^{|x|}+y\leqslant 1$ и $1+y>0$. Поскольку $2^{|x|}\geqslant 1$, имеем $-1<y<0$. При этих значениях y $\lg(1+y)\leqslant 0$ (1), в то время как $\arcsin(2^{|x|}+y)\leqslant\frac{\pi}{2}$ (2). Складывая почленно

эти неравенства, имеем $\lg(1+y)+\arcsin(2^{|x|}+y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Исходному неравенству удовлетворяют только те значения x и y, при которых оба нестрогих неравенства (1) и (2) обращаются в равенства.

Ответ: $x=y=0$.

1119. Для ОДЗ имеем условия

$$-1\leqslant x+|\sin y|\leqslant 1$$

и

$$\frac{\pi x}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

Имеем

$$-2\leqslant -1-|\sin y|\leqslant x\leqslant 1-|\sin y|\leqslant 1.$$

При этих значениях $x(-2\leqslant x\leqslant 1)$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\leqslant 1,\quad \text{а}\quad 1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\geqslant 0. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\arccos(x+|\sin y|)\geqslant 0. \tag{2}$$

Складывая почленно неравенства (1) и (2), имеем

$$1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\geqslant 0.$$

Ответ: $x=1$, $y=\pi n$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1120. В этом случае ОДЗ определяется условиями $1+x>0$ и $-1\leqslant x+y^2\leqslant 1$, откуда $-1<x\leqslant 1$. При этих значениях x имеем

$$\log_{\frac{1}{2}}(1+x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}2=-1, \tag{1}$$

$$\arccos(x+y^2)\geqslant 0. \tag{2}$$

Складывая неравенства (1) и (2), имеем

$$\log_{\frac{1}{2}}(1+x)+\arccos(x+y^2)\geqslant -1.$$

Исходное неравенство выполняется только при тех значениях x и y, при которых функции $\log_{\frac{1}{2}}(1+x)$ и $\arccos(x+y^2)$ одновременно принимают свои наименьшие значения, т. е. при $x=1$ и $y=0$.

1121. $x=0;\ y=1$.

1122. Из условия $y-x^2-1\geqslant 0$ (ОДЗ) имеем $y\geqslant x^2+1\geqslant 1$. Складывая почленно неравенства

$$\begin{cases}\cos x\leqslant 1,\\ -y^2\leqslant -1,\\ -\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 0,\end{cases}$$

получаем $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 0$. Условию задачи удовлетворяют только те значения x и y, при которых все нестрогие неравенства обращаются в равенства, т. е.

$$x=0,\ y=1,\ \cos x=1 \text{ и } \sqrt{y-x^2-1}=0,$$

что имеет место при $x=0$ и $y=1$.

1123. $x=0,\ y=1$. **1124.** $x=1,\ y=0$.

1125. Введем $z=x-1$. Неравенство приобретает вид

$$-|y|+z-\sqrt{z^2+2z+y^2}\geqslant 0.$$

Если $z<0$, решений нет.

Если же $z\geqslant 0$, то $\sqrt{z^2+2z+y^2}\geqslant\sqrt{z^2}=z$, откуда $z-\sqrt{z^2+2z+y^2}\leqslant 0$. Складывая это неравенство с очевидным неравенством $-|y|\leqslant 0$, имеем

$$-|y|+z-\sqrt{z^2+2z+y^2}\leqslant 0.$$

Условию задачи будут удовлетворять те значения y и z, при которых

$$-|y|+z-\sqrt{z^2+2z+y^2}=0,$$

т. е. $|y|=0$ и $z=\sqrt{z^2+2z}$, откуда $y=0,\ z=0$, а $x=1$.

1126. Указание. Имеем $y\geqslant x^2+1\geqslant 1$, откуда $2^y\geqslant 2$. Складывая почленно неравенство $2^y\geqslant 2$, $-2\cos x\geqslant -2$ и $\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$, имеем

$$2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0,$$

откуда получаем $x=0$ и $y=1$.

1127. Так как $|\sec x|-1\geqslant 0$, $\sqrt{x^2+|\sec x|-1}\geqslant|x|$, откуда $-|x|+\sqrt{x^2+|\sec x|-1}\geqslant 0$. Складывая это неравенство с неравенством $2^{\cos x}\geqslant\frac{1}{2}$, имеем

$$2^{\cos x}-|x|+\sqrt{x^2+|\sec x|-1}\geqslant\frac{1}{2},$$

откуда

$$2^{\cos x}=\frac{1}{2},\ \text{а}\ 1-|\sec x|=0.$$

Ответ: $x=\pi+2\pi n\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1128. Вводя $z=\log_2 x$, находим $z=-2$ и $z_2=3-x$. Из уравнения $\log_2 x=-2$, имеем $x=\frac{1}{4}$. Уравнение $\log_2 x=3-x$ решаем графически (рис. 160). Из рис. 160 видно, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=3-x$ пересе-

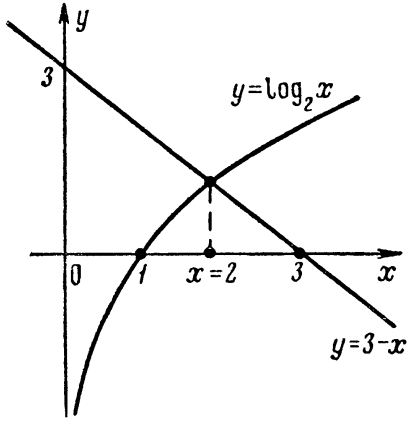


Рис. 160

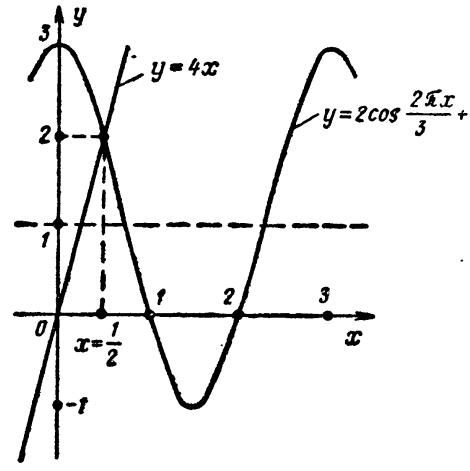


Рис. 161

каются только в одной точке, абсцисса которой $x=2$ легко находится подбором. Докажем, что других решений нет. Если $0<x<2$, то $\log_2 x<1$, а $3-x>1$. Если же $x>2$, то $\log_2 x>1$, а $3-x<1$. Следовательно, решение $x=2$ — единственное. Ответ: $x=2$ и $x=\frac{1}{4}$.

1129. Приводя уравнение к виду

$$(x-1)^2+4\left[1+\cos\left(ax+b\right)\right]=0,$$

замечаем, что $(x-1)^2\geqslant 0$ и $4\left[1+\cos\left(ax+b\right)\right]\geqslant 0$. Следовательно, уравнение имеет решение $x=1$ только в том случае, когда $\cos\left(ax+b\right)=-1$, т. е. $a+b=\pi+2\pi n$. Ответ: a — любое число, $b=\pi+2\pi n-a\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

1130. Указание. Так как $8-x2^x+2^{3-x}-x=(2^{3-x}-x)(2^x+1)$, то $2^{3-x}=x$. Ответ: $x=2$.

1131. Логарифмируя обе части уравнения, получаем $x \lg x = x - x^2$, откуда в силу условия $x > 0$ получаем $\lg x = 1 - x$. Ответ: $x = 1$.

1132. Преобразуя произведение синусов в разность косинусов, имеем

$$4x = 2\cos\frac{2\pi x}{3} + 1.$$

Решая это уравнение графически (рис. 161), находим подбором решение $x = \frac{1}{2}$. Покажем, что других решений нет. Если $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, то $4x < 2$, а $2\cos\frac{2\pi x}{2} + 1 > 2$, если $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, то $4x > 2$, а $2\cos\frac{2\pi x}{3} + 1 < 2$.

Итак, решение $x = \frac{1}{2}$ единственное.

1133. Преобразуя уравнение к виду

$$x^2 - x(3 - 2^x) + 2(1 - 2^x) = 0$$

и решая его как квадратное, находим $x = 2$ и $x = 1 - 2^x$. Корень $x = 0$ последнего уравнения находится графически.

1134. $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

1135. Решая уравнение как квадратное относительно x, получаем $x_{1,2} = -2\cos xy \pm \sqrt{4\cos^2 xy - 4}$. Дискриминант этого уравнения $4\cos^2 xy - 4 \leqslant 0$, и уравнение имеет действительные равные корни только тогда, когда $\cos^2 xy = 1$. Имеем две системы:

$$\begin{cases} \cos xy = 1, \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos xy = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2$, $y_1 = \pi n$; $x_2 = 2$; $y_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

1136. Преобразуя сумму косинусов в произведение, а $\cos(x + y)$ выражая через косинус половинного угла, получаем уравнение

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0,$$

которое решается аналогично 1106.

Ответ: $x = 2\pi(n + k) \pm \frac{\pi}{3}$; $y = 2\pi(n - k) \pm \frac{\pi}{3}$.

1137. Рассматривая уравнение как квадратное относительно $z=2^{\sin x}$, замечаем его дискриминант

$$D=\cos^2 xy-2^{|y|}\leqslant 0.$$

Из условия действительности корней уравнения ($D\geqslant 0$) имеем $y=0$, $\cos^2 xy=1$ и $2^{\sin x}=\cos xy$, причем $\cos xy>0$.

Ответ: $x=\pi n$, $y=0$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1138. $x=1, y=1$. **1139.** $x_1=\pi n-\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $y_1=\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x_2=\pi n+\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $y_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

1140. $x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $y_1=2\pi k$ ($n, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), $x_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $y_2=\pi+2\pi k$ ($n, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

1141. $x_1=\pi k-(-1)^2\frac{\pi}{4}$, $y_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x_2=\pi k+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}$, $y_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$. ($n, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

1142. Так как $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, $\cos(\sin x)>0$ при всех x, а $\cos^2 x\geqslant 0$. Если $\sin x<0$, то и $\sin(\sin x)<0$. Левая часть неравенства отрицательная, решений нет.

Если $\sin x=0$, то и $\sin(\sin x)=0$. Если $\sin x>0$, то и $\sin(\sin x)>0$, левая часть равна нулю, решений нет. Имеем $\cos^2 x\cdot\sin x(\sin x)\geqslant 0$ и $\sin x\cdot\cos(\sin x)>0$. Следовательно, неравенство $\sin x>0$ равносильно исходному. Ответ: $2\pi n<x<\pi+2\pi n$.

1143. Имеем $-1\leqslant x\leqslant 1$. В пределах ОДЗ $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ и $\cos x>0$, а множители x и $\sin x$ имеют одинаковые знаки. Ответ: $0<x<1$.

1144. Имеем ОДЗ $-1<x\leqslant 1$. В пределах ОДЗ $2^x>0$, $\cos x>0$, а $\arcsin x$ и $\lg(1+x)$ имеют одинаковые знаки. Ответ: $-1<x<0$.

1145. $x>0$.

1146. $2\pi n+\frac{\pi}{2}<x<\pi+2\pi n$ и $\pi+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$.

1147. Имеем $\sin(t+y)+\sin(t+2x-y)=2\sin\times\times(t+x)\cos(y-x)$. Вводя $z=\sin(t+x)$, приводим выражение (1) к виду $z^2+2z\cos(y-x)+\frac{1}{4}$. Задача сводится к тому, чтобы определить, при каких x и y неравенство

$$z^2+2z\cos(y-x)+\frac{1}{4}>0 \qquad (2)$$

выполняется при любых t, т. е. при любых z, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Рассмотрим параболу

$$f(z) = z^2 + 2z\cos(y-x) + \frac{1}{4}.$$

Поскольку ветви параболы направлены вверх ($A = 1 > 0$) и абсцисса вершины параболы $z_0 = -\cos(y-x)$ удовлетворяет условию $-1 \leqslant z_0 \leqslant 1$, неравенство (2) будет выполняться при всех $-1 \leqslant z \leqslant 1$ только в том случае, если парабола $y = f(z)$ не пересекает оси абсцисс z (рис. 162), т. е. при

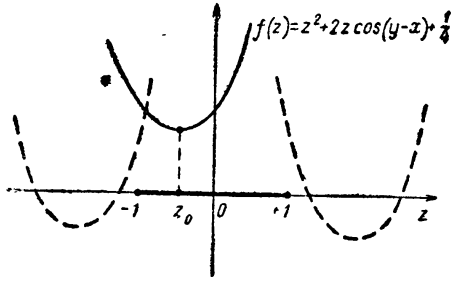


Рис. 162

$$D < 0. \qquad (3)$$

Вычисляя дискриминант $D = 4\cos^2(y-x) - 1$, из условия (3) получаем неравенство

$$-\frac{1}{2} < \cos(y-x) < \frac{1}{2},$$

решение которого имеет вид

$$\frac{\pi}{3} + \pi k < y - x < \frac{2\pi}{3} + \pi k,$$

или

$$\frac{\pi}{3} + \pi k + x < y < \frac{2\pi}{3} + \pi k + x. \qquad (4)$$

Придавая k различные целые значения, находим на координатной плоскости множества точек (рис. 163), координаты которых удовлетворяют условию (4) (так, при $k = 0$ условию (4) удовлетворяют координаты точек, лежащих выше прямой $y = \frac{\pi}{3} + x$, но ниже прямой $y = \frac{2\pi}{3} + x$ и т. д.).

1148. Заменяя $2\cos 2t = 2 - 4\sin^2 t$, преобразуем выражение (1) к виду $-4\sin^2 t + 4\sin 2x \cdot \sin t + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2 + 2$ и введем $z = \sin t$, причем $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Задача сводится к тому, чтобы установить, при каких значениях x и y неравенство

$$-4z^2 + 4\sin 2x \cdot z + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2 + 2 > 1 \qquad (2)$$

имеет решение при $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

Преобразуем (2) к виду

$$4z^2 - 4\sin 2x \cdot z - 2\sin(x+y) + (\sin 2x - 1)^2 - 1 < 0 \quad (3)$$

и рассмотрим параболу

$$f(z) = 4z^2 - 4\sin 2x \cdot z - 2\sin(x+y) + (\sin 2x - 1)^2 - 1.$$

Поскольку ветви параболы направлены вверх ($A = 4 > 0$) и абсцисса вершины параболы ($z_0 = 1/2 \sin 2x$) лежит в пре-

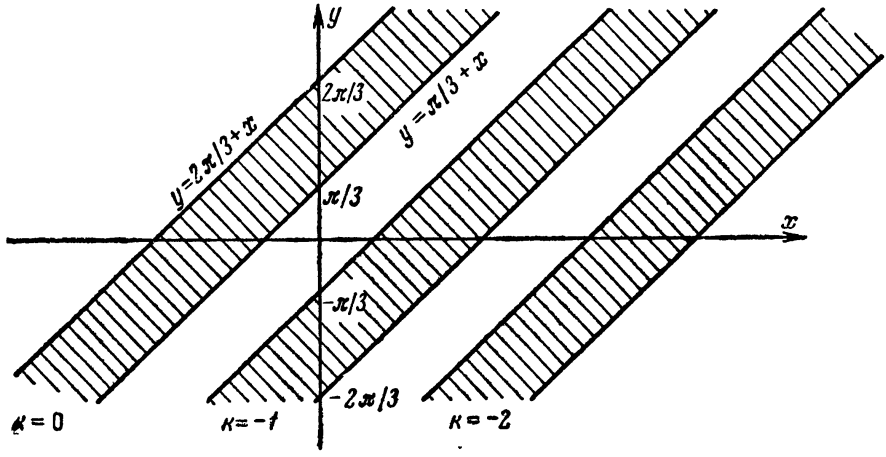


Рис. 163

делах от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$, для того чтобы неравенство (3) имело решение при $-1 \leqslant z \leqslant 1$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$D > 0. \quad (4)$$

Вычисляя дискриминант

$$D = 16\sin^2 2x + 32\sin(x+y) - 16(\sin 2x - 1)^2 + 16 =$$
$$= 32[\sin(x+y) + \sin 2x] = 64\sin\frac{3x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2},$$

из условия (4) получаем неравенство

$$\sin\frac{3x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2} > 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \sin\dfrac{3x+y}{2} > 0, \\ \cos\dfrac{y-x}{2} > 0, \end{cases} \quad (6.1) \qquad \begin{cases} \sin\dfrac{3x+y}{2} < 0, \\ \cos\dfrac{y-x}{2} < 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Решим их. Из системы (6.1) имеем

$$\begin{cases} 2\pi k < \dfrac{3x+y}{2} < \pi + 2\pi k, \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < \dfrac{y-x}{2} < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 4\pi k - 3x < y < 4\pi k + 2\pi - 3x, \\ 4\pi n - \pi + x < y < 4\pi n + \pi + x, \end{cases} \qquad (7.1)$$

а из системы (6.2)

$$\begin{cases} \pi + 2\pi k < \dfrac{3x+y}{2} < 2\pi + 2\pi k, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < \dfrac{y-x}{2} < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases}$$

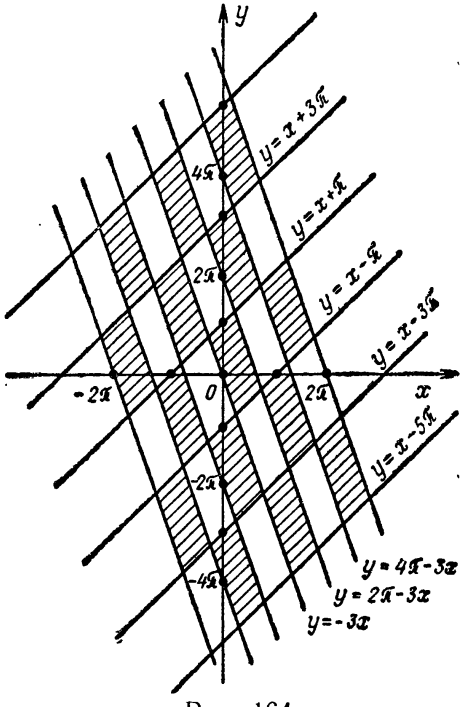


Рис. 164

откуда

$$\begin{cases} 4\pi k + 2\pi - 3x < y < \\ < 4\pi k + 4\pi - 3x, \\ 4\pi n + \pi + x < y < \\ < 4\pi n + 3\pi + x, \end{cases} \qquad (7.2)$$

где n и k независимо друг от друга принимают любые целые значения. Придавая n и k различные значения, строим на плоскости (x, y) множества точек, координаты которых удовлетворяют системам (7.1) и (7.2); рис. 164. Области, изображающие решения неравенства (5), заштрихованы на рис. 164 наклонными параллельными линиями.

1149. Условия задачи дают две системы уравнений:

$$\begin{cases} -\pi + 4k\pi < 2x + y < \pi + 4k\pi, \\ \pi + 4m\pi < 2x - y < 3\pi + 4m\pi; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \pi + 4k\pi < 2x + y < 3\pi + 4k\pi, \\ -\pi + 4m\pi < 2x - y < \pi + 4m\pi, \end{cases} \qquad (2)$$

где k, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Область, образуемая этими точками, представляет собой множество ромбов, заполняющих плоскость в шахматном порядке.

1150. Из условий задачи получаем

$$\begin{cases} 4\pi m < y - x < 2\pi + 4\pi m, \\ 4\pi k < x + y < 2\pi + 4\pi k; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2\pi + 4\pi m < y - x < 4\pi + 4\pi k, \\ 2\pi + 4\pi k < x + y < 4\pi + 4\pi k, \end{cases} \quad (2)$$

где $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Область, образуемая этими точками, представляет собой множество квадратов, заполняющих плоскость в шахматном порядке.

1151. $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x + y < \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Область, образуемая этими точками, представляет собой множество полос, параллельных биссектрисе второго координатного угла.

1152. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(8m - 1) < y - x < \frac{\pi}{2}(8m + 3), \\ \frac{\pi}{2}(8k + 1) < x + y < \frac{\pi}{2}(8k + 5); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(8m + 3) < y - x < \frac{\pi}{2}(8m + 7), \\ \frac{\pi}{2}(8k + 5) < x + y < \frac{\pi}{2}(8k + 9), \end{cases} \quad (2)$$

где $m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Область — множество квадратов, заполняющих плоскость в шахматном порядке.

1153. В этом случае имеем

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k, \\ y \neq \pi m, \text{ где } m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Область — множество полос, параллельных оси y, из которых выпадают отрезки прямых $y = \pi m$, параллельных оси x.

1154. I способ. Функция $f(x)$ может быть описана аналитически следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2a - 2 + (a+1)^2 \text{ при } x + a - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 2a + 2 + (a+1)^2 \text{ при } x + a - 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

т. е. график функции $y=f(x)$ состоит из частей двух парабол:

$y_1=x^2+2x+2a-2+(a+1)^2=(x+1)^2+a^2+4a-2$ и

$y_2=x^2-2x-2a+2+(a+1)^2=(x-1)^2+a^2+2$,

пересекающихся в точке, абсцисса которой определяется из условия $x+a-1=0$, откуда $x=1-a$.

Заметим, что ветви обеих парабол направлены вверх и абсциссы вершин парабол постоянны, $x_0=-1$ для $y_1=(x+1)^2+a^2+4a-2$ и $x_0=1$ для $y_2=(x-1)^2+a^2+2$. В зависимости от величины параметра a возможны три случая:

а) точка пересечения парабол лежит левее -1 $(1-a<-1)$;

б) точка пересечения парабол лежит между -1 и 1 $(-1\leqslant 1-a\leqslant 1)$;

в) точка пересечения парабол лежит правее $+1$ $(1-a>1)$.

Учитывая, что левее точки пересечения парабол $(x\leqslant 1-a)$ график функции $y=f(x)$ совпадает с параболой $y_2=(x-1)^2+a^2+2$, абсцисса вершины которой равна 1, а правее точки пересечения $(x\geqslant 1-a)$ — с параболой $y_1=(x+1)^2+a^2+4a-2$, абсцисса вершины которой равна -1, нарисуем эскизы графиков для всех трех случаев. Рис. 165 иллюстрирует случай $1-a<-1$, т. е. $a>2$; рис. 166 — случай $-1\leqslant 1-a\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant a\leqslant 2$; рис. 167 — случай $1-a>1$, т. е. $a<0$.

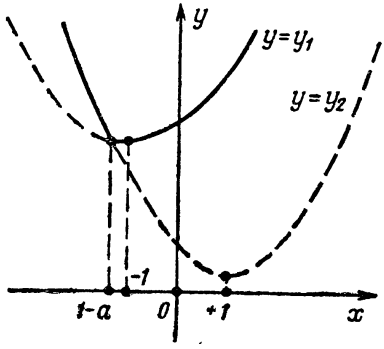


Рис. 165

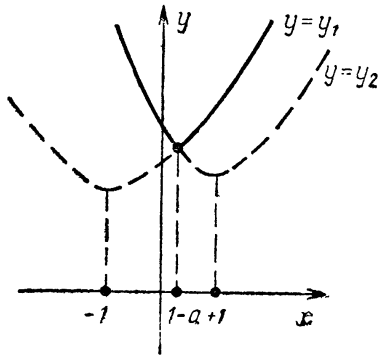


Рис. 166

Если $a>2$ (рис. 165), функция $f(x)$ достигает минимума в точке $x=-1$. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} a>2, & \text{(2.а)} \\ f(-1)>3. & \text{(2.б)} \end{cases}$$

Решая неравенство (2.б), получаем $a^2+4a-2<3$, откуда $-5<a<1$. Так как $1<2$, система (2) решений не имеет.

Если $0\leqslant a\leqslant 2$ (рис. 166), функция $f(x)$ достигает минимума в точке пересечения парабол, т. е. при $x=1-a$. Тогда

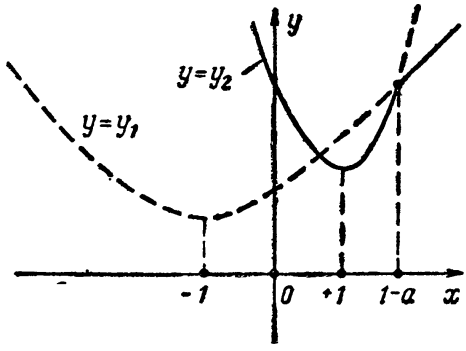


Рис. 167

$$\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant 2, & (3.а)\\ f(1-a)<3. & (3.б)\end{cases}$$

Решая неравенство (3.б), получаем $2a^2+2<3$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$. С учетом неравенства (3.а) находим решение системы (3), $0\leqslant a<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Если $a<0$ (рис. 167), функция $f(x)$ достигает минимума в точке $x=1$. Тогда

$$\begin{cases} a<0, & (4.а)\\ f(1)<3. & (4.б)\end{cases}$$

Из неравенства (4.б) $a^2+2<3$ находим $-1<a<1$. С учетом неравенства (4.а) получаем решение системы (4), $-1<a<0$.

Объединяя решения систем (2), (3) и (4), получаем Ответ: $-1<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

II способ. Разобъем область значений неизвестного и параметра на две части: $x+a-1\geqslant 0$ и $x+a-1\leqslant 0$. Задача сводится к тому, чтобы установить, при каких значениях параметра a имеет решение хотя бы одна из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} x+a-1\geqslant 0 & (2.1.а)\\ x^2+2x+2a-2+a^2+2a+1<3 & (2.1.б)\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+a-1\leqslant 0, & (2.2.а)\\ x^2-2x-2a+2+a^2+2a+1<3, & (2.2.б)\end{cases}$$

т. е. функция $f(x)$ может принимать значения меньше трех. Преобразуя системы (2.1) и (2.2) к виду

$$\begin{cases} a \geqslant 1-x, & (3.1.а) \\ (x+1)^2+(a+2)^2 < 9 & (3.1.б) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a \leqslant 1-x, & (3.2.а) \\ (x-1)^2+a^2<1, & (3.2.б) \end{cases}$$

рассмотрим изображения решений неравенств систем (3.1) и (3.2) в системе координат (x, a).

Неравенству (3.1.а) удовлетворяют координаты точек, лежащих выше прямой $a=1-x$ и на этой прямой (рис. 168), а неравенству (3.1.б) — координаты точек, лежащих внутри круга радиуса $r_1=3$ с центром в точке $A(-1, -2)$.

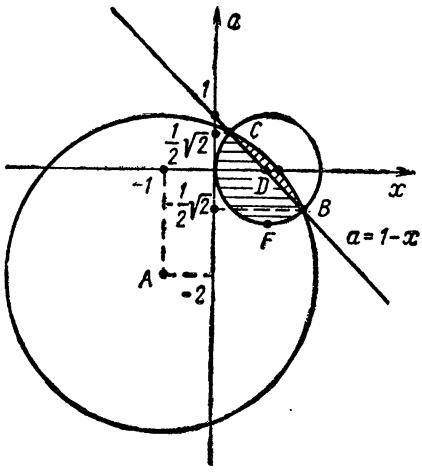


Рис. 16.

Совмещая изображения решений неравенств (3.1.а) и (3.1.б), находим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (3.1); рис. 168.

Координаты точек B и C находим из системы

$$\begin{cases} a=1-x, \\ (x+1)^2+(a+2)^2=9, \end{cases} \quad (4)$$

решение которой суть $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Система (3.1) имеет решение при $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Аналогично решаем систему (3.2). Неравенству (3.2.а) удовлетворяют координаты точек, лежащих ниже прямой $a=1-x$ и на этой прямой (рис. 168), а неравенству (3.2.б) — координаты точек, лежащих внутри круга радиуса $r_2=1$ с центром в точке $D(1, 0)$. Совмещая изображения решений неравенств (3.2.а) и (3.2.б), находим множество точек (рис. 168), координаты которых удовлетворяют системе (3.2). Координаты точек B и C находим из системы

$$\begin{cases} a=1-x, \\ (x-1)^2+a^2=1, \end{cases} \quad (5)$$

решения которой суть $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Координаты точки F находим из уравнения $(x-1)^2+a^2=1$ при $x=1$, с учетом того, что $a<0$, откуда имеем $(1, -1)$. Итак, система (3.2) имеет решения при $-1<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Объединяя найденные решения, находим значения параметра a, при которых имеет решение хотя бы одна из систем (3.1) и (3.2).

Ответ: $-1<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1155. Функция $f(x)$ может быть описана аналитически следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-4)x+3 \text{ при } x^2-4x+3\geqslant 0, & (1)\\ -x^2+(a+4)x-3 \text{ при } x^2-4x+3\leqslant 0, & (2)\end{cases}$$

где неравенство (1) выполняется при $x\leqslant 1$ и $x\geqslant 3$, а неравенство (2) — при $1\leqslant x\leqslant 3$. Задача сводится к тому, чтобы определить, при каких значениях параметра a неравенство

$$x^2+(a-4)x+3>1 \tag{3}$$

выполняется при всех

$$x\geqslant 3 \text{ и } x\leqslant 1, \tag{4}$$

а неравенство

$$-x^2+(a+4)x-3>1 \tag{5}$$

при всех

$$1\leqslant x\leqslant 3. \tag{6}$$

Преобразуем неравенство (3) к виду $x^2+(a-4)x+2>0$ и рассмотрим параболу $\varphi(x)=x^2+(a-4)x+2$. Так как ветви параболы направлены вверх ($A=1>0$), возможны 2 положения параболы $y=\varphi(x)$ относительно оси x и точек $x_1=1$ и $x_2=3$, при которых неравенство (3) выполняется при всех x, удовлетворяющих условию (4):

(а) парабола $y=\varphi(x)$ не пересекает оси x,

(б) парабола $y=\varphi(x)$ пересекает ось x внутри промежутка $1<x<3$.

Случай (а), рис. 169, *а*, описывается условием $D<0$, откуда

$$4-2\sqrt{2}<a<4+2\sqrt{2}. \tag{7}$$

Случай (б), рис. 169, б, описывается системой неравенств

$$\begin{cases} D \geqslant 0, & (8.а) \\ 1 < x_0 < 3, & (8.б) \\ \varphi(1) > 0, & (8.в) \\ \varphi(3) > 0. & (8.г) \end{cases}$$

Вычисляя величины $D = a^2 - 8a + 8$, $x_0 = \frac{4-a}{2}$,

$$\varphi(1) = a - 1 \text{ и } \varphi(3) = 3a - 1,$$

решаем неравенства системы (8). Неравенство (8.а) выполняется при $a \geqslant 4 + 2\sqrt{2}$ и $a \leqslant 4 - 2\sqrt{2}$, неравенство (8.б) —

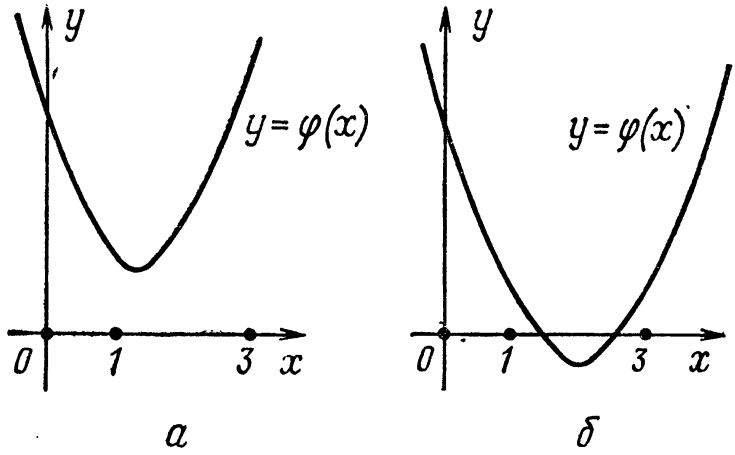


Рис. 169

при $-2 < a < 2$, неравенство (8.в) — при $a > 1$, а неравенство (8.г) — при $a > \frac{1}{3}$. Совмещая решения неравенств системы (8) на числовой оси (рис. 170), получаем

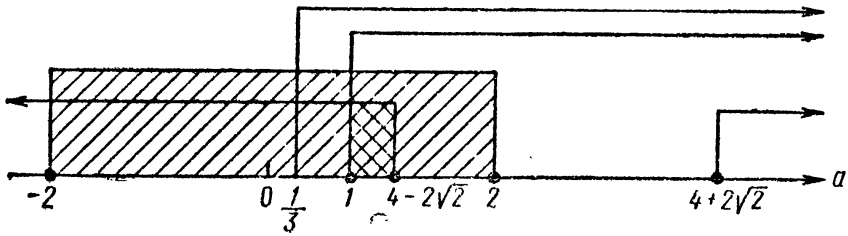


Рис. 170

$$1 \leqslant a \leqslant 4 - 2\sqrt{2}. \qquad (9)$$

Объединяя (7) и (9), находим значения параметра a, $1 < a < 4 + 2\sqrt{2}$, при которых неравенство (3) выполняется при $x \geqslant 3$ и $x \leqslant 1$.

Решим вторую часть задачи. Преобразуем неравенство (5) к виду

$$x^2-(a+4)x+4<0 \qquad (10)$$

и рассмотрим параболу $\psi(x)=x^2-(a+4)x+4$. Поскольку ветви параболы направлены вверх ($A=1>0$), возможно только одно положение параболы $y=\psi(x)$ относительно оси x и точек $x_1=1$ и $x_2=3$, при котором неравенство (10) будет выполняться при всех $1\leqslant x\leqslant 3$. Этот случай описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \psi(1)<0, & (11.а)\\ \psi(3)<0. & (11.б)\end{cases}$$

Вычисляя величины $\psi(1)=1-a$ и $\psi(3)=1-3a$, находим решения неравенств (11.а) $a>1$ и (11.б) $a>\frac{1}{3}$. Системе (11) удовлетворяют

$$a>1. \qquad (12)$$

Поскольку нас интересовали значения параметра, при которых одновременно выполняются неравенство (3) при соблюдении условия (4) и неравенство (5) при соблюдении условия (6), то, объединяя решения (9) и (12), получаем Ответ: $1<a<4+2\sqrt{2}$.

1156. $-\frac{8}{3}<a<-1$, $0<a<\frac{5}{3}$. **1157.** $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

1158. Определим значения параметра a, при которых справедливо каждое из трех утверждений в отдельности.

Уравнение $x+\frac{1}{x}=a$ приводится к равносильному ему уравнению $x^2-ax+1=0$, которое не имеет действительных корней при $D<0$, т. е. при $a^2-4<0$. Следовательно, при $-2<a<2$ утверждение (а) верно, а при $a\leqslant -2$ и $a\geqslant 2$ — ложно.

Левая часть равенства (б) равна

$$\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|.$$

Равенство $|a-2|=2-a$ справедливо при $2-a\geqslant 0$, т. е. при $a\leqslant 2$ и ложно при $a>2$.

Рассмотрим вопрос о единственности решения системы (в). Пусть (x_0, y_0) — решение системы (в). Так как y входит только под знак четных функций $y^2=(-y)^2$ и $\sin^2(-y)=\sin^2 y$, системе (в) будет удовлетворять также решение $(x_0 — y_0)$. Для того чтобы решение было единственным, необходимо, чтобы соблюдалось условие $y_0 = -y_0 = 0$.

Имеем $x=-3$ и $a=-3$. Подставляя $a=-3$ в систему (в), проверим достаточность этих условий. Система (в) приобретает вид

$$\begin{cases} x+y^2=-3, & (1) \\ x-\sin^2 y=-3. & (2) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получаем уравнение

$$y^2+\sin^2 y=0,$$

которое имеет очевидное единственное решение $y=0$. Этому значению y соответствует также единственное значение

$$x=-3.$$

Следовательно, при $a=-3$ утверждение (в) верно, а при $a\neq -3$ — ложно.

Совмещая решения вспомогательных задач на числовой оси, получим ответ.

Ответ: $a=-3$ (утверждение (а) ложно, а утверждения (б) и (в) — верны). $-2<a<2$ (утверждения (а) и (б) верны, а утверждение (в) — ложно).

1159. Ответ: $\frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{2}$, $a=1$.

1160. Пусть $(x_0, -y_0)$ — решение уравнения (1). Очевидно, что $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, y_0)$ и $(-x_0, -y_0)$ также являются решениями уравнения (1). Следовательно, для того, чтобы эти решения удовлетворяли уравнению (2), необходимо, чтобы соблюдалось условие $x_0y_0=-x_0y_0$, откуда $b=0$.

Исследуем возможные значения параметра a. Если $a<0$, уравнение (1) решений не имеет, в то время как уравнение (2) имеет решения вида $(0, y)$ и $(x, 0)$, и, следовательно, $a<0$ не удовлетворяют условию задачи.

Если $a>0$, то решения уравнения (1) изображаются точками окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале коор-

динат. Очевидно, что среди его решений есть такие, для которых ни x, ни y не равны нулю, например $x=y=\frac{\sqrt{2a}}{2}$. Следовательно, необходимое условие $xy=0$ будет нарушено и $a>0$ не удовлетворяют решению задачи.

Если $a=0$, уравнение (1) имеет единственное решение $x=y=0$, которое удовлетворяет уравнению (2) при $b=0$. Ответ: $a=b=0$.

1161. Пусть $a=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Найдя $y=\frac{\pi}{2}-x+\pi n$ из уравнения (1) и подставляя это значение y в левую часть уравнения (2), получаем

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x+\pi n\right)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Так как выражение $\frac{2}{\sin 2x}$ не равно постоянному числу, то в этом случае ни при каких y все решения уравнения (1) не будут удовлетворять уравнению (2).

Пусть $a\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ — искомое значение параметра a. Рассмотрим решение $(0,\ a)$ уравнения (1). Поскольку любое решение уравнения (1) должно удовлетворять уравнению (2), получаем необходимое условие

$$\operatorname{tg} a=b \tag{3}$$

для параметра b.

Рассмотрим второе решение $\left(\frac{\pi}{4},\ a-\frac{\pi}{4}\right)$ уравнения (1) и, подставляя его в уравнение (2) с учетом условия (3), получаем

$$1+\operatorname{tg}\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg} a. \tag{4}$$

Преобразуя уравнение (4), получаем

$$1+\frac{\operatorname{tg} a-1}{1+\operatorname{tg} a}=\operatorname{tg} a,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg} a=0,$$

откуда имеем $\operatorname{tg} a=0$ и $\operatorname{tg} a=1$. Получаем необходимые условия для параметров a и b.

$$\begin{cases} a=\pi n, \\ b=0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ b=1. \end{cases} \tag{6}$$

Проверим достаточность условий (5) и (6). Пусть $a=\pi n$ и $b=0$. Уравнение (1) принимает вид $x+y=\pi n$, а уравнение (2)

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=0. \tag{7}$$

Подставляя $y=\pi n-x$ в левую часть уравнения (7), убеждаемся, что она тождественно равна нулю при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, так как $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(\pi n-x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x=0$. Следовательно, $a=\pi n$ и $b=0$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть $a=\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $b=1$. Уравнение (1) принимает вид $x+y=\frac{\pi}{4}+\pi n$, а уравнение (2) — $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1$. (8)

Подставляя $y=\frac{\pi}{4}-x+\pi n$ в уравнение (8), убеждаемся, что левая часть этого уравнения

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\pi n+\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}\neq 1$$

при любых x и, следовательно, не все решения уравнения (1) при $a=\frac{\pi}{4}+\pi n$ удовлетворяют уравнению (2) при $b=1$, т. е. $a=\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $b=1$ не удовлетворяют условию задачи. Ответ: $a=\pi n$ и $b=0$.

1162. Пусть $y\neq 0$, тогда уравнение (1) равносильно уравнению $\left(\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}\right)^2=a$, откуда имеем

$$(1-a)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2+2(1+a)\frac{x}{y}+(1-a)=0. \tag{3}$$

Для того чтобы всякое решение $z=\frac{x}{y}$ квадратного уравнения (3) удовлетворяло линейному уравнению (2), необходимо, чтобы либо дискриминант уравнения (3) был равен нулю, либо коэффициент при z^2 был равен нулю. Вычисляя дискриминант

$$D=4(1+a)^2-4(1-a)^2=16a,$$

находим соответствующее значение $a=0$. Полагая $a=0$ в уравнении (3), находим $\frac{x}{y}=-1$. Чтобы этот корень удовлетворял уравнению (2), необходимо, чтобы $b=-1$.

Из условия равенства нулю коэффициента при z^2 получаем $a=1$ и из уравнений (3) и (2) $-b=0$.

Проверим достаточность этих условий. При $a=0$ уравнение (1) приобретает вид

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=0, \tag{4}$$

откуда $x=-y$, причем $y\neq 0$, так как при этом значении y левая часть уравнения (4) теряет смысл. Подставляя $x=-y\neq 0$ в уравнение $\frac{x}{y}=-1$, убеждаемся, что это решение всегда удовлетворяет уравнению (2) и, следовательно, при $a=0$ и $b\neq 1$ условия задачи удовлетворяются.

При $a=1$ и $b=0$ уравнение (1) приобретает вид

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=1 \tag{5}$$

и

$$\frac{x}{y}=0, \tag{6}$$

откуда из уравнения (5) после преобразований получаем $xy=0$. Итак, уравнению (5) удовлетворяют решения $(x, 0)$ и $(0, y)$. Поскольку при $y=0$ левая часть уравнения (6) теряет смысл, не все решения уравнения (5) удовлетворяют уравнению (6), и, следовательно, пара значений $a=1$ и $b=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=0$, $b=-1$.

1163. Решений нет. **1164.** $a=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $b=1$. **1165.** $a\neq 1$, $b=\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$. **1166.** $a=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $b=1$. **1167.** $a=\pm 1$, $b=0$. **1168.** $a<\frac{\pi^2}{2}$.

1169. Пусть (x_0, y_0) — решение системы (1). Поскольку в системе (1) неизвестное x входит только под знак четных функций, пара чисел $(-x_0, y_0)$ также будет решением системы (1). Для единственности решения необходимо, чтобы соблюдалось условие $x_0=-x_0=0$, т. е. решение имело вид $(0, y)$. Подставляя решение $(0, y)$ в уравнение (1.б), находим $y=\pm 1$, а из уравнения (1.а) находим $-a=0$ и $a=2$.

Проверим достаточность этих условий.

Пусть $a=0$. Система (1) принимает вид

$$\begin{cases} |\sin x|-1=y, \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1. \end{cases} \qquad (2)$$

Легко видеть, что кроме решения $(0, -1)$ система (2) имеет еще множество решений $(\pi n, -1)$ так как x входит только под знак периодических функций. Следовательно, при $a=0$ условие единственности решения не выполняется.

Пусть $a=2$. Система (1)′ принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2+1=y-|\sin x| & (3.а) \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1. & (3.б) \end{cases}$$

Заметим, что в силу уравнения (3.б) $y=\pm\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\leqslant 1$ и, следовательно, правая часть уравнения (3.а), $y-|\sin x|\leqslant 1$, в то время как $2x^2+1\geqslant 1$. Система (3) имеет решение только в том случае, если

$$\begin{cases} 2x^2+1=1, \\ y-|\sin x|=1, \\ y=1, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg} x=|\sin x|=x=0$ и $y=1$, т. е. система (1) при $a=2$ имеет единственное решение $(0,1)$.

Ответ: $a=2$.

1170. Поскольку по условию система (1) должна иметь решение при любом значении b, рассмотрим $b=0$. Имеем

$$\begin{cases} 2^0=a^2, \\ (a-1)x^3+y^3=1, \end{cases} \qquad (2)$$

откуда получаем необходимое условие существования решения: $a=\pm 1$.

Проверим их достаточность

1) Если $a=1$, имеем

$$\begin{cases} 2^{bx}+2by^2=1, & (3.а) \\ y^3=1. & (3.б) \end{cases}$$

Находя $y=1$ из уравнения (3.б) и подставляя это значение y в уравнение (3.а), получаем

$$2^{bx}=1-2b,$$

откуда видно, что система имеет действительные решения не при всех значениях b, и, следовательно, $a=1$ не удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a=-1$ система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} 2^{bx}=1, \\ -2x^3+y^3=1, \end{cases}$$

откуда видно, что при любом значении b существует по крайней мере одно действительное решение $x=0$, $y=1$.

Ответ: $a=-1$.

1171. Заметим, что если система имеет решение $x=x_0$ и $y=y_0$, то пара значений $x=x_0$ и $y=-y_0$ также удовлетворяет этой системе, так как

$$(x_0)^2+(-y_0)^2=x_0^2+y_0^2$$

и

$$\left|\frac{x_0^{-y_0}-1}{x_0^{-y_0}+1}\right|=\left|\frac{\frac{1}{x_0^{y_0}}-1}{\frac{1}{x_0^{y_0}}+1}\right|=\left|\frac{1-x_0^{y_0}}{1+x_0^{y_0}}\right|=\left|\frac{x_0^{y_0}-1}{x_0^{y_0}+1}\right|.$$

Следовательно, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $y_0=-y_0$, т. е. $y_0=0$. При искомых a и b решение системы должно иметь вид $(x_0, 0)$. Подставляя $x=x_0$ и $y=0$ в систему (1), получаем

$$\begin{cases} a=0, \\ x^2=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы (2) очевидно, что для существования единственного действительного решения системы необходимо, чтобы имели место соотношения $a=0$ и $b>0$ (значение $b=0$ отброшено потому, что при $x=0$ и $y=0$ выражение x^y теряет смысл).

Проверим достаточность этих условий. Система (1) приобретает вид

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right|=0, \\ x^2+y^2=b, \\ b>0. \end{cases}$$

Из уравнения (3.а) имеем $x^y=1$, откуда следует, что либо $y=0$, либо $x=1$. Получаем два решения системы: $x_1=\sqrt{b}$, $y_1=0$ и $x_2=1$, $y_2=\pm\sqrt{b-1}$. Для того чтобы система (3) имела только одно решение, необходимо, чтобы выражение $(b-1)$ было не больше нуля. Легко

проверить, что это условие является достаточным. Таким образом, при $a=0$ $0<b\leqslant 1$ система (1) имеет только одно действительное решение. Ответ: $x=\sqrt{b}$, $y=0$; $a=0$, $0<b\leqslant 1$.

1172. $a=b=-2$. **1173.** $a=1$. **1174.** $a=0$. **1175.** $a=2$. **1176.** $a=1$. **1177.** $a=\pm 1$. **1178.** $a\geqslant\sqrt{2}$. **1179.** 1) $a=0$, $x=y=\frac{3\pi}{2}$; 2) $a=2$, $x=y=\frac{\pi}{2}$. **1180.** а) $a^{b^2+1}\leqslant\frac{1}{16}$, б) $a^{b^2+1}=\frac{1}{16}$, в) $0<a\leqslant\frac{1}{16}$.

1181. Преобразуя в уравнении (2) произведения в разности синусов, получаем

$$\sin x-\sin 3x=\sin 5x-\sin x-\sin 5x,$$

откуда $\sin 3x=0$, $x=\frac{\pi n}{3}$. Для подстановки в уравнение (1) вычислим

$$\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}n=\begin{cases}1 \text{ при } n=3k,\\ -\frac{1}{2} \text{ при } n\neq 3k.\end{cases}$$

$$\cos 4x=\cos\frac{4\pi}{3}n=\begin{cases}1 \text{ при } n=3k,\\ -\frac{1}{2} \text{ при } n\neq 3k.\end{cases}$$

$$\cos 6x=\cos\frac{6\pi}{3}=1.$$

Подставляя эти значения

$$\cos 2x,\ \cos 4x \text{ и } \cos 6x$$

в уравнение (1), получим при $n=3k$ и при $n\neq 3k$ соотношение $a+|a|=0$, из которого устанавливаем необходимое условие ($a\leqslant 0$) равносильности уравнений.

Проверим достаточность условия $a\leqslant 0$. Уравнение (1) принимает вид $a\cos 2x-a\cos 4x=1-\cos 6x$, или $2a\sin 3x\cdot\sin x=2\sin^2 3x$ (3). Уравнение (3) распадается на три уравнения:

а) $\sin 3x=0$, откуда $x=\frac{\pi n}{3}$,

б) $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$,

в) $a=3-4\sin^2 x$.

Для того чтобы уравнение (1) было равносильным уравнению (2), необходимо, чтобы уравнение (в) не имело других решений, кроме $x=\frac{\pi n}{3}$.

Если $\frac{3-a}{4} > 1$ и $\frac{3-a}{4} < 0$, откуда в силу условия $a \leqslant 0$ получаем $a < -1$, уравнение (в) решений не имеет.

Если же левая часть уравнения (в) равна 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ и 1, то решения этого уравнения входят в множество $x = \frac{\pi n}{3}$.

Из соотношений $\frac{3-a}{4} = 0$; $\frac{3-a}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{3-a}{4} = \frac{3}{4}$ и $\frac{3-a}{4} = 1$ находим $a = 3$, $a = 2$; $a = 0$ и $a = -1$ соответственно. Учитывая необходимое условие $a \leqslant 0$, получаем $a = 0$ и $a = -1$.

Легко проверить, что эти условия являются достаточными и уравнения (1) и (2) при $a = 0$ и $a \leqslant -1$ равносильны, их общее решение $x = \frac{\pi n}{3}$. Ответ: $a = 0$ и $a \leqslant -1$.

1182. Поскольку уравнение (1) имеет решение $x = \pi n$, при котором $\sin x = 0$, для равносильности уравнений (1) и (2) необходимо, чтобы $x = \pi n$ удовлетворяли уравнению (2). Подставляя $x = \pi n$ в уравнение (2), получаем

$$2(a-1) = 2(a-1)^3,$$

откуда $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 2$.

Проверим достаточность этих условий:

а) Пусть $a = 1$. Уравнение (1) принимает вид

$$2\sin^7 x = \sin x + \sin^3 x. \qquad (3)$$

Применяя разложение на множители, получаем

$$\sin x (\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0,$$

откуда

$$\sin x = 0, \qquad (4)$$

$$\sin^2 x = 1. \qquad (5)$$

Уравнение $2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1 = 0$ решений не имеет, так как корни уравнения $2z^2 + 2z + 1 = 0$ комплексные, сопряженные. Объединяя решения $x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ уравнений (4) и (5), получаем $x = \frac{\pi m}{2}$.

Уравнение (2) при $a = 1$ принимает вид

$$2\sin^6 x = 2\sin^2 x, \qquad (6)$$

откуда $\sin x=0$ и $\sin^2 x=1$, т. е. решение уравнения (6) также имеет вид $x=\frac{\pi m}{2}$. Следовательно, при $a=1$ уравнение (1) и (2) равносильны.

б) Пусть $a=0$. Уравнение (1) принимает вид

$2\sin^7 x=\sin x$, откуда $\sin x=0$ и $\sin x=\pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

Уравнение (2) при $a=0$ приобретает вид

$$-1-\cos^2 x+2\sin^6 x=2\sin^2 x-2,$$

или $2\sin^6 x=\sin^2 x$, откуда $\sin x=0$ и

$$\sin x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что при $a=0$ множества решений уравнений (1) и (2) не совпадают, т. е. эти уравнения не равносильны.

в) Пусть $a=2$. Уравнение (1) принимает вид

$$2\sin^7 x=\sin x+2\sin^3 x; \tag{7}$$

уравнение (7) распадается на два уравнения $\sin x=0$, откуда $x=\pi n$ и

$$2\sin^6 x-2\sin^2 x=1. \tag{8}$$

Полагая $z=\sin^2 x$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$, рассмотрим функцию

$$f(z)=2z^3-2z=2z(z+1)(z-1).$$

При $0\leqslant z\leqslant 1$ имеем $f(z)\leqslant 0$ и, следовательно, уравнение $f(z)=1$ не имеет решений в пределах $0\leqslant z\leqslant 1$, т. е. не имеет решений уравнение (8).

Множество решений уравнения (7) — $x=\pi n$.

Уравнение (2) при $a=2$ принимает вид

$$1+\cos^2 x+2\sin^6 x=2\sin^2 x+2,$$

или

$$2\sin^6 x=3\sin^2 x. \tag{9}$$

Уравнение (9) распадается на два уравнения: $\sin x=0$, откуда $x=\pi n$ и $2\sin^4 x=3$, которое не имеет решений.

Итак, при $a=2$ множества решений уравнений (1) и (2) совпадают ($x=\pi n$) и, следовательно, уравнения равносильны. Ответ: $a=1$ и $a=2$.

1183. $a=0$, $a=\frac{1}{2}$. **1184.** $a=4$, $a>5$. **1185.** $a=3$, $a=4$, $0\leqslant a<1$, $a>5$. **1186.** $a=0$, $a=-1$. **1187.** $a=\frac{2m}{1+2n}$, где m, $n=0$, ± 1, ± 2, . . .

1188. a — иррациональное число.

1190. Правую часть второго уравнения преобразуем к виду $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+1$. Рассматривая решение (0, 1, —1), (1, 1, 0) и (2, 1, 1) первого уравнения и подставляя их во второе уравнение, получаем необходимые условия:

$$\begin{cases} -b+c=2, \\ a+c\sqrt{2}=1+\sqrt{2}, \\ 2a+b+c\sqrt{5}=1+\sqrt{5} \end{cases}$$

для параметров a, b и c, откуда $a=1$, $b=-1$ и $c=1$. Подставляя эти значения параметров во второе уравнение, убеждаемся, что оно будет равносильно первому уравнению. Ответ: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

1191. $a=c$, $b+d=0$.

1192. Если определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} b & -1 \\ b-6 & 2b \end{vmatrix}=2b^2+b-6$$

отличен от нуля, система имеет единственное решение. Если же определитель системы равен нулю $\left(\text{т. е. } b=1 \text{ или } b=-\frac{3}{2}\right)$, для существования решений необходимо, чтобы выполнялось условие $\frac{b}{b-6}=\frac{-1}{2b}=\frac{ac^2}{c+1}$.

При $b=1$ имеем $2ac^2+c+1=0$. Это уравнение относительно c имеет действительные решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$1-8a\geqslant 0,$$

откуда

$$a\leqslant\frac{1}{8}.$$

При $b=-\frac{3}{2}$ имеем $3ac^2-c-1=0$ из условия существования действительных решений этого уравнения, $1+12a\geqslant 0$ находим $a\geqslant-\frac{1}{12}$. Следовательно, условия задачи будут выполняться при $-\frac{1}{12}\leqslant a\leqslant\frac{1}{8}$.

1193. а) $-1\leqslant p\leqslant 1$, б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant p\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Б. И., Моденов П. С. Пособие по математике для подготовительных курсов МГУ. Изд-во МГУ, 1967.
2. Александров Б. И., Лурье М. В., Максимов В. М. Экзаменационные задачи по математике. Изд-во МГУ, 1969.
3. Александров Б. И., Лурье М. В., Максимов В. М. Математика. Методическое руководство и контрольные задания. Изд-во МГУ, 1970.
4. Александров Б. И., Лурье М. В., Максимов В. М. Пособие для подготовки к письменному экзамену по математике в МГУ. Изд-во МГУ, 1972.
5. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1968.
6. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. О письменных вступительных экзаменах по математике на естественных факультетах МГУ (1966 и 1967 гг.). Изд-во МГУ, 1969.
7. Лурье М. В., Максимов В. М. Математика. Контрольные работы, варианты заданий для самостоятельных упражнений. Разбор задач и ответы. Изд-во МГУ, 1968.

8а. Максимов В. М. Краткое пособие по математике (действительные и комплексные числа). Изд-во МГУ, 1969.

8б. Максимов В. М. Пособие по математике для поступающих в МГУ (некоторые вопросы элементарной алгебры). Изд-во МГУ, 1972.

9. Марков В. К. Системы алгебраических уравнений. Изд-во МГУ, 1969.
10. Марков В. К. Метод координат и задачи с параметрами. Изд-во МГУ, 1970.
11. Моденов П. С., Новоселов С. И. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд-во МГУ, 1966.
12. Сборник подготовительных задач (ЗМШ). Изд-во МГУ, 1968.
13. Тоом А., Гутенмахер В., Васильев Н., Раббот Ж. Задачи устного экзамена по математике. Изд-во МГУ, 1970.

Александров Борис Иванович, Максимов Вячеслав Михайлович, Лурье Михаил Владимирович, Колесниченко Александр Владимирович

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Тематический план 1972 г. № 178

Редактор *Ю. И. Сионский*. Технический редактор *Г. И. Георгиева*. Корректоры: *И. А. Большакова, А. А. Алексеева, С. Ф. Будаева, Т. С. Коновалова, В. А. Зарипова, Н. И. Коновалова, И. С. Хлыстова*

Сдано в набор 4/VII 1972 г. Подписано к печати 17/X 1972 г. Л. 45341. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Физ. печ. л. 19,0. Усл. печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 29,66. Изд. № 1551. Зак. 3076. Тираж 100 000 экз. Цена 93 коп.

Издательство Московского университета. Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28